АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2020, том 66, № 4, с. 453–462

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ

УДК 544.638+534.1

О МЕТОДЕ ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ОСНОВАННОМ НА ЭЛЕКТРОКИНЕТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЯХ

© 2020 г. Б. П. Шарфарец[a], *, В. Е. Курочкин[a], **, В. А. Сергеев[b], Ю. В. Гуляев[c]

[a]Институт аналитического приборостроения Российской академии наук, ул. Ивана Черных 31–33, Санкт-Петербург, 198095 Россия

[b]АО “АКВАМАРИН”, Баррикадная ул. 17, Санкт-Петербург, 198097 Россия

[c]Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова Российской академии наук, ул. Моховая 11, стр. 7, Москва, 125009 Россия

*e-mail: sharb@mail.ru

**e-mail: lavrovas@yandex.ru

Поступила в редакцию 04.09.2019 г.
После доработки 16.12.2019 г.
Принята к публикации 24.12.2019 г.

Предложены в линейном и нелинейном приближении (ламинарный режим) физическая и математическая модели для описания механизма функционирования нового вида акустического преобразователя. Кратко даны сведения о таком электрокинетическом явлении, как электроосмос. Приведены необходимые уравнения для описания акустических полей, вызываемых электрокинетическими явлениями: наличием двойного электрического слоя и приложенного суммарного электрического поля, состоящего из постоянного поля и поля, несущего акустическую информацию. Уравнения рассматриваются для жидкости в круговом цилиндрическом капилляре применительно к расчету гидродинамики стационарного электроосмотического процесса и гармонического акустического процесса. Теоретически, на вычислительной модели и экспериментально показано, что учет нелинейности стационарного процесса приводит, в отличие от линейного стационарного процесса, к перекачке энергии постоянного электрического поля в акустическое поле, вызываемого переменным электрическим полем. Полученные результаты при некоторых ограничениях верны для широкого класса пористых структур. Экспериментально для бумажной мембраны в качестве капиллярно-пористой структуры с помощью накачки получено усиление первой гармоники акустического давления от 5.9 до 28 раз для различных значений амплитуды переменного электрического поля. Полученные в работе теоретические и экспериментальные результаты позволяют решить приоритетную научно-техническую проблему проектирования и создания акустических излучателей нового типа.

Ключевые слова: электроакустическое преобразование, линейный и нелинейный режим течения жидкости, электрокинетические явления, гидродинамика электроосмоса, акустика электроосмоса, накачка энергии

DOI: 10.31857/S0320791920030053

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] предложен оригинальный способ электроакустического преобразования, основанный на подходе, заключающемся в том, что к пористому телу, заполненному жидкостью или газом, подается сумма постоянного напряжения и переменного напряжения, связанного с амплитудой акустического сигнала. Этот подход отличается от стандартного электрокинетического преобразования, основанного на явлении электроосмоса и изложенного, например, в работе [2] или обзорах [3, 4] (см., также библиографию в этих работах), тем, что существенную роль в электроакустическом преобразовании играет обязательное наличие наряду с переменной (акустической) составляющей прикладываемого к жидкости напряжения еще и постоянного напряжения (называемого в дальнейшем напряжением накачки). Причиной накачки, как будет показано в работе, является нелинейность возникающей гидродинамической части задачи. Аналогичные явления возникают при изучении нелинейных течений жидкости вблизи диэлектрических и идеально поляризованных частиц при воздействии на них внешнего электрического поля [5], но в этом случае нелинейность возникает в электрической части физической модели проблемы.

Отметим, что отдаленно похожие процессы в смысле одновременного воздействия постоянных и переменных магнитных или электрических полей описаны в работах [6, 7]. Так, при создании магнитогидродинамического генератора псевдозвука, описанного в работе [6], показано, что при возбуждении в некотором объеме периодических движений проводящей жидкости, помещенной в постоянное магнитное поле, при прохождении через эту жидкость переменного тока возникают звуковые волны вследствие отражения от границ объема псевдозвуковых течений, возбуждаемых МГД генератором. Течение жидкости при этом рассмотрено в рамках линейной системы уравнений Эйлера. В работе [7] описан вибрационный преобразователь, вынуждающее усилие в котором создается системой катушек с переменным током, магнитное поле которых поляризуется полем постоянных магнитов и взаимодействует с индуцированными в системе токами.

Приведенное в [1] описание принципа действия преобразователя никак не увязано с электрогидродинамикой (ЭГД), предметом которой является данная проблематика. Кроме того, никак не учтено такое электрокинетическое явление, как электроосмос, неизбежно возникающий при подаче разности потенциалов к пористому телу, наполненному жидкостью, где на границе раздела фаз имманентно присутствует двойной электрический слой (ДЭС), в котором нарушается электронейтральность жидкости.

В настоящей работе подробно излагаются детали, предложенных кратко в [8] физической и математической моделей, описывающих принцип действия этого электроакустического преобразователя на примере одиночного цилиндрического капилляра, заполненного жидкостью. Уравнения движения жидкости здесь рассматриваются и на основе линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса, изложенной в [8], и на основе ее нелинейной версии применительно к ламинарному движению жидкости.

Учитывая пограничный характер научных явлений, лежащих в основе принципа действия рассматриваемого акустического преобразователя, целесообразно изложить основные положения такой неакустической дисциплины, как электроосмос.

