

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ  
И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.1;539.3

ВНУТРЕННИЕ АНТИСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ ЛЭМБА

© 2023 г. В. В. Мокряков\*

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского  
Российской академии наук, пр-т Вернадского 101, корп. 1, Москва, 119526 Россия

\*e-mail: mokr@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 12.08.2022 г.

После доработки 16.12.2022 г.

Принята к публикации 22.12.2022 г.

Исследован класс антисимметричных решений волновых уравнений Лэмба, имеющих нулевые деформации и напряжения на поверхности, так называемых внутренних волн Лэмба. Найдено два типа таких решений: первый соответствует фазовой скорости Ламе, второй – с фазовыми скоростями, превышающими скорость волны расширения в безграничной среде. Доказано, что внутренние волны с одной и той же фазовой скоростью образуют ряды, при этом частоты членов одного ряда кратны частоте первого члена ряда. Это же справедливо и для волновых чисел. Представлены профили деформированных пластин и распределения максимальных значений растяжения и сдвига.

**Ключевые слова:** волны Лэмба, упругость, неограниченная пластина, напряженно-деформированное состояние, коэффициент Пуассона, локализация напряжений, внутренняя волна Лэмба

**DOI:** 10.31857/S0320791922600573, **EDN:** QRNSOG

	<b>ОБОЗНАЧЕНИЯ:</b>	
$x, y, z$	координаты в декартовой системе координат	$\varepsilon_{ij}$
$a$	полутолщина пластины	$\Delta$
$\rho$	плотность	$\sigma_{ij}$
$E$	модуль Юнга	$U$
$\nu$	коэффициент Пуассона	
$\lambda, \mu$	параметры Ламе	
$\omega$	круговая частота	
$\gamma$	круговое волновое число	
$l$	длина волны	
$\Omega = \gamma x - \omega t$	фаза волны в точке $x$ в момент $t$	
$c = \omega/\gamma$	фазовая скорость	
$c_0 = \sqrt{E/\rho}$	скорость бесконечно длинных волн в бесконечном стержне	
$c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$	скорость волн расширения в бесконечной среде	
$c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$	скорость волн сдвига в бесконечной среде	
$c_L = c_2\sqrt{2}$	скорость Ламе	
$c_R$	скорость волн Рэлея (поверхностных волн в полупространстве)	
$u_i$	компоненты вектора смещений	

$\varepsilon_{ij}$	компоненты тензора деформаций
$\Delta$	первый инвариант тензора деформаций
$\sigma_{ij}$	компоненты тензора напряжений
$U$	обобщенная амплитуда волны

В формулах используются следующие сокращения и соотношения:

$$\alpha = \gamma\sqrt{c^2/c_1^2 - 1}, \quad \beta = \gamma\sqrt{c^2/c_2^2 - 1}, \quad (1)$$

$$c_1^2 = c_0^2 \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = c_0'^2 \frac{(1 - \nu)^2}{1 - 2\nu}; \quad (2)$$

$$c_2^2 = \frac{c_0^2}{2(1 + \nu)} = c_0'^2 \frac{1 - \nu}{2};$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \rho(c_1^2 - 2c_2^2); \quad (3)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \rho c_2^2; \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\nu}{1 - 2\nu} = \frac{c_1^2}{c_2^2} - 2.$$

ВВЕДЕНИЕ

Для неразрушающего контроля напряженно-деформированного состояния конструкции широко применяются поверхностные тензодатчики,

которые хороши для измерения статических или медленно меняющихся деформаций [1]. Поскольку статические уравнения теории линейной упругости имеют эллиптический вид, то максимумы деформаций и напряжений имеют место на поверхности объекта [2], и этот факт дает обоснование использования поверхностных тензодатчиков.

Однако, если речь идет о быстро меняющихся деформациях, то необходимо учитывать влияние инерции материала. Динамические (или волновые) уравнения упругости имеют гиперболический вид, а это значит, что локализация деформаций и напряжений может происходить не только на поверхности, но и внутри материала.

Например, в работе [3] показано, что уравнения Лэмба в модели малых упругих деформаций допускают решение в виде симметричной волны внутреннего типа, т.е. распространяющейся в толще пластины и имеющий нулевые напряжения и деформации на поверхности. Необходимо отметить, что такие волны являются частными случаями уже известных общих решений.

Основные уравнения волны, бегущей в упругой пластине ненулевой толщины, впервые получены Лэмбом [4]. Решение этой системы уравнений можно также найти у многих других более поздних авторов (напр., [5–7]).

Уравнения Лэмба применимы для решения задач о пластинах из материалов различных свойств: анизотропных (напр., [8]), ауксетических (напр., [9]), функционально-градиентных материалов (напр., [10, 11]). Еще одно применение уравнений Лэмба – решение задач о многослойных пластинах, слоистых структурах и т.п. [12].

С другой стороны, волны Лэмба применяются для диагностики конструкций. В работах [1, 13–17] представлены результаты исследований взаимодействия волны Лэмба с дефектами, способы возбуждения и регистрации волны в конструкции, использования сенсоров.

С этой точки зрения исследование внутренних волн Лэмба может представлять интерес с целью усовершенствования методов неразрушающего контроля. Данная работа посвящена исследованию антисимметричных внутренних волн Лэмба.

### ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Распределения смещений пластины в поле антисимметричной волны Лэмба можно описать следующим образом [6] (рассматривается задача линейной упругости в рамках модели малых деформаций):

$$\begin{aligned} u_x &= [-iA\gamma \sin(\alpha z) - \beta B \sin(\beta z)] \sin \Omega, \\ u_z &= [iA\alpha \cos(\alpha z) - \gamma B \cos(\beta z)] \cos \Omega, \\ u_y &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда получаем распределения деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u_{x,x} = [-iA\gamma^2 \sin(\alpha z) - \gamma\beta B \sin(\beta z)] \cos \Omega, \\ \varepsilon_{zz} &= u_{z,z} = [-iA\alpha^2 \sin(\alpha z) + \gamma\beta B \sin(\beta z)] \cos \Omega, \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2}(u_{x,z} + u_{z,x}) = \\ &= [-iA\gamma\alpha \cos(\alpha z) + \frac{1}{2}(\gamma^2 - \beta^2) B \cos(\beta z)] \sin \Omega, \\ \Delta &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz} = -iA(\gamma^2 + \alpha^2) \sin(\alpha z) \cos \Omega, \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Используя закон Гука, получаем распределения напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \mu [(2\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2) iA \sin(\alpha z) - \\ &\quad - 2\gamma\beta B \sin(\beta z)] \cos \Omega, \\ \sigma_{yy} &= \mu (2\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2) iA \sin(\alpha z) \cos \Omega, \\ \sigma_{zz} &= \mu [(\gamma^2 - \beta^2) iA \sin(\alpha z) + \\ &\quad + 2\gamma\beta B \sin(\beta z)] \cos \Omega, \\ \sigma_{xz} &= \mu [-2iA\gamma\alpha \cos(\alpha z) + \\ &\quad + (\gamma^2 - \beta^2) B \cos(\beta z)] \sin \Omega, \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Используя граничные условия (поверхности пластины свободны от нагрузок), получаем дисперсионное соотношение:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}|_{z=a} &= \mu [(\gamma^2 - \beta^2) iA \sin(\alpha a) + \\ &\quad + 2\gamma\beta B \sin(\beta a)] \cos \Omega = 0, \\ \sigma_{xz}|_{z=a} &= \mu [-2iA\gamma\alpha \cos(\alpha a) + \\ &\quad + (\gamma^2 - \beta^2) B \cos(\beta a)] \sin \Omega = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{cases} (\gamma^2 - \beta^2) iA \sin(\alpha a) = -2\gamma\beta B \sin(\beta a), \\ 2iA\gamma\alpha \cos(\alpha a) = (\gamma^2 - \beta^2) B \cos(\beta a), \end{cases} \quad (8)$$

