

## НАПРЯЖЕНИЯ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ВОЛНЕ ПОХГАММЕРА–КРИ СРЕДНЕВОЛНОВОГО ДИАПАЗОНА

© 2022 г. В. В. Мокряков\*

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского  
Российской академии наук, пр.-т Вернадского 101, корп. 1, Москва, 119526 Россия

\*e-mail: mokr@ipmnet.ru

\*\*e-mail: euphil@gmail.com

Поступила в редакцию 08.07.2021 г.

После доработки 20.12.2021 г.

Принята к публикации 25.01.2022 г.

Аналитически рассмотрены осесимметричные волны Похгаммера–Кри, распространяющиеся вдоль упругого стержня круглого сечения. Рассмотрено напряженно-деформированное состояние стержня. Вычислены максимумы растягивающих и эквивалентных напряжений на оси и на поверхности стержня, получены их соотношения. Особое внимание уделено диапазону волн средней длины (одного порядка с радиусом стержня), проведено сравнение с коротковолновым и длинноволновым приближениями. Продемонстрировано, что некоторые волны Похгаммера–Кри обладают рядом уникальных свойств: их относительная длина волны не зависит от упругих модулей, отношение максимального осевого растяжения к максимальному поверхностному растяжению имеет наибольшее значение и также не зависит от упругих модулей, материал стержня находится в состоянии чистого сдвига. Показано, что описанные волны соответствуют классу волн Ламе.

*Ключевые слова:* волны Похгаммера–Кри, волны Ламе, упругость, круглый стержень, напряженно-деформированное состояние, коэффициент Пуассона

DOI: 10.31857/S0320791922030091

### ОБОЗНАЧЕНИЯ

$r, \theta, z$  – координаты цилиндрической системы координат;

$a$  – радиус стержня;

$\rho$  – плотность;

$E$  – модуль Юнга;

$\nu$  – коэффициент Пуассона;

$\lambda, \mu$  – параметры Ламе;

$\omega$  – круговая частота;

$\gamma$  – круговое волновое число;

$l$  – длина волны;

$\Omega = \gamma z - \omega t$  – фаза волны в точке  $z$  в момент  $t$ ;

$c = \omega/\gamma$  – фазовая скорость;

$c_0 = \sqrt{E/\rho}$  – скорость бесконечно длинных волн в бесконечном стержне;

$c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  – скорость волн расширения в бесконечной среде;

$c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$  – скорость волн сдвига в бесконечной среде;

$c_R$  – скорость волн Рэлея (поверхностных волн в полупространстве);

$J_n, I_n$  – функции Бесселя действительного и мнимого аргументов;

$u_i$  – компоненты вектора смещений;

$\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора деформаций;

$\Delta$  – первый инвариант тензора деформаций;

$\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;

$U$  – обобщенная амплитуда волны Похгаммера–Кри.

В формулах используются следующие сокращения:

$$h = \gamma\sqrt{c^2/c_1^2 - 1}, \quad \kappa = \gamma\sqrt{c^2/c_2^2 - 1};$$

$$H = c^2/c_1^2 - 1 = h^2/\gamma^2; \quad K = c^2/c_2^2 - 1 = \kappa^2/\gamma^2,$$

а также следующие соотношения:

$$c_1^2 = c_0^2 \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad c_2^2 = \frac{c_0^2}{2(1+\nu)};$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \rho(c_1^2 - 2c_2^2);$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = \rho c_2^2;$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\nu}{1-2\nu} = \frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 = \frac{K-1-2H}{H+1};$$

$$H = \frac{c^2(1+\nu)(1-2\nu)}{c_0^2(1-\nu)} - 1; \quad K = 2\frac{c^2}{c_0^2}(1+\nu) - 1.$$

ВВЕДЕНИЕ

Гармонические волны, распространяющиеся в стержнях (сплошных и полых) круглого сечения описываются уравнениями Погхаммера–Кри, которые впервые были получены в работах [1–3]. Решения уравнений были получены в последующих работах [4–16] и др., где были рассмотрены продольные осесимметричные, изгибные и крутильные моды.

Дальнейшее развитие задачи имеет несколько направлений: изменение геометрии (замена цилиндра на цилиндрическую полость, трубу или другую осесимметричную конструкцию), изменение свойств материала (замена упругого материала на упруго-вязкий, термоупругий), изменение распределения свойств конструкции (замена однородности на неоднородность, изотропности на анизотропность). В качестве примеров можно представить следующие недавние работы [17–24].

В исследовании напряженно-деформированных состояний (НДС) мод осесимметричных волн Погхаммера–Кри (ПК-волн) в работах [25, 26] показано, что максимумы растягивающих и эквивалентных [27] напряжений могут локализоваться не только на поверхности стержня, но и на его оси. Таким образом, может оказаться, что на оси стержня НДС уже удовлетворяет критериям разрушения (текучести и др., в зависимости от материала), и в то же время напряжения, определяемые по деформациям на поверхности, будут далеки от критических.

В представленной работе рассматриваются отношения максимальных напряжений (растягивающих и эквивалентных) на оси сплошного стержня и на его поверхности для ряда положительных значений коэффициента Пуассона. Также определяется длина волны, при которой отношения максимумов имеют наибольшее значение.

НАПРЯЖЕНИЯ СТЕРЖНЯ  
В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЛНАХ  
ПОГХАММЕРА–КРИ

В предыдущих работах [25, 26] получены выражения для НДС в осесимметричных волнах Погхаммера–Кри в следующем виде.