СТАЦИОНАРНЫЙ ЭЛЕКТРООСМОС

К настоящему времени теория стационарного электроосмоса устоялась и опубликована в солидном количестве источников, из которых упомянем работы [9–11]. Электроосмос является одним из электрокинетических явлений, т.е. явлений, происходящих в системах, содержащих капилляры или пористые мембраны, размещенные в электролите при наложении электрического поля, и обратных им эффектов [12, с. 534]. Основную роль в электрокинетических явлениях играет ДЭС, формирующийся на границе раздела фаз, одна из которых должна обязательно быть жидкой или газообразной, и его поляризация. Таким образом, электроосмос – это движение жидкости (газа) через капилляры или пористые среды при наложении внешнего электрического поля. В силу различных причин безотносительно к тому, присутствует или нет внешний электрический потенциал, на поверхности раздела твердой и жидкой (газообразной) фаз образуется ДЭС (см., например, [9, глава 1; 10, глава 7]). На поверхности твердой фазы образуется слой потенциал-определяющих ионов одного знака, имеющий молекулярные размеры. Вследствие законов электростатики противоионы в жидкости при контакте с твердой фазой притягиваются к твердой границе; ионы жидкости, заряженные одноименно заряду границы, отталкиваются от границы. Часть противоионов (адсорбционная плотная, неподвижная часть ДЭС) остаются неподвижными даже при движении жидкости. Остальные противоионы и коионы остаются подвижными и образуют подвижную (диффузную) часть ДЭС. Область, где касаются адсорбционный и диффузный слои, называется поверхностью скольжения, которая получается несколько отодвинутой от реальной границы. Диффузный слой имеет толщину, равную дебаевской длине λ_D. Подвижная часть ДЭС за небольшое время переходного процесса приходит к стационарной концентрации. Концентрации противоионов и коионов в ДЭС и значение образовавшегося распределения электрического потенциала φ в ДЭС связаны между собой распределением Больцмана [9, с. 15]. Потенциал φ вектора электрической напряженности является электрической характеристикой ДЭС. Выделяют несколько характерных потенциалов, важнейшим из которых является электрокинетический потенциал (дзета-потенциал или ζ-потенциал; во избежание путаницы в обозначениях с динамической вязкостью дзета-потенциал далее обозначаем $\tilde{\zeta}$), соответствующий поверхности скольжения. Часть диффузного слоя не является электронейтральной, что в конечном итоге и приводит к движению жидкости под воздействием стороннего электрического поля, т.е. к явлению электроосмоса.

В ДЭС формируется электростатическое поле, электрический потенциал φ которого при заданном распределении свободных зарядов удовлетворяет уравнению Пуассона [9, с. 16; 10, с. 220]

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho_{el}}{\varepsilon\varepsilon_0} \text{ (в СИ)}, \quad \Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho_{el}}{\varepsilon} \text{ (в СГСЭ)}. \quad (1)$$

Здесь ε_0 – электрическая постоянная; ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды; ρ_{el} – объемная плотность электрического заряда. В случае, когда тепловая энергия превосходит электрическую энергию [10, с. 97; 11, с. 147] $Ze\tilde{\zeta} \ll k_B T$ (Z – заряд иона в единицах заряда протона; k_B – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура; e – элементарный электрический заряд (заряд протона)), уравнение (1) переходит в линейное уравнение Дебая–Хюккеля $\Delta\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda_D^2}\varphi(\mathbf{r})$. Длина Дебая определяется выражением [10, с. 97; 11, с. 147] $\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 k_B T}{2(Ze)^2 c_0}}$, где c_0 – равновесная концентрация ионов вне ДЭС. Решение $\varphi(\mathbf{r})$, полученное из уравнения Дебая–Хюккеля, позволяет рассчитать объемную плотность электрического заряда ρ_{el} из уравнения (1), например, в СИ в виде $\rho_{el} = -\varepsilon\varepsilon_0\Delta\varphi$.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ. ЛИНЕЙНЫЙ СЛУЧАЙ

Поскольку здесь рассматриваются акустические процессы, закон сохранения импульса принимаем в виде уравнения Навье–Стокса для движения вязкой сжимаемой однородной жидкости [13, с. 73]

$$\rho_\Sigma\left(\frac{\partial \mathbf{v}_\Sigma}{\partial t} + (\mathbf{v}_\Sigma\nabla)\mathbf{v}_\Sigma\right) = -\nabla p_\Sigma + \eta\Delta\mathbf{v}_\Sigma + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\nabla\nabla\mathbf{v}_\Sigma + \rho_{el}\mathbf{E}_\Sigma. \quad (2)$$

В (2) учтено внешнее электрическое поле [10, с. 309; 11, с. 141] напряженностью $\mathbf{E}_\Sigma = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}$, где постоянное электрическое поле $\mathbf{E}_0 = \text{const}$ модулируется коллинеарным ему электрическим вектором $\mathbf{E}$, зависящим от времени ($\mathbf{E}\times\mathbf{E}_0 = 0$). В (2) η, ζ – динамическая и объемная вязкости соответственно; p_Σ – давление, $\mathbf{v}_\Sigma$ – вектор скорости в среде; ρ_Σ – плотность среды. Величины, помеченные индексом Σ, обозначают поля, возбужденные полем $\mathbf{E}_\Sigma$. Пометим поля, вызванные электрическим полем $\mathbf{E}_0$, нижним индексом 0: p_0, $\mathbf{v}_0$. Кроме того, обозначим через ρ_0 невозмущенное значение плотности, имеющее место в том числе и при воздействии только стационарного поля $\mathbf{E}_0$. Соответственно, акустические поля обозначим через $\mathbf{v}$, p, ρ.

Если принять допущение о том, что скорости процессов $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}$ соответствуют малым значениям числа Рейнольдса $\text{Re} \ll 1$, то в (2) можно пренебречь конвективным членом [13, с. 89], что делает уравнение (2) линейным

$$\rho_\Sigma\frac{\partial \mathbf{v}_\Sigma}{\partial t} = -\nabla p_\Sigma + \eta\Delta\mathbf{v}_\Sigma + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\nabla\nabla\mathbf{v}_\Sigma + \rho_{el}\mathbf{E}_\Sigma. \quad (3)$$

Поскольку в этом случае справедлив принцип суперпозиции, то можно записать $\rho_\Sigma = \rho_0 + \rho$, $p_\Sigma = p_0 + p$, $\mathbf{v}_\Sigma = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}$.

При описании стационарного электроосмоса пользуются усеченной версией уравнения (3) [9, с. 33; 10, с. 220]

$$\eta\Delta\mathbf{v}_0 + \rho_{el}\mathbf{E}_0 = 0, \quad (4)$$

которое формально следует из (3) при выполнении условий $\nabla p_0 = 0$, $\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} = 0$. Уравнение (4) описывает стационарное электроосмотическое течение под воздействием постоянного электрического поля $\mathbf{E}_0$ при рассмотрении баланса электрических сил и сил трения.