$$\frac{iA}{B} = \frac{-2\gamma\beta \sin(\beta a)}{(\gamma^2 - \beta^2) \sin(\alpha a)} = \frac{(\gamma^2 - \beta^2) \cos(\beta a)}{2\gamma\alpha \cos(\alpha a)}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} -4\gamma^2 \alpha \beta \cos(\alpha a) \sin(\beta a) &= \\ = (\gamma^2 - \beta^2)^2 \sin(\alpha a) \cos(\beta a). \end{aligned} \quad (10)$$

Из (9) видно, что коэффициенты  $A$  и  $B$  взаимосвязаны, и поэтому они могут быть заменены на один общий коэффициент  $U$ , например, следующим образом:

$$\frac{i\gamma\alpha A}{(\gamma^2 - \beta^2) \cos(\beta a)} = \frac{B}{2 \cos(\alpha a)} = U. \quad (11)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} i\gamma\alpha A &= U (\gamma^2 - \beta^2) \cos(\beta a), \\ B &= 2U \cos(\alpha a). \end{aligned} \quad (12)$$

Используя эти равенства, получаем следующие выражения для ненулевых смещений и напряжений:

$$\begin{aligned} u_x &= -U \left[ \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\alpha} \cos(\beta a) \sin(\alpha z) + \right. \\ &\quad \left. + 2\beta \cos(\alpha a) \sin(\beta z) \right] \sin \Omega, \\ u_z &= U \left[ \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma} \cos(\beta a) \cos(\alpha z) - \right. \\ &\quad \left. - 2\gamma \cos(\alpha a) \cos(\beta z) \right] \cos \Omega, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \mu U \left[ (2\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2) \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma \alpha} \cos(\beta a) \sin(\alpha z) - \right. \\ &\quad \left. - 4\gamma \beta \cos(\alpha a) \sin(\beta z) \right] \cos \Omega, \\ \sigma_{yy} &= \mu U (2\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2) \times \\ &\quad \times \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma \alpha} \cos(\beta a) \sin(\alpha z) \cos \Omega, \\ \sigma_{zz} &= \mu U \left[ \frac{1}{\gamma \alpha} (\gamma^2 - \beta^2)^2 \cos(\beta a) \sin(\alpha z) + \right. \\ &\quad \left. + 4\gamma \beta \cos(\alpha a) \sin(\beta z) \right] \cos \Omega, \\ \sigma_{xz} &= -2\mu U (\gamma^2 - \beta^2) \times \\ &\quad \times [\cos(\beta a) \cos(\alpha z) - \cos(\alpha a) \cos(\beta z)] \sin \Omega. \end{aligned} \quad (14)$$

### РАСЧЕТ ВНУТРЕННЕЙ ВОЛНЫ

Как уже говорилось выше, исходя из граничных условий, напряжения  $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = 0$  на поверхности пластины. Однако существуют некоторые волны Лэмба, имеющие на поверхности все компоненты напряжений, равные нулю (далее будем называть такие волны внутренними волнами Лэмба). Докажем это.

Для этого нужно рассмотреть три диапазона фазовых скоростей:  $c < c_2$ ,  $c_2 < c < c_1$  и  $c > c_1$  (ограничимся здесь значениями коэффициента Пуассона  $0 < \nu < 0.5$ ).

В первом диапазоне  $c < c_2$  коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  мнимые:

$$\begin{aligned} \alpha &= \gamma \sqrt{c^2/c_1^2 - 1} = i\gamma \sqrt{1 - c^2/c_1^2} = i|\alpha|, \\ \beta &= \gamma \sqrt{c^2/c_2^2 - 1} = i\gamma \sqrt{1 - c^2/c_2^2} = i|\beta|, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $|\alpha|$  и  $|\beta|$  — модули соответствующих величин.

Тогда в выражениях (13) и (14) тригонометрические функции мнимого аргумента заменяются

гиперболическими функциями действительного аргумента:

$$\begin{aligned} u_x &= -U \left[ \frac{\gamma^2 + |\beta|^2}{|\alpha|} \operatorname{ch}(|\beta|a) \operatorname{sh}(|\alpha|z) - \right. \\ &\quad \left. - 2|\beta| \operatorname{ch}(|\alpha|a) \operatorname{sh}(|\beta|z) \right] \sin \Omega, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} u_z &= U \left[ \frac{\gamma^2 + |\beta|^2}{\gamma} \operatorname{ch}(|\beta|a) \operatorname{ch}(|\alpha|z) - \right. \\ &\quad \left. - 2\gamma \operatorname{ch}(|\alpha|a) \operatorname{ch}(|\beta|z) \right] \cos \Omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \mu U \left[ (|\beta|^2 - 2|\alpha|^2 - \gamma^2) \frac{\gamma^2 + |\beta|^2}{\gamma |\alpha|} \times \right. \\ &\quad \left. \times \operatorname{ch}(|\beta|a) \operatorname{sh}(|\alpha|z) + 4\gamma |\beta| \operatorname{ch}(|\alpha|a) \operatorname{sh}(|\beta|z) \right] \cos \Omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= \mu U (|\beta|^2 - 2|\alpha|^2 + \gamma^2) \times \\ &\quad \times \frac{\gamma^2 + |\beta|^2}{\gamma |\alpha|} \operatorname{ch}(|\beta|a) \operatorname{sh}(|\alpha|z) \cos \Omega, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \mu U \left[ \frac{1}{\gamma |\alpha|} (\gamma^2 + |\beta|^2)^2 \operatorname{ch}(|\beta|a) \operatorname{sh}(|\alpha|z) - \right. \\ &\quad \left. - 4\gamma |\beta| \operatorname{ch}(|\alpha|a) \operatorname{sh}(|\beta|z) \right] \cos \Omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= -2\mu U (\gamma^2 + |\beta|^2) \times \\ &\quad \times [\operatorname{ch}(|\beta|a) \operatorname{ch}(|\alpha|z) - \operatorname{ch}(|\alpha|a) \operatorname{ch}(|\beta|z)] \sin \Omega. \end{aligned}$$