Смещения:

$$u_r = 2U\gamma^2 r \left[ (K-1) \frac{J_1(\kappa a) J_1(hr)}{\kappa a hr} + 2 \frac{J_1(ha) J_1(\kappa r)}{ha \kappa r} \right] \sin \Omega,$$

$$u_z = 2U\gamma \left[ (1-K) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} J_0(hr) + 2H \frac{J_1(ha)}{ha} J_0(\kappa r) \right] \cos \Omega. \tag{1}$$

Деформации:

$$\varepsilon_{rr} = 2U\gamma^2 H \left[ (K-1) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \left( J_0(hr) - \frac{J_1(hr)}{hr} \right) + 2 \frac{J_1(ha)}{ha} \left( J_0(\kappa r) - \frac{J_1(\kappa r)}{\kappa r} \right) \right] \sin \Omega,$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = 2U\gamma^2 H \left[ (K-1) \frac{J_1(\kappa a) J_1(hr)}{\kappa a hr} + 2 \frac{J_1(ha) J_1(\kappa r)}{ha \kappa r} \right] \sin \Omega,$$

$$\varepsilon_{zz} = 2U\gamma^2 \left[ (K-1) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} J_0(hr) - 2H \frac{J_1(ha)}{ha} J_0(\kappa r) \right] \sin \Omega,$$

$$\varepsilon_{rz} = 2Ur\gamma^3 H (K-1) \times \left[ \frac{J_1(\kappa a) J_1(hr)}{\kappa a hr} - \frac{J_1(ha) J_1(\kappa r)}{ha \kappa r} \right] \cos \Omega,$$

$$\Delta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} = 2U\gamma^2 (H+1) \times (K-1) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} J_0(hr) \sin \Omega.$$

Напряжения:

$$\sigma_{rr} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{rr}; \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{\theta\theta};$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{zz}; \quad \sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz},$$

$$\sigma_{rr} = 2\mu U\gamma^2 \left[ (K-1)^2 \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} J_0(hr) + 4H \frac{J_1(ha)}{ha} J_0(\kappa r) - 2H(K-1) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \times \right. \tag{3}$$

$$\left. \times \frac{J_1(hr)}{hr} - 4H \frac{J_1(ha) J_1(\kappa r)}{ha \kappa r} \right] \sin \Omega,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = & 2\mu U\gamma^2 \left[ (K-1-2H)(K-1) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} J_0(hr) + \right. \\ & + 2H(K-1) \frac{J_1(\kappa a)J_1(hr)}{\kappa a hr} + \\ & \left. + 4H \frac{J_1(ha)J_1(\kappa r)}{ha \kappa r} \right] \sin \Omega, \\ \sigma_{zz} = & 2\mu U\gamma^2 \left[ (K-1)(K+1-2H) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \times \right. \\ & \times \left[ J_0(hr) - 4H \frac{J_1(ha)}{ha} J_0(\kappa r) \right] \sin \Omega, \\ & \sigma_{rz} = 4U\mu r\gamma^3 H(K-1) \times \\ & \times \left[ \frac{J_1(\kappa a)J_1(hr)}{\kappa a hr} - \frac{J_1(ha)J_1(\kappa r)}{ha \kappa r} \right] \cos \Omega. \end{aligned} \quad (4)$$

Получено также дисперсионное соотношение для осесимметричных ПК-волн в следующем виде:

$$\begin{aligned} (K-1)^2 J_0(ha) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} + 4H \frac{J_1(ha)}{ha} J_0(\kappa a) - \\ - 2H(K+1) \frac{J_1(ha)J_1(\kappa a)}{ha \kappa a} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

#### АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СЛУЧАИ

Известны формы волн для длинноволнового ( $l \gg a$ ) и коротковолнового ( $l \ll a$ ) приближений.

В случае длинноволнового приближения ПК-волна стремится к плоской волне с фазовой скоростью  $c_0 = \sqrt{E/\rho}$  [7]. Здесь напряжения однородны по поперечному сечению стержня. Действительно, если  $l \rightarrow \infty$ , то  $\gamma \rightarrow 0$ . Так как  $\lim_{x \rightarrow 0} J_0(x) = 1$  и  $\lim_{x \rightarrow 0} (J_1(x)/x) = 1/2$ , то дисперсионное соотношение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} (K-1)^2 + 4H - H(K+1) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow c^2 [c^2 c_1^2 - c^2 c_2^2 - 3c_1^2 c_2^2 + 4c_2^4] = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Решение  $c = 0$  соответствует отсутствию волны. Второе решение ненулевое, и после замены  $c_1$  и  $c_2$  через  $c_0$  и  $\nu$ , получаем:

$$c^2 = c_2^2 \frac{3c_1^2 - 4c_2^2}{c_1^2 - c_2^2} = \frac{c_0^2}{1+\nu} \frac{1+2\nu+\nu^2}{1+\nu} = c_0^2. \quad (7)$$

Итак, доказано, что в длинноволновом приближении фазовая скорость равна  $c_0$ .

Смещения и напряжения находим аналогичным образом.

$$u_r = \frac{U\gamma^2 r c_0^2}{2 c_2^2} \sin \Omega = U\gamma^2 r (1+\nu) \sin \Omega, \quad (8)$$

$$u_z = U\gamma \left( 2 \frac{c_0^2}{c_1^2} - \frac{c_0^2}{c_2^2} \right) \cos \Omega = -2U\gamma \nu \frac{1+\nu}{1-\nu} \cos \Omega,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & \mu U\gamma^2 [(K-1)^2 + 2H - H(K-1)] \sin \Omega = \\ = & 2\mu U\gamma^2 \frac{1+\nu}{1-\nu} [2 - 2\nu^2 - 3 + 3\nu + 2 - \\ & - 4\nu - 1 + 2\nu - \nu + 2\nu^2] \sin \Omega = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = & \mu U\gamma^2 \times \\ \times & [(K-1)^2 - H(K-1) + 2H] \sin \Omega = \sigma_{rr} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\sigma_{zz} = \mu U\gamma^2 \frac{c_0^2}{c_2^2} \left[ \frac{c_0^2}{c_2^2} - 2 \frac{c_0^2}{c_1^2} \right] \sin \Omega = \quad (11)$$

$$= 4\mu U\gamma^2 \nu \frac{(1+\nu)^2}{1-\nu} \sin \Omega,$$

$$\sigma_{rz} = 0. \quad (12)$$

Как видно из полученных формул, в процессе распространения такой волны все поперечные сечения стержня остаются плоскими, однородно расширяясь и сжимаясь. Единственная ненулевая компонента напряжений – продольная ( $\sigma_{zz}$ ), ее распределение по любому поперечному сечению однородно.