Далее рассматриваем случай кругового цилиндрического капилляра. Отличным от нуля решением (4) при условии $\mathbf{v}_0|_{r=a} = 0$ для капилляра с осью, совпадающей с Oz, и $\mathbf{E}_0 = (0, 0, E_0)$, является составляющая $v_{0z}(r)$ скорости $\mathbf{v}_0$ [10, с. 220; 11, с. 161]

$$v_{0z}(r) = E_0\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\eta}\tilde{\zeta}\left(1 - \frac{I_0(r/\lambda_D)}{I_0(a/\lambda_D)}\right). \quad (5)$$

Здесь a – радиус поверхности скольжения; I_0 – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Асимптотика (5) при $r \to 0$ называется электроосмотической скоростью и равна $U_0(r) = E_0\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\eta}\tilde{\zeta} = \text{const}$. Известно, что при выполнении соотношения $\lambda_D \ll a$, практически для всех $r \in [0, a)$ будет справедливо соотношение $v_{0z}(r) \approx U_{eo}$ [11, с. 162].

На долю возмущенного решения приходится остающаяся часть уравнения (3), которое с точностью до акустических величин второго порядка малости имеет следующий вид

$$\rho_0\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \eta\Delta\mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\nabla\nabla\mathbf{v} + \rho_{el}\mathbf{E}. \quad (6)$$

К уравнению движения (6) необходимо добавить линеаризованное уравнение непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho_0\nabla\mathbf{v} = 0. \quad (7)$$

Принимая среду баротропной, выписываем уравнение состояния в линеаризованном виде

$$p = \left(\left.\frac{\partial p_\Sigma}{\partial\rho_\Sigma}\right|_{\rho_\Sigma=\rho_0}\right)\rho = c^2\rho, \quad (8)$$

где c – скорость звука в среде. Система (6)–(8) представляет собой замкнутую систему линейных уравнений акустики для однородной, вязкой, баротропной среды.

Принимая представление вектора скорости $\mathbf{v}$ в виде суммы потенциальной $\mathbf{v}_l$ и соленоидальной $\mathbf{v}_t$ частей

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_l + \mathbf{v}_t, \quad \mathbf{v}_l = \nabla\Phi, \quad \mathbf{v}_t = \nabla\times\mathbf{\Psi}, \quad \nabla\mathbf{\Psi} = 0, \quad (9)$$

где Φ и $\mathbf{\Psi}$ – соответственно скалярный и векторный потенциалы поля скоростей $\mathbf{v}$, и подставляя (9) в уравнение (6), получаем

$$\begin{gathered}\left[\rho_0\frac{\partial\mathbf{v}_l}{\partial t} + \nabla p - \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)\Delta\mathbf{v}_l - \rho_{\mathrm{el}}\mathbf{E}\right] + \\ + \left[\rho_0\frac{\partial\mathbf{v}_t}{\partial t} - \eta\Delta\mathbf{v}_t\right] = 0.\end{gathered} \quad (10)$$

В (10) учтено, что $\mathbf{E} = -\nabla\psi$ – потенциальный вектор, где ψ – скалярный потенциал поля $\mathbf{E}$. Из (10) получаем для потенциального течения

$$\rho_0\frac{\partial\mathbf{v}_l}{\partial t} = -\nabla p + \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)\Delta\mathbf{v}_l + \rho_{\mathrm{el}}\mathbf{E} \quad (11)$$

и соленоидального течения

$$\rho_0\frac{\partial\mathbf{v}_t}{\partial t} = \eta\Delta\mathbf{v}_t. \quad (12)$$

Подстановка в (11), (12) значений для $\mathbf{v}_l$ и $\mathbf{v}_t$ из (9) преобразует их к виду

$$\begin{gathered}\rho_0\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -p + \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)\Delta\Phi - \rho_{\mathrm{el}}\psi, \\ \rho_0\frac{\partial\mathbf{\Psi}}{\partial t} = \eta\Delta\mathbf{\Psi}.\end{gathered} \quad (13)$$

Далее при условии, что глубина проникновения вязких волн δ мала, соленоидальным течением пренебрегаем (см., например, [14, с. 63]).

По предположению векторы $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{E}$ направлены вдоль оси Oz ($\mathbf{E}_0 = (0,0,E_0)$, $\mathbf{E} = (0,0,E)$) и вектор $\mathbf{E}$, вызывающий акустические колебания, имеет гармоническую зависимость от времени $E = \bar{E}e^{-i\omega t}$, где $\bar{E} = \mathrm{const}$ – амплитуда колебаний. Тогда потенциал ψ вектора $\mathbf{E}$ определяется из соотношения $\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial z} = -\bar{E}e^{-i\omega t}$. Интегрируя последнее равенство, имеем при условии $\psi(0) = \psi(z)|_{z=0} = 0$

$$\psi = -z\bar{E}e^{-i\omega t}. \quad (14)$$

Преобразуем уравнение (13). Для этого воспользуемся условием непрерывности (7) и соотношением $p = c^2\rho$. Получаем $\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_0 c^2\nabla\mathbf{v}$ или через скалярный потенциал $\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho_0 c^2\Delta\Phi$. В гармоническом случае, сохраняя те же обозначения для амплитуд, для амплитуды давления p получаем

$$p = \frac{\rho_0 c^2}{i\omega}\Delta\Phi. \quad (15)$$

С учетом (14) и (15) выражение (13) для гармонического сигнала примет вид

$$\begin{gathered}-i\omega\rho_0\Phi = -\frac{\rho_0 c^2}{i\omega}\Delta\Phi + \\ + \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)\Delta\Phi + \rho_{\mathrm{el}} z\bar{E}.\end{gathered} \quad (16)$$

В круговом капилляре в дебаевском приближении справедливо выражение [11, с. 149] $\rho_{\mathrm{el}}(r) = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0\zeta}{\lambda_D^2}\frac{I_0(r/\lambda_{\mathrm{D}})}{I_0(a/\lambda_{\mathrm{D}})}$. С учетом этого уравнение (16) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}\left\{\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] + k^2\right\}\Phi = \\ = -\frac{ik^2}{\omega\rho_0}\frac{\varepsilon\varepsilon_0\zeta}{\lambda_D^2}\frac{I_0(r/\lambda_{\mathrm{D}})}{I_0(a/\lambda_{\mathrm{D}})}\bar{E}z.\end{gathered} \quad (17)$$

Здесь $k = \frac{\omega}{c}\Big/\left(1 - i\omega\left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)\Big/\rho_0 c^2\right)^{1/2}$ – волновое число потенциальных волн.