В этом случае дисперсионное соотношение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}|_{z=\pm a} &= \sigma_{xz}|_{z=\pm a} = 0 : \\ (\gamma^2 + |\beta|^2)^2 \operatorname{ch}(|\beta|a) \operatorname{sh}(|\alpha|a) &= \\ &= 4\gamma^2 |\alpha| |\beta| \operatorname{ch}(|\alpha|a) \operatorname{sh}(|\beta|a). \end{aligned} \quad (18)$$

Найдем теперь характеристики волны, у которой на поверхности также  $\sigma_{yy}$  равны нулю:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}|_{z=\pm a} &= \mu U (|\beta|^2 - 2|\alpha|^2 + \gamma^2) \times \\ &\quad \times \frac{\gamma^2 + |\beta|^2}{\gamma |\alpha|} \operatorname{ch}(|\beta|a) \operatorname{sh}(|\alpha|a) \cos \Omega = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Существует единственное решение  $|\alpha| = 0$ , т.е.  $c = c_1$ . Однако в рассматриваемый диапазон ( $c < c_2$ ) это решение не входит.

Рассмотрим второй диапазон  $c_2 < c < c_1$ . В этом случае коэффициент  $\alpha$  мнимый, коэффициент  $\beta$  действительный. Тогда смещения и напряжения имеют следующий вид:

$$u_x = -U \left[ \frac{\gamma^2 - \beta^2}{|\alpha|} \cos(\beta a) \operatorname{sh}(|\alpha|z) + 2\beta \operatorname{ch}(|\alpha|a) \sin(\beta z) \right] \sin \Omega, \quad (20)$$

$$u_z = U \left[ \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma} \cos(\beta a) \operatorname{ch}(|\alpha|z) - 2\gamma \operatorname{ch}(|\alpha|a) \cos(\beta z) \right] \cos \Omega,$$

$$\sigma_{xx} = \mu U \left[ (-2|\alpha|^2 - \beta^2 - \gamma^2) \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma|\alpha|} \times \cos(\beta a) \operatorname{sh}(|\alpha|z) - 4\gamma\beta \operatorname{ch}(|\alpha|a) \sin(\beta z) \right] \cos \Omega,$$

$$\sigma_{yy} = \mu U (-2|\alpha|^2 - \beta^2 + \gamma^2) \times \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma|\alpha|} \cos(\beta a) \operatorname{sh}(|\alpha|z) \cos \Omega, \quad (21)$$

$$\sigma_{zz} = \mu U \left[ \frac{1}{\gamma|\alpha|} (\gamma^2 - \beta^2)^2 \cos(\beta a) \operatorname{sh}(|\alpha|z) + 4\gamma\beta \operatorname{ch}(|\alpha|a) \sin(\beta z) \right] \cos \Omega,$$

$$\sigma_{xz} = -2\mu U (\gamma^2 - \beta^2) \times [\cos(\beta a) \operatorname{ch}(|\alpha|z) - \operatorname{ch}(|\alpha|a) \cos(\beta z)] \sin \Omega.$$

Дисперсионное соотношение в данном случае имеет следующий вид:

$$(\gamma^2 - \beta^2)^2 \cos(\beta a) \operatorname{sh}(|\alpha|a) + 4\gamma^2 |\alpha| \beta \operatorname{ch}(|\alpha|a) \sin(\beta a) = 0. \quad (22)$$

Используя это выражение, получим выражения для  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$  на поверхности:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}|_{z=a} &= -2\mu U (|\alpha|^2 + \beta^2) \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma|\alpha|} \times \\ &\times \cos(\beta a) \operatorname{sh}(|\alpha|a) \cos \Omega = 0, \\ \sigma_{yy}|_{z=a} &= \mu U (-2|\alpha|^2 - \beta^2 + \gamma^2) \times \\ &\times \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma|\alpha|} \cos(\beta a) \operatorname{sh}(|\alpha|a) \cos \Omega = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Существует только два решения системы (23):  $\gamma = \beta$  или  $\cos(\beta a) = 0$ . Однако второе решение не удовлетворяет дисперсионному соотношению. Остается только одно решение:

$$\begin{aligned} \gamma = \beta &= \gamma \sqrt{\frac{c^2}{c_2^2} - 1} \Rightarrow \sqrt{\frac{c^2}{c_2^2} - 1} = 1 \Rightarrow \\ c &= c_2 \sqrt{2} = c_L. \end{aligned} \quad (24)$$

Так мы видим, что фазовая скорость внутренних волн во втором диапазоне совпадает с так называемой скоростью Ламе [18]. Волна Лэмба, движущаяся со скоростью Ламе, вызывает деформацию чистого сдвига, т.е. объемный компонент деформации равен нулю.

Из дисперсионного соотношения получаем, что  $\gamma$  должно удовлетворять следующему выражению:

$$\sin(\beta a) = \sin(\gamma a) = 0 \Rightarrow \gamma a = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (25)$$

Если  $n = 0$ , то волны нет. Также волны с индексами  $n$  и  $-n$  отличаются только направлением движения волны. Поэтому достаточно рассматривать только  $n \geq 1$ .

Длина внутренней волны имеет следующий вид:

$$l = \frac{2\pi}{\gamma} = \frac{2a}{n}, \quad n \geq 1. \quad (26)$$

Найдем значения круговых частот (в рад/с) этой группы внутренних волн:

$$\omega = c\gamma = \frac{\pi c_L}{a} n. \quad (27)$$

Соответственно, частота в Гц имеет следующий вид:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c_L}{2a} n = \frac{c_L}{l}. \quad (28)$$

Далее, для данного типа внутренних волн получим выражения для смещений и напряжений (для краткости введем величину  $\eta = \sqrt{1 - 2\frac{c_2^2}{c_1^2}} = \sqrt{\frac{v}{1-v}}$ ):

$$\begin{aligned} u_x &= -2U \frac{\pi n}{a} \operatorname{ch}(\pi n \eta) \sin\left(\pi n \frac{z}{a}\right) \sin \Omega, \\ u_z &= -2U \frac{\pi n}{a} \operatorname{ch}(\pi n \eta) \cos\left(\pi n \frac{z}{a}\right) \cos \Omega, \\ \sigma_{xx} &= -4\mu U \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \operatorname{ch}(\pi n \eta) \sin\left(\pi n \frac{z}{a}\right) \cos \Omega; \\ \sigma_{yy} &= 0, \\ \sigma_{zz} &= 4\mu U \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \operatorname{ch}(\pi n \eta) \sin\left(\pi n \frac{z}{a}\right) \cos \Omega; \\ \sigma_{xz} &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Представляет также интерес исследовать, как меняются параметры волны ( $c$ ,  $\gamma$ ,  $\omega$ ) в окрестности точек внутренних волн.