В случае коротковолнового приближения главная мода имеет характер волны Рэлея: наибольшие смещения и напряжения локализуются на поверхности стержня, экспоненциально затухая к оси. Действительно, рассмотрим дисперсионное соотношение для фазовой скорости  $c < c_2 < c_1$  (фундаментальная мода). В этом случае  $h$  и  $\kappa$  становятся мнимыми, и бесселевы функции  $J$  заменяются функциями мнимого аргумента  $I$ :

$$J_0(ha) = I_0(|h|a); \quad \frac{J_1(ha)}{ha} = \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} \quad (13)$$

(для  $\kappa$  аналогично).

Тогда дисперсионное соотношение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \left( 2 - \frac{c^2}{c_2^2} \right)^2 I_0(|h|a) \frac{I_1(|\kappa|a)}{|\kappa|a} - \\ - 4 \left( 1 - \frac{c^2}{c_1^2} \right) \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} I_0(|\kappa|a) + \\ + 2 \left( 1 - \frac{c^2}{c_1^2} \right) \frac{c^2}{c_2^2} \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} \frac{I_1(|\kappa|a)}{|\kappa|a} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

При коротковолновом приближении  $\gamma a \gg 1$ . Как известно [27], для больших аргументов

$$I_n(x) \approx e^x / \sqrt{2\pi x}. \quad (15)$$

Тогда (14) преобразуется к виду

$$|h|a \left( 2 - \frac{c^2}{c_2^2} \right)^2 - 4|\kappa|a \left( 1 - \frac{c^2}{c_1^2} \right) + 2 \left( 1 - \frac{c^2}{c_1^2} \right) \frac{c^2}{c_2^2} = 0. \quad (16)$$

После раскрытия модулей и сокращения общих множителей, получаем

$$\left( 2 - \frac{c^2}{c_2^2} \right)^2 - 4\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}}\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}} + \frac{2c^2}{\gamma a c_2^2} \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}} = 0. \quad (17)$$

Последнее слагаемое стремится к нулю при  $\gamma \rightarrow \infty$ . В итоге приходим к уравнению

$$\left( 2 - \frac{c^2}{c_2^2} \right)^2 = 4\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}}\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}}. \quad (18)$$

Оно хорошо известно как дисперсионное соотношение для волны Рэлея. Его решение дает значение  $c = c_R$  – фазовую скорость волны Рэлея.

Аналогичным образом получим смещения (предполагается, что  $\gamma r \gg 1$ ):

$$u_r = \frac{U\gamma^2}{\pi(|h\kappa|a)^{3/2}\sqrt{r}} \left[ \left( \frac{c_R^2}{c_2^2} - 2 \right) e^{|\kappa|a+|h|r} + 2e^{h|a+|\kappa|r} \right] \sin \Omega, \\ u_z = \frac{-U\gamma}{\pi(|h\kappa|a)^{3/2}\sqrt{r}} \times \\ \times \left[ \left( \frac{c_R^2}{c_2^2} - 2 \right) |h| e^{|\kappa|a+|h|r} + 2|\kappa| \left( 1 - \frac{c_R^2}{c_1^2} \right) e^{h|a+|\kappa|r} \right] \cos \Omega. \quad (19)$$

Введем замену, означающую относительное расстояние до поверхности:

$$\delta = (r - a)/a, \quad r = a(1 + \delta). \quad (20)$$

Соответственно,

$$u_r = \frac{U\gamma^2 e^{(|\kappa|+|h|)a}}{\pi(|h\kappa|)^{3/2} a^2 \sqrt{1 + \delta}} \times \\ \times \left[ \left( \frac{c_R^2}{c_2^2} - 2 \right) e^{h|a\delta} + 2e^{|\kappa|a\delta} \right] \sin \Omega, \\ u_z = \frac{-U\gamma|h| e^{(|\kappa|+|h|)a}}{\pi(|h\kappa|)^{3/2} a^2 \sqrt{1 + \delta}} \times \\ \times \left[ \left( \frac{c_R^2}{c_2^2} - 2 \right) e^{h|a\delta} + 2\sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}}\sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}} e^{|\kappa|a\delta} \right] \cos \Omega. \quad (21)$$

Таким образом, при коротковолновом приближении в окрестности поверхности стержня структура ПК-волны аналогична структуре волны Рэлея, отличаясь общим коэффициентом.

### ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В СРЕДНЕВОЛНОВОМ ДИАПАЗОНЕ

Для контроля напряженно-деформированного состояния конструкции используются тензо-

датчики, закрепленные на поверхности конструкции. Как показано выше, в случае длинноволнового приближения внутренние напряжения в стержне равны поверхностным, в случае коротковолнового – внутренние напряжения ниже поверхностных, как и при волне Рэлея. Иначе говоря, в описанных случаях внутренние напряжения не превышают поверхностные, и применение поверхностных тензодатчиков достаточно, чтобы контролировать НДС стержневой структуры.