Таким образом, для амплитуды скалярного потенциала скорости Φ получено неоднородное уравнение Гельмгольца (17). Правая часть этого уравнения, как и скорость (5) в случае стационарного электроосмоса, пропорциональна амплитуде электрического потенциала $\bar{E}$ и величине ζ-потенциала и обратно пропорциональна величине динамической вязкости η, а также, в отличие от стационарного электроосмоса, еще и объемной вязкости ζ. Кроме того, Φ, как и в стационарном случае, пропорциональна произведению диэлектрической проницаемости среды и электрической постоянной $\varepsilon\varepsilon_0$. Разумеется, эти зависимости в силу линейности уравнения (17) сохраняются для скорости потока $\mathbf{v}$.

Формально при сделанных выше допущениях задача считается решенной, если определен скалярный потенциал Φ. Скалярный потенциал определяется выражением (17). Вектор колебательной скорости $\mathbf{v} = \mathbf{v}_l$ определяется после этого из (9). Поле давления определяется из (15). В случае пренебрежения вихревым течением на скалярный потенциал Φ на поверхности скольжения можно наложить краевое условие $\mathbf{v}|_a \approx \mathbf{v}_l|_a = \nabla\Phi|_a = 0$. Краевые условия для стационарного электроосмоса приведены в [9, с. 34; 10, с. 218].

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ. НЕЛИНЕЙНЫЙ СЛУЧАЙ, ЛАМИНАРНЫЙ РЕЖИМ

Далее снимается допущение о возможности линеаризации уравнения (2), но сохраняется допущение о ламинарности потоков жидкости в рассматриваемом процессе.

За основу вновь берется уравнение движения Навье–Стокса (2). Примем, что стационарное электрическое поле много больше переменного $|\mathbf{E}_0| \gg |\mathbf{E}|$. Число Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\mathbf{v}_0}$ для скорости $\mathbf{v}_0$ уже не считаем пренебрежимо малым, и конвективным членом слева в (2) для скорости $\mathbf{v}_0$ пренебрегать нельзя. Уравнение (4) в этом случае приводится к виду (как и выше, полагаем величину стационарного давления постоянной $\nabla p_0 = 0$)

$$\rho_0(\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{v}_0 = \eta\Delta\mathbf{v}_0 + \rho_{\mathrm{el}}\mathbf{E}_0. \quad (18)$$

Вычтем из уравнения (2) для суммарных полей уравнение движения из (18) для стационарного потока. Получившееся уравнение для акустических полей линеаризуем. В результате получаем линеаризованную версию уравнения Навье–Стокса для акустических полей (см. также рассуждения в работе [13, § 26])

$$\rho_0\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}_0\cdot\nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}_0\right) = = -\nabla p + \eta\Delta\mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\nabla\nabla\mathbf{v} + \rho_{\mathrm{el}}\mathbf{E}. \quad (19)$$

К уравнению движения (19) следует добавить линеаризованное уравнение непрерывности (7).

Как и выше, рассматриваем безвихревое акустическое движение. Тогда, после подстановки выражения $\mathbf{v} = \nabla\Phi$ в уравнение (19), получаем уравнение для потенциала Φ

$$\rho_0\left(\frac{\partial\nabla\Phi}{\partial t} + (\mathbf{v}_0\nabla)\nabla\Phi + (\nabla\Phi\nabla)\mathbf{v}_0\right) = = -\nabla p + \eta\Delta\nabla\Phi + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\nabla\Delta\Phi - \rho_{\mathrm{el}}\nabla\psi. \quad (20)$$

Из (20) после простых преобразований получаем

$$\rho_0\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + 2(\mathbf{v}_0\nabla\Phi)\right) = -p + \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)\Delta\Phi - \rho_{\mathrm{el}}\psi. \quad (21)$$

Выражение (21) следует из (20), если учесть, что скорость $\mathbf{v}_0$ электроосмотического течения потенциальна [9, с. 38] и в члене $(\nabla\Phi\nabla)\mathbf{v}_0$ из (20) сделать замену $\mathbf{v}_0 = \nabla\Phi_0$, а затем опустить во всех членах (20) правый оператор градиента ∇.

Рассматриваем далее гармонический процесс с множителем $e^{-i\omega t}$ (амплитуды полей вновь обозначаем теми же буквами). Вектора $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{E}$ по прежнему являются коллинеарными и направлены вдоль оси Oz ($\mathbf{E}_0 = (0,0,E_0)$, $\mathbf{E} = (0,0,E)$), а модуль вектора $\mathbf{E}$ имеет гармоническую зависимость от времени $E = \bar{E}e^{-i\omega t}$, где $\bar{E} = \mathrm{const}$. Тогда амплитуда потенциала ψ вектора $\mathbf{E}$ равна $\psi = -\bar{E}z$. После подстановки амплитуды давления и потенциала в (21) имеем в гармоническом случае

$$\rho_0(-i\omega\Phi + 2(\mathbf{v}_0\nabla\Phi)) = = -\frac{\rho_0 c^2}{i\omega}\Delta\Phi + \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)\Delta\Phi + \rho_{\mathrm{el}}\bar{E}z,$$

или, используя введенное в (17) волновое число,

$$\Delta\Phi + k^2\Phi = \frac{2k^2}{i\omega}(\mathbf{v}_0\nabla\Phi) - \frac{k^2}{i\omega\rho_0}\rho_{\mathrm{el}}\bar{E}z. \quad (22)$$