Рассмотрим волну со следующими параметрами:

$$c = c_L + \Delta c, \quad \gamma = \frac{\pi n}{a} + \Delta\gamma, \quad \omega = \frac{\pi c_L}{a} n + \Delta\omega, \quad (31)$$

где

$$\Delta c \ll c_1, \quad \Delta \gamma \ll \frac{\pi}{a}, \quad \Delta \omega \ll \frac{\pi c_1}{a}. \quad (32)$$

Подставим эти значения в дисперсионное соотношение. Если пренебречь малыми величинами второго и выше порядка, то получим:

$$a\Delta\gamma + \pi n\sqrt{2}\frac{\Delta c}{c_2} = 0 \Rightarrow \Delta c = -\frac{ac_2}{\pi n\sqrt{2}}\Delta\gamma, \quad (33)$$

$$\Delta\omega = \frac{c_2}{\sqrt{2}}\Delta\gamma = -\frac{\pi n}{a}\Delta c. \quad (34)$$

Таким образом, изменения волнового числа, частоты и фазовой скорости взаимно пропорциональны. В частности, это показывает, что в точках, соответствующих внутренним волнам, линии дисперсионного соотношения остаются непрерывными и гладкими, и не имеют особенностей.

Теперь рассмотрим третий диапазон  $c > c_1$ . Здесь коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  действительны и выражения (13) и (14) не изменяются.

Найдем решение в виде внутренней волны. Приравняем напряжения  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$  (6) на поверхности к нулю:

$$\sigma_{xx}|_{z=\pm a} = \mu \left[ (2\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2) iA \sin(\alpha a) - 2\gamma\beta B \sin(\beta a) \right] \cos \Omega = 0, \quad (35)$$

$$\sigma_{yy}|_{z=\pm a} = \mu (2\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2) iA \sin(\alpha a) \cos \Omega = 0.$$

Используя (8), получаем:

$$\begin{cases} (\alpha^2 - \beta^2) iA \sin(\alpha a) = 0, \\ (2\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2) iA \sin(\alpha a) = 0. \end{cases} \quad (36)$$

Здесь единственное решение

$$\sin(\alpha a) = 0 \Rightarrow \gamma a \sqrt{\frac{c^2}{c_1^2} - 1} = \pi n_1, \quad n_1 \in \mathbb{Z}. \quad (37)$$

Согласно (8), если  $\sin(\alpha a) = 0$ , то и  $\sin(\beta a) = 0$ . Соответственно

$$\sin(\beta a) = 0 \Rightarrow \gamma a \sqrt{\frac{c^2}{c_2^2} - 1} = \pi n_2, \quad n_2 \in \mathbb{Z}. \quad (38)$$

Так как в рассматриваемом диапазоне  $c$  должно быть больше, чем  $c_1$ , то имеют смысл только те значения  $n_1, n_2$ , которые не меньше единицы. Объединим (37) и (38) в систему уравнений относительно  $\gamma$  и  $c$ :

$$\begin{cases} \gamma a \sqrt{\frac{c^2}{c_1^2} - 1} = \pi n_1, \\ \gamma a \sqrt{\frac{c^2}{c_2^2} - 1} = \pi n_2. \end{cases} \quad (39)$$

Отсюда получаем:

$$c = c_1 c_2 \sqrt{\frac{n_2^2 - n_1^2}{n_2^2 c_2^2 - n_1^2 c_1^2}}, \quad (40)$$

$$\gamma = \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{n_2^2 c_2^2 - n_1^2 c_1^2}{c_1^2 - c_2^2}}. \quad (41)$$

Поскольку  $c_1 > c_2$ , то получаем дополнительное ограничение на индексы  $n_1$  и  $n_2$ :

$$\frac{n_2}{n_1} > \frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{2-2\nu}{1-2\nu}}. \quad (42)$$

Например, для материала с  $\nu = 0.3$  получим  $n_2 > n_1 \sqrt{3.5} \approx 1.87 n_1$ .

Найдем длину внутренней волны:

$$l = \frac{2\pi}{\gamma} = 2a \sqrt{\frac{c_1^2 - c_2^2}{n_2^2 c_2^2 - n_1^2 c_1^2}}. \quad (43)$$

Найдем также круговую частоту:

$$\omega = \frac{\pi c_1 c_2}{a} \sqrt{\frac{n_2^2 - n_1^2}{c_1^2 - c_2^2}} \quad (44)$$

или частоту в Гц:

$$f = \frac{c_1 c_2}{2a} \sqrt{\frac{n_2^2 - n_1^2}{c_1^2 - c_2^2}}. \quad (45)$$

Используя эти выражения, получаем выражения для смещений и напряжений для внутренней волны (для

краткости введем параметр  $n' = \sqrt{\frac{n_2^2 c_2^2 - n_1^2 c_1^2}{c_1^2 - c_2^2}}$ ,

$\gamma = \frac{\pi}{a} n'$ ):

$$\begin{aligned} u_x &= -U \frac{\pi}{a} \left[ \frac{n'^2 - n_2^2}{n_1} (-1)^{n_2} \sin \frac{\pi n_1 z}{a} + \right. \\ &\quad \left. + 2n_2 (-1)^{n_1} \sin \frac{\pi n_2 z}{a} \right] \sin \Omega, \\ u_z &= U \frac{\pi}{a} \left[ \frac{n'^2 - n_2^2}{n'} (-1)^{n_2} \cos \frac{\pi n_1 z}{a} - \right. \\ &\quad \left. - 2n' (-1)^{n_1} \cos \frac{\pi n_2 z}{a} \right] \cos \Omega, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \mu U \frac{\pi^2}{a^2} \left[ (2n_1^2 - n_2^2 - n^2) \frac{n^2 - n_2^2}{n_1 n'} (-1)^{n_2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sin \frac{\pi n_1 z}{a} - 4n_2 n' (-1)^{n_1} \sin \frac{\pi n_2 z}{a} \right] \cos \Omega, \\ \sigma_{yy} &= \mu U \frac{\pi^2}{a^2} (2n_1^2 - n_2^2 + n^2) \times \\ &\quad \times \frac{n^2 - n_2^2}{n_1 n'} (-1)^{n_2} \sin \frac{\pi n_1 z}{a} \cos \Omega, \\ \sigma_{zz} &= \mu U \frac{\pi^2}{a^2} \left[ \frac{(n^2 - n_2^2)^2}{n_1 n'} (-1)^{n_2} \sin \frac{\pi n_1 z}{a} + \right. \\ &\quad \left. + 4n_2 n' (-1)^{n_1} \sin \frac{\pi n_2 z}{a} \right] \cos \Omega, \\ \sigma_{xz} &= -2\mu U \frac{\pi^2}{a^2} (n^2 - n_2^2) \times \\ &\quad \times \left[ (-1)^{n_2} \cos \frac{\pi n_1 z}{a} - (-1)^{n_1} \cos \frac{\pi n_2 z}{a} \right] \sin \Omega. \end{aligned} \tag{47}$$