Можно было бы предположить, что последнее утверждение также справедливо и для средних волн. Однако в работе [26] продемонстрировано, что при распространении волны Погхаммера–Кри (фундаментальная мода) максимум напряжений (растягивающих или эквивалентных) может возникать и на оси стержня (отметим, что при расчетах распределения НДС в сечении стержня в рассмотренных случаях максимумы локализовались только на поверхности или оси, но это не означает, что в других случаях не могут быть обнаружены другие области локализации). В [26] для стального стержня было продемонстрировано, что на низких частотах максимальное растягивающее напряжение ( $\lesssim 1.3$  МГц) и максимальное эквивалентное напряжение ( $\lesssim 1.7$  МГц) локализуются на оси стержня. Было показано, что максимальное растягивающее напряжение на оси может быть в 3.164 раза больше, чем на поверхности, а максимальное эквивалентное напряжение – в 4.056 раза.

В данной работе рассмотрены отношения максимальных значений на оси и на поверхности стержня для растягивающих напряжений ( $R_T$ ) и для эквивалентных напряжений ( $R_{eq}$ ) при ряде значений коэффициента Пуассона  $\nu = 0.001, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.499$  (особые значения 0 и 0.5 исключены из диапазона и будут рассматриваться отдельно в следующем исследовании). Расчеты показали, что для каждого рассмотренного  $\nu$  существует длина волны (отдельно для растягивающего напряжения (рис. 1) и эквивалентного напряжения (рис. 2)), при которой максимумы на оси и на поверхности равны. Для более коротких волн максимум напряжений локализуется на поверхности стержня, для более длинных – на оси. Вычисленные распределения на краях диапазона соответствуют вышеописанному коротковолновому и длинноволновому приближениям.

Полученные распределения показывают, что существует особая волна с длиной волны  $l^* \approx 3.41a$ , для которой  $R_T \approx 3.16$  и  $R_{eq} \approx 2.74$  имеют постоянные значения независимо от значения  $\nu$  (при этом для  $R_T$  это наибольшее значение). Распределения максимальных значений растягивающего напряжения  $\sigma_l$  и эквивалентного напряжения  $\sigma_{eq}$  для  $l = l^*$  представлены на рис. 3 и 4. Штриховка

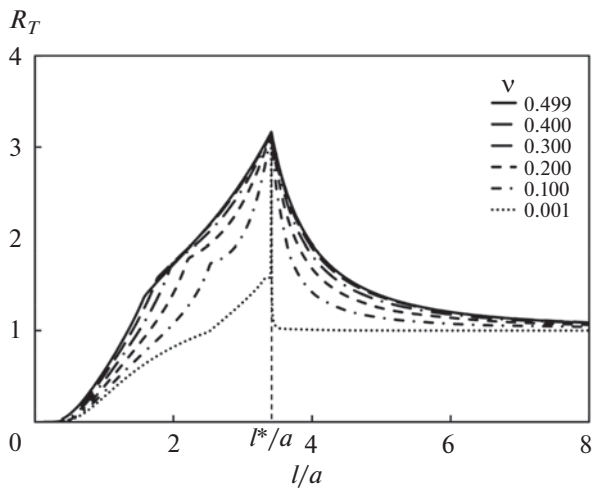


Рис. 1. Отношение максимальных растягивающих напряжений (фундаментальная мода).

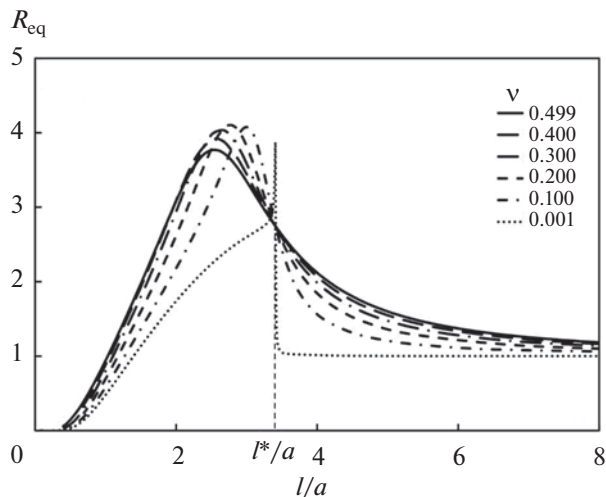


Рис. 2. Отношение максимальных эквивалентных напряжений (фундаментальная мода).

показывает область, где главным напряжением является  $\sigma_\theta$ .

Рассмотрим это явление подробнее. Сначала найдем напряжения на поверхности стержня ( $r = a$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}|_a = 2\mu U \gamma^2 & \left[ (K-1)^2 \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} J_0(ha) + \right. \\ & + 4H \frac{J_1(ha)}{ha} J_0(\kappa a) - \\ & \left. - 2H(K+1) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \frac{J_1(ha)}{ha} \right] \sin \Omega, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}|_a = 2\mu U \gamma^2 \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} & \left[ (K-1)(K-1-2H) \times \right. \\ & \left. \times J_0(ha) + 2H(K+1) \frac{J_1(ha)}{ha} \right] \sin \Omega, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}|_a = 2\mu U \gamma^2 & \left[ (K-1)(K+1-2H) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \times \right. \\ & \left. \times J_0(ha) - 4H \frac{J_1(ha)}{ha} J_0(\kappa a) \right] \sin \Omega, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\sigma_{rz} = 0. \quad (25)$$