Уравнение (22) представляет собой подобие неоднородного уравнения Гельмгольца относительно скалярного потенциала Φ акустической составляющей осмотической скорости $\mathbf{v}$, однако, с тем отличием, что в правую часть уравнения (22) входит искомая величина $\nabla\Phi$. Решение таких уравнений сводится к линейному интегральному уравнению с ядром, представляющим собой функцию Грина соответствующего уравнения Гельмгольца, которое здесь подробно не рассматривается. Проделаем лишь качественное рассуждение, касающееся того, что справа в (22) стоит скалярное произведение $(\mathbf{v}_0\nabla\Phi)$ вектора стационарной осмотической скорости $\mathbf{v}_0$ и вектора $\nabla\Phi$, а следовательно, искомое решение Φ скалярного потенциала акустической составляющей осмотической скорости $\mathbf{v}$ прямо пропорционально модулю $|\mathbf{v}_0|$ скорости $\mathbf{v}_0$ стационарного осмотического течения. Поскольку имеет место линейная связь между потенциалом Φ и скоростью $\mathbf{v}$, а также давлением p (см. (9) и (15)), то при росте амплитуды $|\mathbf{v}_0|$ будет расти и акустическое давление p и модуль $|\mathbf{v}|$ акустической составляющей осмотической скорости, а следовательно, и интенсивность звука $I \sim p|\mathbf{v}|$.

Подставляя в (22) соответствующее значение для $\rho_{el}(r)$, получаем

$$\left\{\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]+k^2\right\}\Phi = \\ =\frac{k^2}{i\omega}\left(2(\mathbf{v}_0\nabla\Phi)+\frac{1}{\rho_0}\frac{\varepsilon\varepsilon_0\tilde{\zeta}I_0(r/\lambda_D)}{\lambda_D^2 I_0(a/\lambda_D)}\bar{E}z\right). \tag{23}$$

Выражение (23) отличается от выражения (17) только стоящим справа членом $\frac{2k^2}{i\omega}(\mathbf{v}_0\nabla\Phi)$, появившимся в результате учета нелинейности в уравнении Навье–Стокса (2). Таким образом, с ростом числа Рейнольдса для скорости стационарного электроосмотического потока $\mathbf{v}_0$ уравнения движения для стационарного потока и нестационарного акустического потока перестают быть несвязанными, как в линейном случае при получении уравнения (17). Это выражается в появлении в уравнениях (22), (23), описывающих акустический поток $\mathbf{v}$, члена $\frac{2k^2}{i\omega}(\mathbf{v}_0\nabla\Phi)$, непосредственно связанного со скоростью $\mathbf{v}_0$ стационарного электроосмотического потока. В этом и состоит возможность увеличения мощности акустического процесса за счет энергии стационарного процесса, т.е. возникает эффект накачки энергии из стационарного потока в энергию акустического процесса.

Остановимся на оценке члена $\frac{2k^2}{i\omega}(\mathbf{v}_0\nabla\Phi)$ в выражении (23). Стационарная электроосмотическая скорость $\mathbf{v}_0$ является решением уравнения (18), которое отличается от уравнения, рассматриваемого в классическом электроосмосе (см., например в [9, с. 33, 34]

$$\eta\Delta\mathbf{v}_0+\rho_{el}\mathbf{E}_0=0. \tag{24}$$

Уравнение (18) преобразуется в (24) при пренебрежении конвективным членом $\rho_0(\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{v}_0$. Это возможно при условии $|\rho_0(\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{v}_0| \ll |\rho_{el}\mathbf{E}_0|$. Если это условие справедливо, то можно воспользоваться оценкой для скорости $\mathbf{v}_0$ при условии $a \gg \lambda_D$ [11, с. 161, 162]: $\mathbf{v}_0 \approx U_{eo}\mathbf{e}_z$, где U_{eo} – электроосмотическая скорость; $E_0 = |\mathbf{E}_0|$; $\mathbf{e}_z$ – единичный орт оси Oz, совпадающей с осью капилляра. С учетом приведенных рассуждений уравнение (23) переписывается в следующем виде

$$\left\{\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]+k^2\right\}\Phi = \\ =\frac{k^2}{i\omega}\varepsilon\varepsilon_0\tilde{\zeta}E_0\left(\frac{2}{\eta}(\mathbf{e}_z\nabla\Phi)+\frac{1}{\rho_0}\frac{I_0(r/\lambda_D)}{\lambda_D^2 I_0(a/\lambda_D)}\frac{\bar{E}}{E_0}z\right), \tag{25}$$

из которого видна зависимость процесса от его основных физических параметров, т.е. величин $\omega, c, \eta, \zeta, \varepsilon, \varepsilon_0, \tilde{\zeta}, E_0, \bar{E}, \rho_0, a$ и λ_D.

При решении задачи (25) следует наложить специфичные для электроосмотических задач краевые условия (см., например, [9, с. 33, 34; 10, с. 220]). После вычисления потенциала Φ вектор колебательной скорости и давления определяются стандартно, как описано выше. Плотность определяется из условия баротропности жидкости $\rho = \frac{p}{c^2}$.

Замечание 1. Уравнения (3) и (10) описывают процессы линейной акустики. В случае, когда нельзя пренебречь нелинейным слагаемым $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$, опущенным слева в (19), уравнение (25) трансформируется к нелинейному, что, в частности, объясняет появление кратных гармоник, которые в процессе эксперимента и сигнализируют о возникновении нелинейности акустического процесса.

МОДЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для проверки рассмотренной теории был проведен модельный эксперимент в вычислительном пакете COMSOL. В качестве пористой структуры был выбран круговой стеклянный капилляр, заполненный воздухом с параметрами: радиус капилляра 10 мкм, длина капилляра 0.1 мм, амплитуда переменной разности потенциалов сохранялась в эксперименте постоянной $U = 1000$ В (переменное напряжение $u(t)$ определялось так $u(t) = U\sin(2\pi 1000t)$), частота 1000 Гц, дзета-потенциал был принят равным 100 мВ.