Рассмотрим волну со следующими параметрами:

$$\begin{aligned} c &= \frac{c_1 c_2}{n'} \sqrt{\frac{n_2^2 - n_1^2}{c_1^2 - c_2^2}} + \Delta c; \quad \gamma = \frac{\pi}{a} n' + \Delta \gamma; \\ \omega &= \frac{\pi c_1 c_2}{a} \sqrt{\frac{n_2^2 - n_1^2}{c_1^2 - c_2^2}} + \Delta \omega, \end{aligned} \tag{48}$$

где

$$\Delta c \ll c_1; \quad \Delta \gamma \ll \frac{\pi}{a} n'; \quad \Delta \omega \ll \frac{\pi c_1}{a}. \tag{49}$$

Тогда, подставив эти значения в дисперсионное соотношение (10) и ограничиваясь малыми первого порядка, получаем

$$\begin{aligned} \frac{a}{\pi} \Delta \gamma &= \left[ 4 \frac{(c_1^2 - c_2^2)^3}{(n_2^2 - n_1^2)^2 c_1^4} n'^4 - c_2^2 \right] \times \\ &\quad \times \frac{n^2}{n_1^2 c_1 c_2} \sqrt{\frac{n_2^2 - n_1^2}{c_1^2 - c_2^2}} \Delta c, \end{aligned} \tag{50}$$

$$\Delta \omega = \frac{\pi}{a} \left[ \frac{4(c_1^2 - c_2^2)^2}{n_1^2 (n_2^2 - n_1^2) c_1^4} n'^2 - 1 \right] n'^3 \Delta c. \tag{51}$$

Как и в предыдущем случае, в точках, соответствующих внутренним волнам, линии дисперсионного соотношения также остаются гладкими и непрерывными.

Кроме рассмотренных диапазонов можно рассмотреть пограничные значения  $c = c_1$  и  $c = c_2$ . В этих случаях базовые уравнения меняют вид. Подробно рассматривать их решения не станем, скажем только, что волны с  $c = c_1$  не являются

внутренними, а случай  $c = c_2$  не соответствует дисперсионному соотношению, и решения не существует.

В итоге, обнаружены два семейства внутренних волн. В первом семействе фазовая скорость равна скорости Ламе (тип I). Во втором семействе фазовая скорость всех волн превышает  $c_1$  (тип II).

### СВОЙСТВО КРАТНОСТИ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

Сначала рассмотрим внутренние волны типа I.

Исходя из формул (25)–(28), видим, что частота волны индекса ( $n$ ) пропорциональна таким же характеристикам первой внутренней волны и отличается в  $n$  раз. Это же справедливо и для волнового числа.

Длина первой волны равна толщине пластины. Что касается более коротких волн, то волна индекса ( $n$ ) короче первой волны ровно в  $n$  раз.

Покажем, что волны типа II обладают тем же свойством. Пусть существует внутренняя волна с индексами ( $n_1, n_2$ ). Тогда рассмотрим волну с индексами  $n_1^* = kn_1, n_2^* = kn_2$ , где  $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$ . Вставим эти индексы в формулу ограничения индексов:

$$\frac{n_2^*}{n_1^*} = \frac{kn_2}{kn_1} = \frac{n_2}{n_1} > \frac{c_1}{c_2}. \tag{52}$$

Таким образом, волна ( $n_1^*, n_2^*$ ) удовлетворяет условиям внутренней волны типа II.

Исходя из (40), найдем фазовую скорость:

$$\begin{aligned} c^* &= \sqrt{\frac{k^2 n_2^2 - k^2 n_1^2}{k^2 n_2^2 / c_1^2 - k^2 n_1^2 / c_2^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{n_2^2 - n_1^2}{n_2^2 / c_1^2 - n_1^2 / c_2^2}} = c. \end{aligned} \tag{53}$$

Легко также показать, что из (41), (43), (44) получаем:

$$\gamma^* = k\gamma, \quad l^* = l/k, \quad \omega^* = k\omega. \tag{54}$$

Итак, если существует некоторая внутренняя волна с фазовой скоростью  $c$ , то существует бесконечный ряд внутренних волн с фазовой скоростью  $c$ , при этом частота и волновое число этих волн представляют арифметическую прогрессию. Индексы  $n_1$  и  $n_2$  первой волны в этом ряду должны быть взаимно простые (в противном случае, у них есть общий делитель, больший единицы, и поделив на него частоту, получим внутреннюю волну того же ряда, но с меньшей частотой). Все последующие волны в этом ряду имеют частоты, кратные частоте первой внутренней волне в этом ряду (то же справедливо и для волновых чисел).

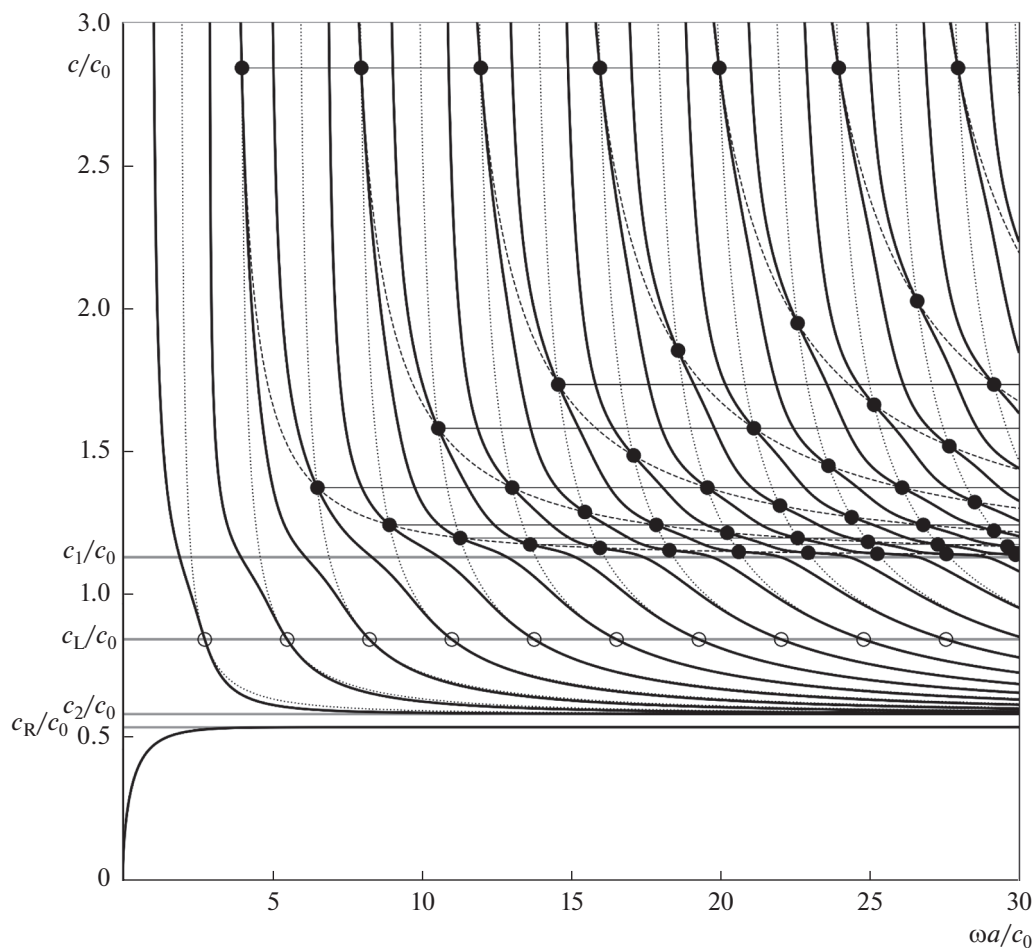


Рис. 1. Зависимость  $c/c_0$  от  $\omega a/c_0$  для  $\nu = 0.3$ , с отмеченными внутренними волнами.