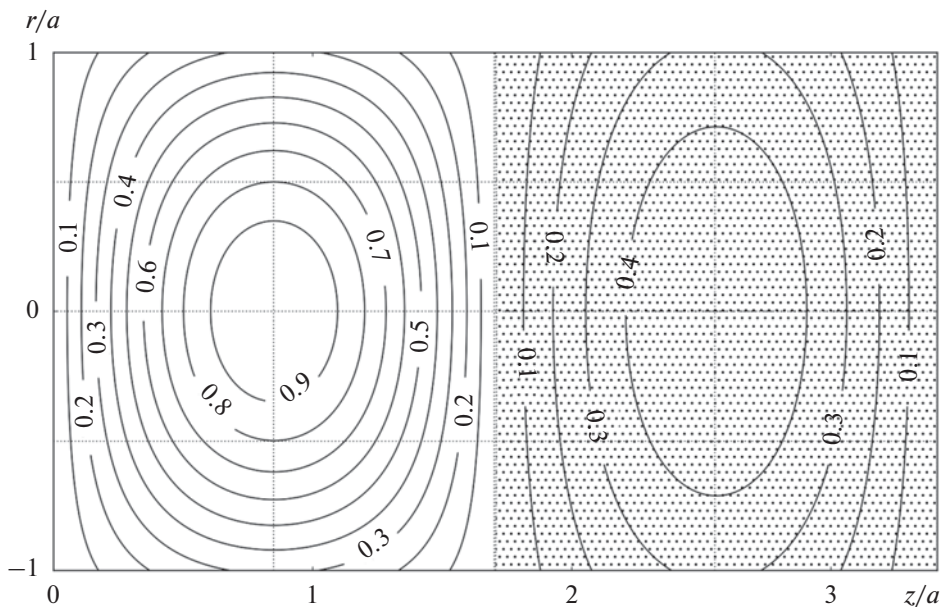


Рис. 3. Нормализованное первое главное напряжение  $\sigma_1$  для  $l = l^*$  (фундаментальная мода).

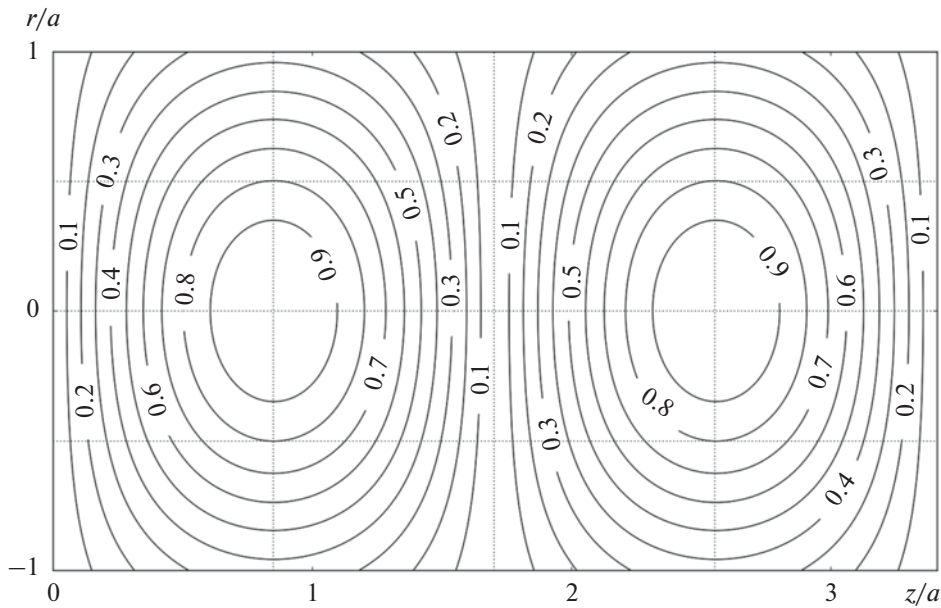


Рис. 4. Нормализованное эквивалентное напряжение  $\sigma_{eq}$  для  $l = l^*$  (фундаментальная мода).

Согласно граничным условиям (поверхность свободна от нагрузок),  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{rz}$  равны нулю (выражение в квадратных скобках в формуле  $\sigma_{rr}$  представляет собой левую часть дисперсионного соотношения, т.е. равно нулю).

Перепишем  $\sigma_{zz}$  и  $\sigma_{\theta\theta}$  с учетом дисперсионного соотношения:

$$\sigma_{\theta\theta}|_a = 2\mu U \gamma^2 \frac{J_1(ka)}{ka} \left[ (K-1)(K-1-2H) \times \right. \\ \left. \times J_0(ha) + 2H(K+1) \frac{J_1(ha)}{ha} \right] \sin \Omega, \quad (26)$$

$$\sigma_{zz}|_a = 2\mu U \gamma^2 \frac{J_1(ka)}{ka} \left[ 2(K-1)(K-H) J_0(ha) - \right. \\ \left. - 2H(K+1) \frac{J_1(ha)}{ha} \right] \sin \Omega. \quad (27)$$

Поскольку задача осесимметрична, то на поверхности  $\sigma_1$  равно либо  $\sigma_{zz}$ , либо  $\sigma_{\theta\theta}$ . Выпишем формулы для максимумов соответствующих компонент:

$$\max_{r=a} \sigma_{\theta\theta} = 2\mu U \gamma^2 \left| \frac{J_1(ka)}{ka} \right| \times \\ \times \left| (K-1)(K-1-2H) J_0(ha) + \right. \\ \left. + 2H(K+1) \frac{J_1(ha)}{ha} \right|, \quad (28)$$

$$\max_{r=a} \sigma_{zz} = 2\mu U \gamma^2 \left| \frac{J_1(ka)}{ka} \right| \times \\ \times \left| 2(K-1)(K-H) J_0(ha) - 2H(K+1) \frac{J_1(ha)}{ha} \right|. \quad (29)$$

Расчеты показывают, что фазовая скорость  $c^*$  особой волны находится в интервале  $c_2 < c^* < c_0$  для всех рассматриваемых  $\nu$ . При  $\nu > 0$  справедливо выражение  $c_1 > c_0$ , следовательно,  $c^* < c_1$  и  $H = c^{*2}/c_1^2 - 1 < 0$ . Отсюда  $h = \gamma\sqrt{H} = i\gamma\sqrt{|H|}$ . Таким образом, как и в формуле (13), получаем, что  $J_0(ha) = I_0(|h|a)$  и  $J_1(ha)/ha = I_1(|h|a)/|h|a$ .