На сетке фиксированных значений постоянного напряжения U_{0i}, $i=\overline{1,N}$ решалась задача расчета уровня акустического давления $p=f(U_{0i}, U=\text{const})$ на торце капилляра в случае наиболее общего уравнения движения (2). На рис. 1 представлены зависимости $p_i(t) = f(U_{0i}, U=\text{const})$ при дискретной вариации величины U_{0i} в интервале $i\in\overline{1,N}$. С правой стороны рисунка отдельно приведены дискретные значения U_{0i}. Из рис. 1 видно, что начиная с некоторых значений U_{0i}, функции давления $p_i(t)$ становятся нелинейными вследствие нелинейности задачи (2), на что указывает отклонение их формы от синусоидальной. Кроме того, видна прямая зависимость амплитуд колебаний $p_i(t)$ от величины амплитуды накачки U_{0i}.

Далее с помощью разложений в ряд Фурье кривых $p_i(t)$ были получены амплитуды p_{1i} пер-

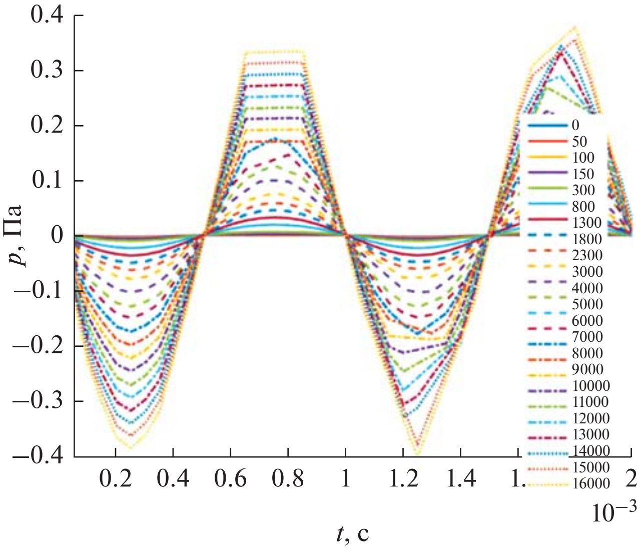

Рис. 1. Поведение результирующего акустического давления p на торце капилляра в зависимости от времени t при различных напряжениях накачки U_0 при значении величины амплитуды переменного напряжения $U = 1000$ В. Значения U_0, В приведены в правой стороне графика.

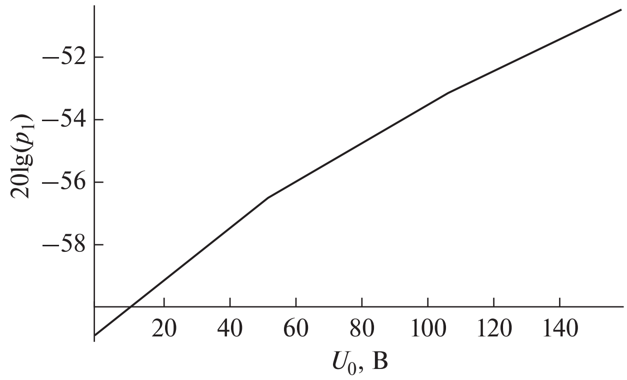

Рис. 2. Зависимость величины $20\lg(p_1)$ от напряжения накачки U_0 в интервале $U_0 \in [0, 150]$ В при значении величины амплитуды переменного напряжения $U = 1000$ В. Здесь p_1 – первая гармоника давления p (см. рис. 1).

вых гармоник функций $p_i(t)$. На рис. 2, 3 приведены в режиме линейной интерполяции зависимости величины $20\lg(p_1)$ от напряжения накачки U_0 в интервале соответственно $U_0 \in [0,150]$ и $U_0 \in [0,16\,000]$ В при значении величины амплитуды переменного напряжения $U = 1000$ В. Здесь p_1 – первая гармоника давления $p(t)$.

Замечание 2. Полученный выше теоретически и на модельном эксперименте результат, заключающийся в том, что в нелинейном режиме при подаче постоянного и переменного электрических полей к электродам электроакустического преобразователя происходит перекачка энергии от постоянного электрического поля непосредственно к энергии акустического поля, был получен применительно к пористой структуре в виде кругового капилляра. Прежде чем переходить к описанию натурных экспериментов, приведем условия, когда эти результаты можно экстраполировать на достаточно широкий класс пористых структур. В § 2.2 работы [9] показано подобие системы уравнений электроосмотического течения применительно к капиллярно-пористой среде со сколь угодно сложной геометрией внутренней поверхности системе уравнений для простейших случаев границ (плоскость, плоский слой, капилляр) при выполнении следующих условий:

1. толщина двойного слоя достаточно мала, а радиусы кривизны внутренней поверхности пор больше некоторой величины, значительно превышающей длину Дебая λ_D, обычно принимаемую за толщину ДЭС;

2. минимальный линейный размер пор существенно превышает толщину двойного слоя.

В экспериментах, описанных ниже, в качестве капиллярно-пористой структуры используется писчая бумага. Согласно [15, с. 67], средний радиус пор бумаги составляет от 20–30 нм для мелованной бумаги, 270 нм для газетной бумаги и до 450 нм для фильтровальной бумаги. Для обычной писчей бумаги средний радиус пор лежит внутри интервала (30 нм, 270 нм). Порядок величины длины Дебая составляет $\lambda_D \sim 10$ нм [11, с. 47]. Таким

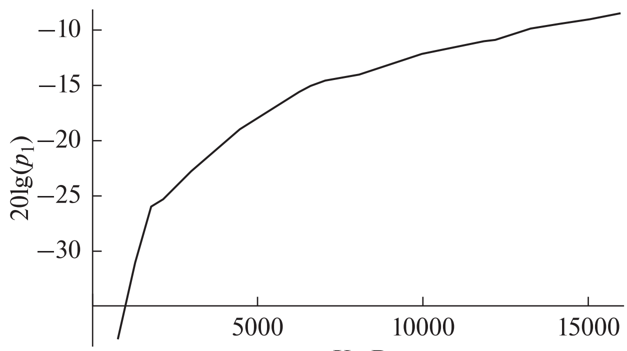

Рис. 3. Зависимость величины $20\lg(p_1)$ от напряжения накачки U_0 в интервале $U_0 \in [0, 16\,000]$ В при значении величины амплитуды переменного напряжения $U = 1000$ В. Здесь p_1 – первая гармоника давления p (см. рис. 1).