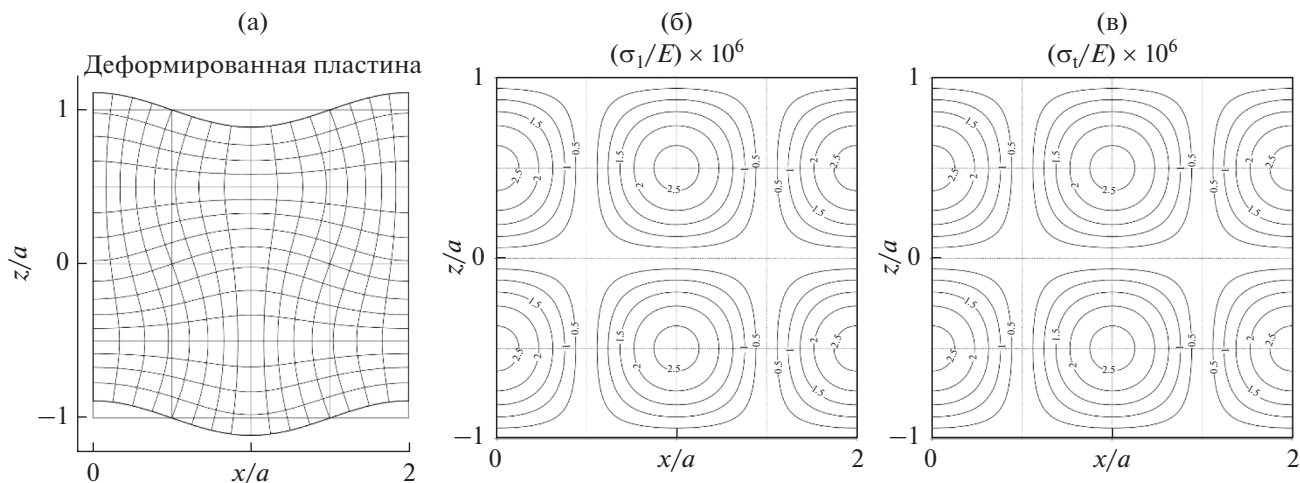


Рис. 2. (а) – Деформация пластины, (б) – максимальное растяжение и (в) – максимальный сдвиг для первой внутренней волны типа I.

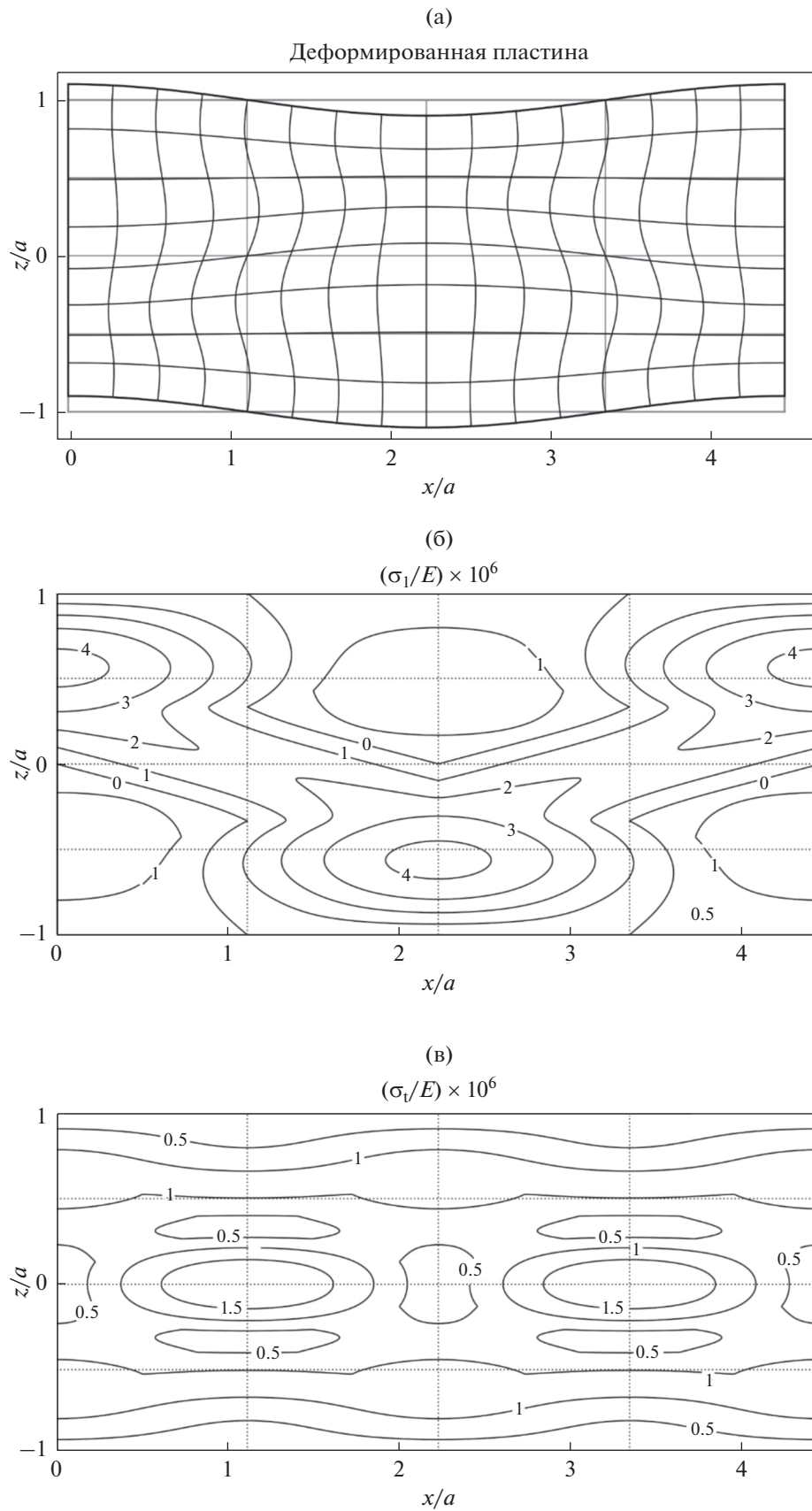


Рис. 3. (а) – Деформация пластины, (б) – максимальное растяжение и (в) – максимальный сдвиг для внутренней волны типа II с индексами (1, 2).