С другой стороны,

$$c_2 < c^* < c_0 \Rightarrow c_2^2 < c^{*2} < 2(1+\nu)c_2^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 < c^{*2}/c_2^2 - 1 < 1 + 2\nu \Rightarrow 0 < K < 2. \quad (30)$$

Следовательно, на интересующем интервале  $ka \in \mathbb{R}$ .

Таким образом,  $\max \sigma_{zz}$  имеет следующий вид (все члены действительные):

$$\max_{r=a} \sigma_{\theta\theta} = 2\mu U \gamma^2 \left| \frac{J_1(ka)}{ka} \right| \times \\ \times \left| (K-1)(K-1+2|H|) I_0(|h|a) - \right. \\ \left. - 2|H|(K+1) \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} \right|, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \max_{r=a} \sigma_{zz} &= 2\mu U \gamma^2 \left| \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \right| \times \\ &\times \left| 2(K-1)(K+|H|) I_0(|h|a) + \right. \\ &\left. + 2|H|(K+1) \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} \right|. \end{aligned} \quad (32)$$

Перелом графиков на рис. 1 в точке наибольшего значения  $R_T$  означает, что здесь  $\max_{r=a} \sigma_{\theta\theta}$  и  $\max_{r=a} \sigma_{zz}$  равны.

Сделаем предположение, что  $J_1(\kappa a)/\kappa a = 0$ . Но тогда из дисперсионного соотношения получаем, что  $J_0(\kappa a)$  также должно быть равно нулю. Однако доказано (см., напр., [29]), что функции  $J_0$  и  $J_1$  общих корней не имеют. Следовательно,  $|J_1(\kappa a)/\kappa a| > 0$ . Тогда достаточно сравнить последние множители:

$$\begin{aligned} &\left| (K-1)(K-1+2|H|) I_0(|h|a) - \right. \\ &\left. - 2|H|(K+1) \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} \right| = \left| 2(K-1)(K+|H|) \times \right. \\ &\left. \times I_0(|h|a) + 2|H|(K+1) \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} \right|. \end{aligned} \quad (33)$$

Если  $|x| = |y|$ , то либо  $x = y$ , либо  $x = -y$ . Рассмотрим оба варианта.

Вариант I:

$$\begin{aligned} &(K-1)(K-1+2|H|) I_0(|h|a) - 2|H|(K+1) \times \\ &\times \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} - 2(K-1)(K+|H|) I_0(|h|a) - \\ &- 2|H|(K+1) \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow &(K+1) \left[ (K-1) I_0(|h|a) + 4|H| \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} \right] = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Если предположить, что  $K+1 = 0$ , то получаем:

$$K+1 = c^2/c_2^2 = 0 \Rightarrow c = 0, \quad (35)$$

т.е. в данном случае волны просто нет.

Если же приравнять другой множитель нулю, то получим уравнение относительно фазовой скорости. Его решение можно получить численно, и оно не соответствует особой волне.

Вариант II:

$$\begin{aligned} &(K-1)(K-1+2|H|) I_0(|h|a) - \\ &- 2|H|(K+1) \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} + 2(K-1)(K+|H|) \times \\ &\times I_0(|h|a) + 2|H|(K+1) \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow &(K-1)(3K-1+4|H|) I_0(|h|a) = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

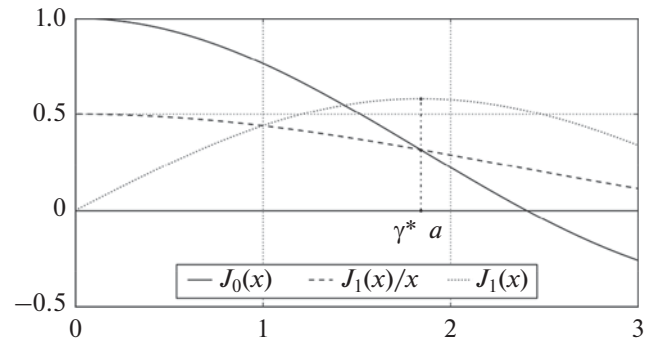


Рис. 5. Расчет значения  $\gamma^* a$  для фундаментальной моды.

Множитель  $I_0(|h|a)$  положителен и не может быть корнем. Рассмотрим второй множитель:

$$3K-1+4|H| = 3 \frac{c^2}{c_2^2} - 4 \frac{c^2}{c_1^2} = 2 \frac{(1+\nu)^2 c^2}{1-\nu c_0^2}. \quad (37)$$

Как видим, при  $\nu > 0$  есть только один корень  $c = 0$ , т.е. волны также нет.

Наконец, рассмотрим первый множитель:

$$K-1 = 0 \Rightarrow c = c_2 \sqrt{2}. \quad (38)$$

В данном случае

$$\kappa = \gamma \sqrt{c^2/c_2^2 - 1} = \gamma. \quad (39)$$

Дисперсионное соотношение приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} &4H \frac{J_1(ha)}{ha} J_0(\gamma a) - 4H \frac{J_1(ha)}{ha} \frac{J_1(\gamma a)}{\gamma a} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow &4H \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} \left( J_0(\gamma a) - \frac{J_1(\gamma a)}{\gamma a} \right) = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

и имеет единственный ненулевой множитель

$$J_0(\gamma a) - J_1(\gamma a)/\gamma a = 0. \quad (41)$$

Отметим, что в полученном выражении отсутствуют модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Преобразуем это выражение:

$$\begin{aligned} &J_0(\gamma a) - J_1(\gamma a)/\gamma a = \\ &= (J_0(\gamma a) - J_2(\gamma a))/2 = J_1'(\gamma a) = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Таким образом, корни этого уравнения соответствуют экстремумам  $J_1(\gamma a)$ . Первый экстремум  $\gamma^* a \approx 1.841184$  (см. рис. 5) соответствует вышеуказанной особой волне с длиной  $l^*/a = 2\pi/\gamma^* a \approx 3.413$ .