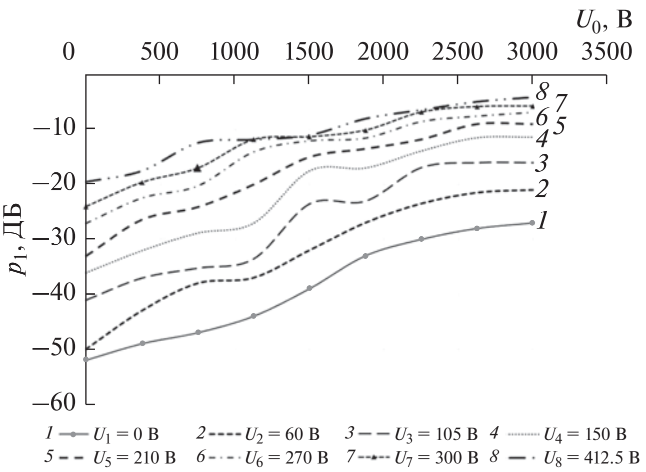

Рис. 4. Амплитуда давления первой гармоники p_1 в некоторой фиксированной точке волновой зоны излучателя в зависимости от изменения напряжения накачки U_0 при дискретных постоянных значениях U (кривые *1–8*; маркеры на кривых *1* и *7* служат для идентификации кривых).

образом, для обычной писчей бумаги выполняются условия подобия, описанные в замечании 2.

НАТУРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для проверки описанной теории был проведен ряд экспериментов. В качестве излучающей системы использовалась расположенная в воздушной среде пачка писчей бумаги постоянной толщины Δ (15 листов толщиной по ~ 0.1 мм каждый) формата А4, помещенная между двумя соразмерными бумаге перфорированными алюминиевыми пластинами-электродами. К электродам подводились постоянное $\mathbf{E}_0$ и гармоническое $\mathbf{E}$ электрические поля, направленные по нормали к электродам. При постоянной величине Δ далее вместо полей $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{E}$ оперируем соответствующими величинами приложенных к электродам разностей потенциалов U_0 и $Ue^{-i\omega t}$. Частота колебаний переменного электрического поля в опытах составляла $f = 3$ кГц. В волновой зоне описываемого преобразователя в точке на оси, проходящей нормально к его центру, был установлен микрофон, измерявший излучаемое давление, которое фиксировалось на анализаторе спектра в условных дБ[1].

В процессе экспериментов был получен ряд зависимостей давления первой гармоники давления p_1 на входе микрофона от напряжения накачки $p_1 = f_i(U_0, U_i)$ при фиксированных значениях величины амплитуды гармонической составляющей электрического поля $U = U_i$, $i = \overline{1,8}$, равных соответственно $U_1 = 30$ В; $U_2 = 60$ В; $U_3 = 105$ В; $U_4 = 150$ В; $U_5 = 210$ В; $U_6 = 270$ В; $U_7 = 300$ В; $U_8 = 412.5$ В. Кривые зависимостей $p_1 = f_i(U_0, U_i)$ представлены на рис. 4 под соответствующими номерами. На приведенных графиках значения уровня первой гармоники давления p_1 в дБ являются относительными, показывающими только соотношение его амплитуд в процессе эксперимента при различных значениях амплитуд U и U_0. Напряжение накачки U_0 при фиксированной величине $U = U_i$, $i = \overline{1,8}$ варьировалось на дискретном множестве точек от 20 до 3000 В с переменным шагом: 30 В на интервале $U_0 \in [20, 500]$ В и с шагом 100 В на интервале $U_0 \in (500, 3000]$ В.

Из рис. 4 следует, что кривые $p_1 = f_i(U_0, U_i = \text{const})$ имеют сходный характер поведения в зависимости от напряжения накачки U_0 (т.е. от величины осмотической скорости $\mathbf{v}_0$, пропорциональной величине U_0): вначале все кривые достаточно монотонно возрастают с ростом величины U_0. В интервале значений $U_0 \in [2600, 3000]$ В наступает режим насыщения.

Фаза нарастания давления p_1 с ростом накачки U_0 прогнозировалась выше в теоретической части работы. Фаза насыщения давления p_1 с ростом напряжения накачки требует дополнительного пояснения. Участок насыщения кривых $p_1 = f_i(U_0, U_i = \text{const})$ можно объяснить тремя факторами. Во-первых, суммарная энергия при входе в нелинейный режим излучения начинает перераспределяться от первой гармоники акустических колебаний к появляющимся кратным гармоникам. Это отчетливо проявилось и при проведении модельного эксперимента в вычислительном пакете, что выразилось во все большем отклонении формы акустического давления p от синусоидальной при росте напряжения накачки U_0. Во-вторых, как будет показано в следующей работе авторов, при некоторых значениях U_0, зависящих от размера пор, ламинарный режим течения жидкости (газа) в порах преобразователя переходит в турбулентный режим течения, который сопровождается появлением паразитных широкополосных пульсационных шумов, на что также идут затраты энергии. В-третьих, как показано в работе [16], с ростом U_0 возрастают диссипативные поте-

[1] Отсутствие привязки к конкретной величине, относительно которой оценивалась измеряемая величина, не меняет, как известно, характера соответствующей зависимости, а приводит лишь к ее сдвигу по оси ординат.

ри в теле преобразователя. Этим и объясняется поведение представленных на рисунке кривых.