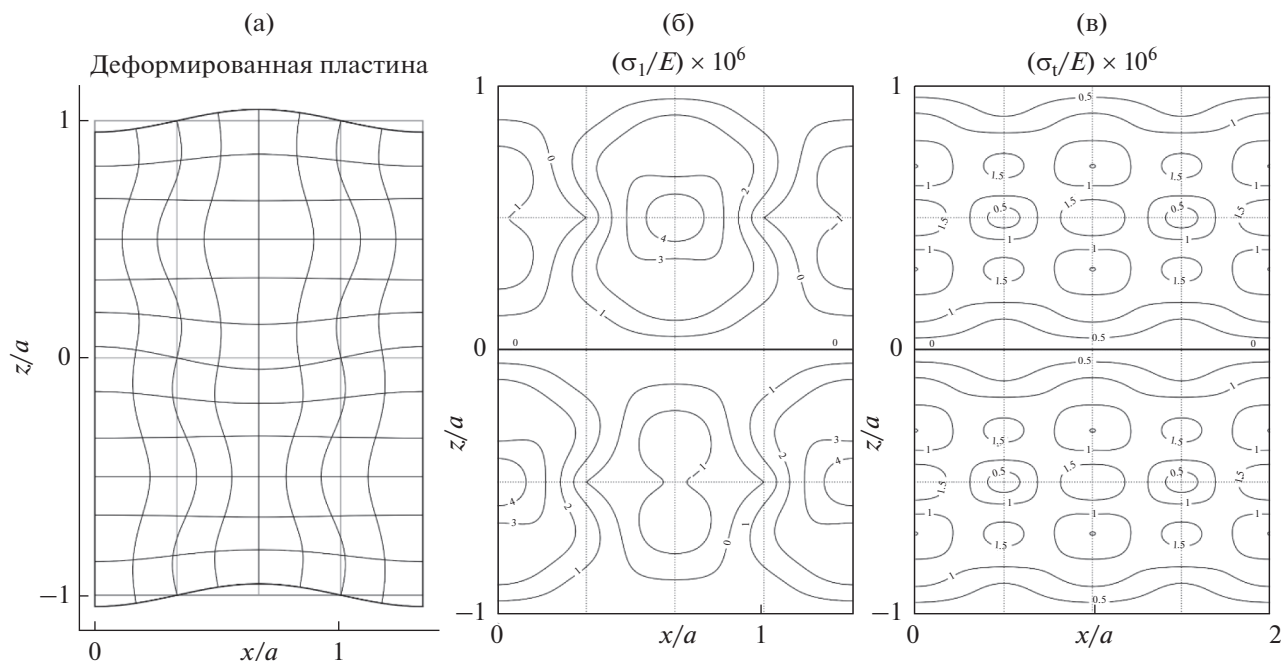


Рис. 4. (а) – Деформация пластины, (б) – максимальное растяжение и (в) – максимальный сдвиг для внутренней волны типа II с индексами (1, 3).

Это хорошо видно на следующем графике (рис. 1), где представлена зависимость безразмерной фазовой скорости  $c/c_0$  (ось ординат) от безразмерной круговой частоты  $\omega a/c_0$  (ось абсцисс) для  $\nu = 0.3$ .

Здесь жирные сплошные линии представляют собой решение дисперсионного соотношения (10): та линия, что ниже прямой “ $c_2/c_0$ ” (первый диапазон), соответствует фундаментальной моде, те, что выше (второй и третий диапазоны), соответствуют высшим модам.

Штриховые и пунктирные линии соответствуют семействам решений уравнений (37) и (38). Эти линии (а также линии мод) пересекаются в точках, соответствующих внутренним волнам: пустые кружки отмечают волны типа I, сплошные – волны типа II.

Горизонтальные тонкие сплошные линии связывают внутренние волны, относящиеся к одному ряду, т.е. имеющие одну фазовую скорость и частоты, кратные частоте волны, первой в ряду.

Как мы видим, фундаментальная мода антисимметричной волны Лэмба не имеет внутренних волн. Все внутренние волны находятся на модах высшего порядка.

Рассмотрим также напряженно-деформированное состояние некоторых внутренних волн: первую волну типа I (принадлежит первой моде высшего порядка), волны типа II с индексами (1, 2), (1, 3), (1, 4) (принадлежат третьей, четвертой и пятой модам высшего порядка соответственно). Па-

раметры пластины: полутолщина  $a = 1$  см, модуль Юнга  $E = 2$  ГПа,  $\nu = 0.3$  (такие значения упругих модулей характерны для сталей). Расчеты сделаны для смещений (в масштабе  $10^5$ ), максимального растяжения (первое главное напряжение) и максимального сдвига (напряжения вычислены по отношению к модулю Юнга, в масштабе  $10^6$ ). Амплитуды рассчитаны так, что удельная плотность энергии каждой из волн равна  $1$  Дж/м<sup>3</sup>.

На рис. 2 представлена первая волна типа I. Как видим, и максимальное растяжение, и максимальный сдвиг (здесь они равны друг другу) локализируются в четверти толщины пластины от поверхности.

Внутренние волны типа II (рис. 3, 4, 5) отличаются от волны типа I:

1. Точки локализации максимального растяжения здесь располагаются в шахматном порядке, а не симметрично, как в случае типа I.

2. Волны типа II имеют чередующиеся области всестороннего сжатия и растяжения, в то время как напряжения волны типа I находятся в состоянии чистого сдвига, о чем было упомянуто выше.

3. Распределение максимального сдвига внутренних волн обоих типов симметрично, но локализация (расстояние от поверхности) меняется от волны к волне, вплоть до расположения на срединной плоскости.