Выражения для фазовой скорости и частоты имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} c^* &= c_2 \sqrt{2} = c_0 / \sqrt{1+\nu}, \\ \omega^* &= c^* \gamma^* = c_0 \gamma^* / \sqrt{1+\nu}. \end{aligned} \quad (43)$$

Отметим, что фазовая скорость, равная  $c_2\sqrt{2}$ , имеет название скорости Ламе, и волны Похгаммера–Кри и Лэмба, имеющие такую фазовую скорость, называют волнами Ламе (см. напр. [30]).

В отличие от длины волны, фазовая скорость и частота зависят от упругих модулей. Например, для стального стержня ( $a = 1$  см,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $E = 200$  ГПа,  $\nu = 0.3$ ) получим  $c_0 = \sqrt{E/\rho} = 5.064$  км/с;  $c^* = 4.44$  км/с;  $\omega = 0.818$  МГц.

Вычислим отношения  $R_T$  и  $R_{eq}$  для найденного  $\gamma^*a$  для фундаментальной моды. Напряжения на оси стержня ( $r = 0$ ):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}|_0 = \sigma_{\theta\theta}|_0 &= 2\mu U \gamma^{*2} \times \\ &\times \left[ (K-1)(K-1-H) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} + 2H \frac{J_1(ha)}{ha} \right] \sin \Omega, \\ \sigma_{zz}|_0 &= 2\mu U \gamma^{*2} \times \\ &\times \left[ (K-1)(K+1-2H) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} - 4H \frac{J_1(ha)}{ha} \right] \sin \Omega, \\ \sigma_{rz}|_0 &= 0. \end{aligned} \quad (44)$$

При  $K = 1$  получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}|_0 = \sigma_{\theta\theta}|_0 &= 4\mu U \gamma^{*2} H \frac{J_1(ha)}{ha} \sin \Omega^*; \\ \sigma_{zz}|_0 &= -8\mu U \gamma^{*2} H \frac{J_1(ha)}{ha} \sin \Omega^*; \\ \Omega^* &= \gamma^*z - \omega t. \end{aligned} \quad (45)$$

Максимум растягивающих напряжений равен:

$$\max \sigma_{I}|_0 = \max \sigma_{zz}|_0 = 8\mu U \gamma^{*2} |H| \frac{I_1(|h|a)}{|h|a}. \quad (46)$$

Используя (31), (32), получаем  $R_T$ :

$$R_T = \frac{\max_{r=0} \sigma_I}{\max_{r=a} \sigma_I} = \frac{\gamma^*a}{J_1(\gamma^*a)} = \frac{1}{J_0(\gamma^*a)} \approx 3.164. \quad (47)$$

Как мы видим,  $R_T$  для найденного  $\gamma^*a$  не зависит от упругих модулей.

Рассмотрим  $R_{eq}$ . Эквивалентное напряжение имеет вид [27]:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2]} + 3\sigma_{rz}. \quad (48)$$

На поверхности стержня ( $r = a$ ):

$$\sigma_{eq}|_a = \sqrt{(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + \sigma_{\theta\theta}\sigma_{zz}}. \quad (49)$$

Для найденного  $\gamma^*a$  напряжения имеют следующие выражения:

$$\sigma_{\theta\theta}|_a = 8\mu U \gamma^{*2} H \frac{J_1(ha) J_1(\gamma^*a)}{ha \gamma^*a} \sin \Omega^*, \quad (50)$$

$$\sigma_{zz}|_a = -8\mu U \gamma^{*2} H \frac{J_1(ha) J_1(\gamma^*a)}{ha \gamma^*a} \sin \Omega^*. \quad (51)$$

Отсюда получаем

$$\max_{r=a} \sigma_{eq} = 8\sqrt{3}\mu U \gamma^{*2} |H| \frac{I_1(|h|a) J_1(\gamma^*a)}{|h|a \gamma^*a}. \quad (52)$$

На оси стержня ( $r = 0$ ):

$$\sigma_{eq} = |\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}|. \quad (53)$$

Для найденного  $\gamma^*a$  для напряжений получаем:

$$\sigma_{rr}|_0 = \sigma_{\theta\theta}|_0 = 4\mu U \gamma^{*2} H \frac{J_1(ha)}{ha} \sin \Omega^*; \quad (54)$$

$$\sigma_{zz}|_0 = -8\mu U \gamma^{*2} H \frac{J_1(ha)}{ha} \sin \Omega^*.$$

Тогда

$$\max_{r=0} \sigma_{eq} = 12\mu U \gamma^{*2} |H| \frac{I_1(|h|a)}{|h|a}. \quad (55)$$

В итоге  $R_{eq}$ :

$$R_{eq} = \frac{\max_{r=0} \sigma_{eq}}{\max_{r=a} \sigma_{eq}} = \frac{\gamma^*a\sqrt{3}}{2J_1(\gamma^*a)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{J_0(\gamma^*a)} \approx 2.74. \quad (56)$$

Как и  $R_T$ ,  $R_{eq}$  для найденного  $\gamma^*a$  не зависит от  $\nu$ .

В дополнение к вышесказанному, отметим, что для  $\gamma = \gamma^*$ :

$$\begin{aligned} \Delta &= 2U \gamma^{*2} (H+1)(K-1) \times \\ &\times \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} J_0(hr) \sin \Omega^* = 0. \end{aligned} \quad (57)$$

Это означает, что в условиях особой волны материал стержня во всех точках находится в состоянии чистого сдвига (что также является характерным свойством волн Ламе).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Расчеты отношений  $R_T$  и  $R_{eq}$  для осесимметричных волн Похгаммера–Кри при положительном коэффициенте Пуассона показывают, что в средневолновом диапазоне ( $0.1 < l^*/a < 10$ ) осевые напряжения могут превышать поверхностные в несколько раз. Необходимо учитывать этот эффект при контроле напряжений стержневых конструкций посредством поверхностных тензодатчиков.