Из результатов эксперимента, представленных на рис. 4, следует, что величины давления без накачки $p_1 = f_i(U_0, U_i)$ при $U_0 = 0$ (т.е. соответствующие значения давления p_1 на оси $U_0 = 0$ для $i = \overline{1,8}$) при фиксированных значениях U_i по мере увеличения накачки U_0 возрастают по-разному. Рост составляет от 15.4 дБ при $U_i = 412.5$ В (в 5.9 раза) до 29 дБ при $U_i = 60$ В (в 28.2 раза). Эти результаты с учетом замечания 2 подтверждают теоретические прогнозы данной работы.

Замечание 3. Сравнение результатов модельного (рис. 2) и натурного (рис. 4) экспериментов в совпадающем интервале напряжения накачки $U_0 \in [0,150]$ В показывает, что при изменении напряжения накачки в этом интервале амплитуда давления растет на ~ 10.4 дБ для модельного эксперимента и на 1-3 дБ для натурного эксперимента. Объяснить это можно следующим образом. При проведении модельного эксперимента задавалось возможное верхнее предельное значение электрокинетического потенциала $\tilde{\zeta} = 0.1$ В (интервал принимаемых значений на практике составляет $\tilde{\zeta} \in [0.001, 0.1]$ В [15, с. 320]). Как видно из выражения (25), снижение величины дзета-потенциала в 2 раза до $\tilde{\zeta} = 0.05$ В по сравнению с принятым в модельном эксперименте влечет к уменьшению скалярного потенциала Φ и связанного с ним линейно давления p на ~ 6 дБ. Реально в натурном эксперименте дзета-потенциал вероятно был еще меньше, однако в настоящей работе он специально не измерялся.

Замечание 4. Получение идентичных результатов качественной зависимости величины первой гармоники давления p_1, получаемого в преобразователе, от величины напряжения накачки U_0 при разных частотах переменного напряжения (соответственно 1000 и 3000 Гц для модельного и натурного экспериментов) лишь подчеркивает общий характер предложенной теоретической модели процесса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложены в линейном и нелинейном приближении (ламинарный режим движения жидкости) необходимые уравнения и краевые условия для описания акустических полей, вызываемых электрокинетическими явлениями: наличием двойного электрического слоя и приложенного электрического поля, являющегося суммой постоянного поля и электрического поля, несущего акустическую информацию. Уравнения рассматриваются применительно к цилиндрическому капилляру.

В линейном режиме электроосмотических явлений наличие стационарного электроосмоса не оказывает влияния на протекание электроосмоса, вызванного переменным электрическим полем. В нелинейном ламинарном режиме происходит перекачка энергии постоянного электрического поля в энергию акустического поля. Результаты модельного эксперимента на капилляре качественно подтверждают верность проведенных теоретических исследований. Различие степени накачки в модельном и натурном экспериментах можно объяснить меньшим значением дзета-потенциала в натурном эксперименте.

Результаты натурного эксперимента на такой нетривиальной пористой структуре, как бумага, также подтверждают верность развитой в работе для кругового капилляра теории в части ее основного прогноза — возникновения процесса перекачки энергии постоянного электрического поля в акустическую энергию и демонстрируют правомерность ее экстраполяции на сложные пористые структуры. В натурном эксперименте усиление первой гармоники давления с помощью накачки составляло для различных значений переменного давления от 5.9 до 28 раз. В модельном эксперименте, в отличие от натурного эксперимента не происходит режима насыщения даже при изменении напряжения накачки до величины 16000 В. Причины этого будут вскрыты в следующей публикации авторов.

Полученные результаты могут быть использованы при проектировании и оптимизации преобразователей нового типа.

Авторы благодарны С.П. Дмитриеву и С.Г. Телятнику за содействие в проведении экспериментов.

Работа выполнена в ИАП РАН в рамках Государственного задания 075-00780-20-00 по теме № 0074-2019-0013 Министерства науки и высшего образования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shishov S.V., Andrianov S.A., Dmitriev S.P., Ruchkin D.V.* Method of converting electric signals into acoustics oscillations and an electric gas-kinetic transducer. United States Patent # US 8,085,957,B2. Dec. 27, 2011.
2. *Касимзаде М.С., Халилов Р.Ф., Балашов А.Н.* Электрокинетические преобразователи информации. М.: Энергия, 1973. 136 с.
3. *O'Brien R.W.* Electro-acoustic effects in a dilute suspension of spherical particles // J. Fluid Mech. 1988. V. 190. P. 71–86.

4. *Hunter R.J.* Review. Recent developments in the electroacoustic characterization of colloidal suspensions and emulsions // Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects. 1998. V. 14. P. 37–65.
5. *Мурцовкин В.А.* Нелинейные течения вблизи поляризованных дисперсных частиц // Коллоидн. журн. 1996. Т. 58. № 3. С. 358–367.
6. *Данилян А.В., Дорофеев Д.Л., Наскидашвили В.И., Пахомов Г.В., Зон Б.А.* Магнитогидродинамический генератор псевдозвука // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 5. С. 694–696.
7. *Гладилин А.В., Пирогов В.А., Голямина И.П., Кулаев Ю.В.* Вибрационный преобразователь с магнитной левитацией // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 3. С. 409–415.
8. *Курочкин В.Е., Сергеев В.А., Шарфарец Б.П., Гуляев Ю.В.* Теоретическое обоснование нового метода электроакустического преобразования. Линейное приближение // Докл. Акад. наук. 2018. Т. 483. № 3. С. 265–268.
9. *Духин С.С., Дерягин Б.В.* Электрофорез. М.: Наука, 1976. 332 с.
10. *Ньюмен Дж.* Электрохимические системы. М.: Мир, 1977. 464 с.
11. *Bruus H.* Theoretical Microfluidics. Oxford University Press, 2008. 346 p.
12. Физическая энциклопедия. Т. 5. М.: БРЭ, 1998. 760 с.
13. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
14. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
15. *Шахкельдян Б.Н., Загаринская Л.А.* Полиграфические материалы. М.: “Книга”, 1988. 328 с.
16. *Шарфарец Б.П.* О диссипации энергии в электроосмотическом процессе // Научное приборостроение. 2019. Т. 29. № 3. С. 30–40.
17. *Глинка Н.Л.* Общая химия. Л.: Химия. 702 с.