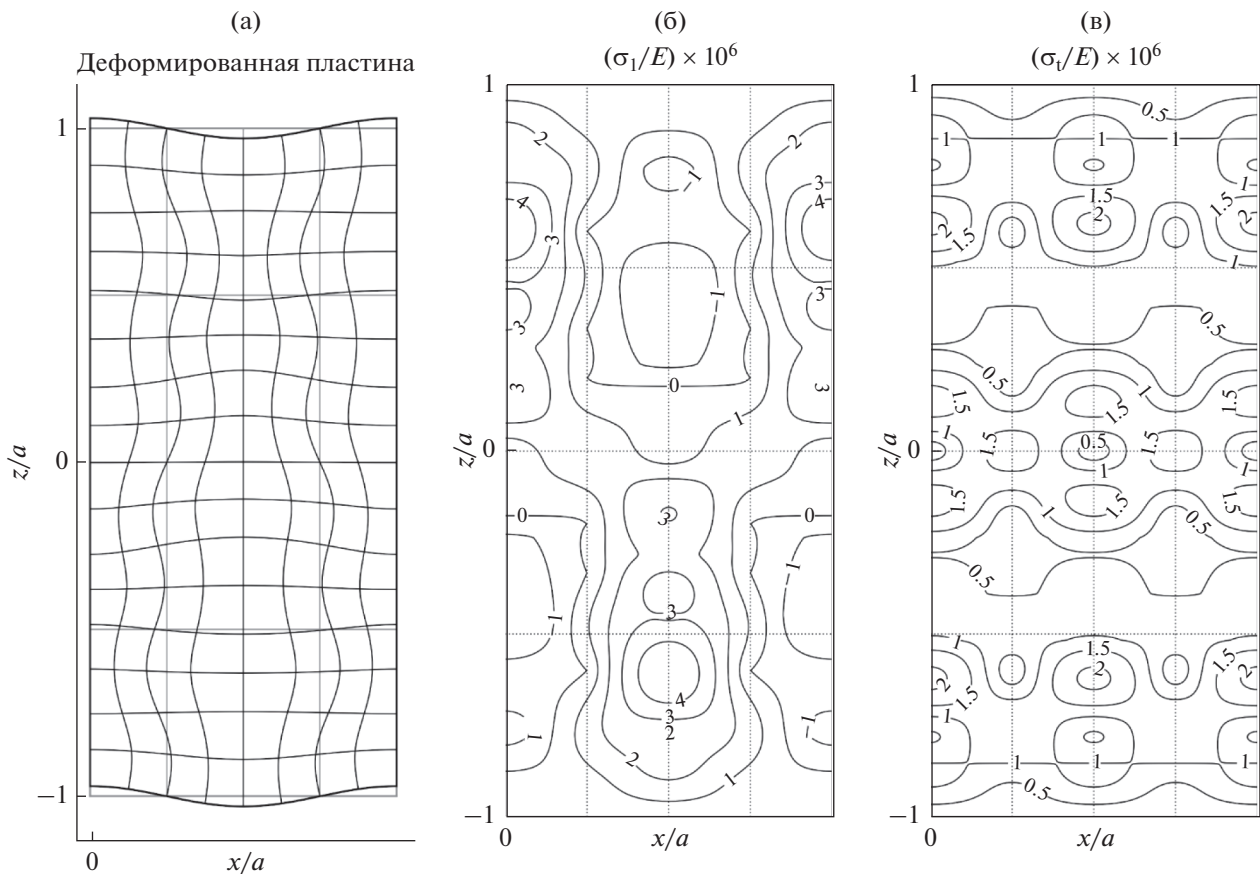


Рис. 5. (а) – Деформация пластины, (б) – максимальное растяжение и (в) – максимальный сдвиг для внутренней волны типа II с индексами (1, 4).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование антисимметричных решений волновых уравнений Лэмба показало, что существует класс решений, которые имеют нулевые деформации и напряжения на поверхности (для краткости такие решения здесь называются внутренними волнами Лэмба).

Обнаружено два типа внутренних волн. Тип I соответствует фазовой скорости Ламе. Частота и волновое число кратны частоте и волновому числу первой, самой длинной волны типа I. Длина первой волны равна толщине пластины. Кроме того, напряженно-деформированное состояние для волн типа I соответствует деформации чистого сдвига, т.е. объемная деформация равна нулю.

Тип II объединяет внутренние волны с различными фазовыми скоростями, превышающими  $c_1$  (скорость волны расширения в безграничной среде). Аналитически доказано, что внутренние волны с одной и той же фазовой скоростью формируют ряды, аналогичные ряду волн типа I. Таким же образом, частоты членов одного ряда кратны частоте первого члена ряда, это справедливо и для волновых чисел.

Внутренние волны типа I и типа II имеют ряд отличий. В частности, существует качественная разница в симметричности локализации максимального растяжения.

Возможность существования внутренних волн приводит к следующему выводу: поскольку все поверхностные деформации и напряжения внутренних волн равны нулю, контроль деформаций конструкции посредством поверхностных тензодатчиков в этом случае осложняется, что приводит к необходимости модернизировать имеющиеся методы неразрушающего контроля.

Исследование выполнено при финансовой поддержке в рамках Госзадания (№ государственной регистрации 123021700050-1) «Фундаментальные вопросы механики и оптимизации процессов деформирования, разрушения, износа и аддитивного роста элементов конструкций, работающих в нормальных и экстремальных условиях».

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Su Zh., Ye L. Identification of damage using Lamb waves. Berlin: Springer-Verlag, 2009. 357 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-84882-784-4>

2. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. 431 с.
3. Мокряков В.В. Напряжения симметричной волны Лэмба среднего диапазона. Исследование внутренней волны // Акуст. журн. 2022. Т. 68. № 2. С. 119–128.
4. Lamb H. On waves in an elastic plate // Proc. R. Soc. A. 1917. V. 93. P. 293–312.
5. Achenbach J.D. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1973. 431 p.
6. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. М.: Изд-во иностранной литературы, 1955. 194 с.
7. Graff K.F. Wave motion in elastic solids. New York: Dover, 1991. 649 p.
8. Кузнецов С.В. Волны Лэмба в анизотропных пластинах (обзор) // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 1. С. 90–100.
9. Huang T.T., Ren X., Zeng Y., Zhang Y., Luo C., Zhang X.Y., Xie Y.M. Based on auxetic foam: A novel type of seismic metamaterial for Lamb waves // Engng. Struct. 2021. V. 246. P. 112976. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112976>
10. Kuznetsov S.V. Cauchy formalism for Lamb waves in functionally graded plates // J. Vibr. Control. 2019. V. 25. № 6. P. 1227–1232. <https://doi.org/10.1177/1077546318815376>
11. Pyashenko A.V., Kuznetsov S.V. Lamb waves in functionally graded and laminated composites // J. Theor. Comp. Acoust. 2020. V. 28. № 3. P. 1950021. <https://doi.org/10.1142/S259172851950021X>
12. Ewing W.M., Jardetzky W.S., Press F. Elastic Waves in Layered Media. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1957. 390 p.
13. Alleyne D., Cawley P. The Interaction of Lamb Waves with Defects // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. 1992. V. 39. № 3. P. 381–397.
14. Alleyne D., Cawley P. The use of Lamb waves for the long range inspection of large structures // Ultrasonics. 1996. V. 34. P. 287–290.
15. Зверев А.Я., Черных В.В. Экспериментальное определение акустических и виброакустических характеристик многослойных композитных панелей // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 6. С. 727–736. <https://doi.org/10.1134/S0320791918060151>
16. Квашиин Г.М., Сорокин Б.П., Бурков С.И. Возбуждение поверхностных акустических волн и волн Лэмба на СВЧ в пьезоэлектрической слоистой структуре на основе алмаза // Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 1. С. 45–54. <https://doi.org/10.31857/S0320791921010020>
17. Муякишин С.И., Диденкулов И.Н., Вьюгин П.Н., Чернов В.В., Денисов Д.М. Исследование метода обнаружения и локализации неоднородностей в пластинах с использованием волн Лэмба // Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 3. С. 270–274. <https://doi.org/10.31857/S0320791921030114>
18. Микер Т., Мейтцлер А. Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинках // Физическая акустика. Т. 1. ч. А. / Под ред. Мэзона У. М.: Мир, 1966. С. 140–203.