Аналитически доказано, что волны, фазовые скорости которых соответствуют скорости Ламе ( $c^* = c_2\sqrt{2}$ ), имеют ряд особенностей:

1. Длина волны относительно радиуса стержня не зависит от упругих модулей (для фундаментальной моды  $l^*/a \approx 3.413$ );

2. Отношение максимального осевого растяжения к максимальному поверхностному растяжению здесь достигает наибольшего значения, независимого от упругих модулей; для фундаментальной моды  $R_T \approx 3.164$ ;

3. Отношение максимального осевого эквивалентного напряжения к максимальному поверхностному эквивалентному напряжению также не зависит от упругих модулей (хотя его значение не наибольшее); для фундаментальной моды  $R_{\text{eq}} \approx 2.74$ ;

4. Материал в данном случае находится в состоянии чистого сдвига.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00100.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pochhammer L.* Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder // *J. Reine Angew. Math.* 1876. V. 81. S. 324–336.
2. *Chree C.* Longitudinal vibrations of a circular bar // *Quart. J. Pure Appl. Math.* 1886. V. 21. P. 287–298.
3. *Chree C.* The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solutions and applications // *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 1889. V. 14. P. 250–309.
4. *Field G.S.* Velocity of sound in cylindrical rods // *Canadian J. Research.* 1931. V. 5. P. 619–624.
5. *Shear S.K., Focke A.B.* The dispersion of supersonic waves in cylindrical rods of polycrystalline silver, nickel, and magnesium // *Phys. Rev.* 1940. V. 57. P. 532–537.
6. *Hudson G.E.* Dispersion of elastic waves in solid circular cylinders // *Phys. Rev.* 1943. V. 63. P. 46–51.
7. *Кольский Г.* Волны напряжения в твердых телах. М.: Изд-во иностранной литературы, 1955. 194 с.
8. *Redwood M., Lamb J.* On propagation of high frequency compressional waves in isotropic cylinders // *Proc. Phys. Soc. Section B. London.* 1957. V. 70. № 1. P. 136–143.
9. *Onoe M., McNiven H.D., Mindlin R.D.* Dispersion of axially symmetric waves in elastic rods // *Trans. ASME J. Appl. Mech.* 1962. V. 29. P. 729–734.
10. *Hutchinson J.R., Percival C.M.* Higher modes of longitudinal wave propagation in thin rod // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1968. V. 44. P. 1204–1210.
11. *Zemanek J.* An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1972. V. 51. P. 265–283.
12. *Nowinski J.L.* On a nonlocal theory of longitudinal waves in an elastic circular bar // *Acta Mech.* 1984. V. 52. P. 189–200.
13. *Graff K.F.* Wave motion in elastic solids. New York: Dover, 1991. 692 p.
14. *Abramson H.N.* Flexural waves in elastic beams of circular cross section // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1957. V. 29. P. 1284–1286.
15. *Pao Y.-H., Mindlin R.D.* Dispersion of flexural waves in an elastic, circular cylinders // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1960. V. 27. P. 513–520.
16. *Ковалев В.А., Радаев Ю.Н.* Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратовского Университета, 2010. 340 с.
17. *Ватутлян А.О., Юров В.О.* Численное и асимптотическое решение задачи о колебаниях неоднородного волновода с кольцевой трещиной конечной ширины // *Акуст. журн.* 2020. Т. 66. С. 467–474.
18. *Cerv J., Adamek V., Vales F., Gabriel D., Plesek J.* Wave motion in a thick cylindrical rod undergoing longitudinal impact // *Wave Motion.* 2016. V. 66. P. 88–105.
19. *Муравьева О.В., Ленков С.В., Мурашов С.А.* Крутильные волны, возбуждаемые электромагнитно-акустическими преобразователями, при акустическом волноводном контроле трубопроводов // *Акуст. журн.* 2016. Т. 62. № 1. С. 117–124.
20. *Garcia-Sanchez D., Déglise S., Thomas J.-L., Atkinson P., Lagoin C., Perrin B.* Acoustic confinement in superlattice cavities // *Phys. Rev. A.* 2016. V. 94. P. 033813–1–033813-6.
21. *Othman R.* A fractional equation to approximate wave dispersion relation in elastic rods // *Strain.* 2017. V. 53. № 4. e12228. P. 1–10.
22. *Li Zh., Jing L., Murch R.* Propagation of monopole source excited acoustic waves in a cylindrical high-density polyethylene pipeline // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2017. V. 142. P. 3564–3579.
23. *Zima B., Rucka M.* Guided ultrasonic waves for detection of debonding in bars partially embedded in grout // *Constr. Build. Mat.* 2018. V. 168. P. 124–142.
24. *Кузнецов С.В., Ильяшенко А.В.* Поляризация волн Похгаммера–Кри: аксиально симметричные продольные моды // *Акуст. журн.* 2018. Т. 64. № 6. С. 657–663.
25. *Мокряков В.В.* Maxima of the stresses in the longitudinal Pochhammer – Chree waves // *Mech. Solids.* 2019. V. 54. № 7. P. 1063–1075.
26. *Мокряков В.В.* Maximal stresses of the longitudinal Pochhammer – Chree waves // *Proc. Struct. Integrity.* 2019. V. 23. P. 143–148.
27. *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974. 318 с.
28. *Грэй Э., Мэтьюз Г.Б.* Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М.: Изд. иностранной литературы, 1949. 388 с.
29. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: Изд. иностранной литературы, 1949. 798 с.
30. *Микер Т., Мейтцлер А.* Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинках. Физическая акустика / под ред. Мэзона У. М.: Мир, 1966. С. 140–203.