АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2018, том 64, № 6, с. 752–755

УДК 534.26

О МАКСИМАЛЬНОМ ПОГЛОЩЕНИИ ЗВУКА РЕЗОНАТОРОМ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ПОМЕЩЕНИИ НА НИЗКИХ ЧАСТОТАХ

Н. Г. Канев[a, b, *]

[a]АО "Акустический институт им. акад. Н.Н. Андреева"
Россия, 117036 Москва, ул. Шверника 4

[b]МГТУ им. Н.Э. Баумана
Россия, 105005 Москва, 2-я Бауманская ул. 5, стр. 1

*e-mail: nikolay.kanev@mail.ru

Поступила в редакцию 27.03.2018 г.

Рассмотрена задача о поглощении звука резонатором Гельмгольца в помещении с абсолютно жесткими стенками. Определены параметры резонатора – коэффициент трения, упругость и масса – при которых обеспечивается максимальное поглощение в окрестности первого собственного колебания помещения.

Ключевые слова: архитектурная акустика, собственные моды помещения, резонатор Гельмгольца

DOI: 10.1134/S0320791918060059

Резонатор Гельмгольца является эффективным поглотителем звуковых волн [1–4]. При соответствующем подборе параметров резонатора можно добиться максимального поглощения, которое может быть обеспечено малым по сравнению с длиной звуковой волны рассеивателем, в свободном пространстве [1], волноводах [3–5], помещениях [6–8]. На практике резонаторы Гельмгольца часто используются для демпфирования собственных резонансов помещения и сглаживания его передаточной функции. Трудности в подборе параметров резонатора для максимального поглощения вызваны тем, что взаимодействие резонатора и нормальных мод помещения приводит к изменению собственных колебаний помещения. Представляет интерес определить максимально возможное поглощение звука резонатором в помещении в области самых низких нормальных частот, для чего рассматривается задача в следующей постановке.

Звуковое поле в помещении с абсолютно жесткими стенками может быть представлено в виде суперпозиции нормальных незатухающих мод. При внесении в помещение резонатора с трением все моды становятся затухающими [9], при этом количественно эффективность поглощения может быть охарактеризована коэффициентом затухания для каждой моды. Наибольший коэффициент затухания будут иметь моды, собственные частоты которых близки к собственной частоте резонатора. Эффективнее всего поглощение звука происходит на изолированных собственных частотах помещения [7, 8], т.е. на первых резонансах помещения. Таким образом, необходимо определить параметры резонатора, при которых коэффициент затухания первой моды становится максимальным.

Решение поставленной задачи будем проводить, следуя [9]. Акустический импеданс резонатора Гельмгольца может быть записан в виде

$$Z = \frac{1}{S^2}\left[R + i\left(\frac{K}{\omega} - \omega M\right)\right], \tag{1}$$

где M – масса воздуха в горле резонатора, R – коэффициент трения, K – коэффициент упругости, S – площадь поперечного сечения горла резонатора, ω – частота звука.

Сопротивление излучения резонатора в помещении с объемом V, ограниченном абсолютно жесткой поверхностью, имеет вид

$$Z_r = \frac{i\omega\rho c^2}{V}\sum_{n\geq 1}\frac{p_n^2(r)}{\omega^2 - \omega_n^2}, \tag{2}$$

где $p_n(r)$ и ω_n – фундаментальные функции и собственные частоты помещения без резонатора, $n = 1, 2, 3, \ldots,$ r – радиус-вектор точки расположения резонатора, ρ – плотность среды в помещении, c – скорость звука в ней. Нумерация $p_n(r)$ и ω_n производится в порядке возрастания собственных частот.

Помещение с резонатором Гельмгольца образуют колебательную систему, собственные частоты которой находятся из уравнения

$$Z + Z_r = 0. \tag{3}$$

Очевидно, что в случае бездиссипативного резонатора все корни (3) вещественны. Если резонатор обладает ненулевым трением, то корни (3) комплексны, а их мнимые части определяют скорость затухания соответствующей моды.

В качестве параметров резонатора выберем его собственную частоту в свободном пространстве $\omega_0 = \sqrt{K/M}$, а также безразмерные величины

$$r = \frac{\omega_1 V}{\rho c^2 S^2} R \quad \text{и} \quad m = \frac{\omega_1^2 V}{\rho c^2 S^2} M, \tag{4}$$

характеризующие трение и массу резонатора соответственно. Безразмерный коэффициент трения, очевидно, может принимать значения $0 \le r < \infty$. Оценим возможные значения параметра m. Если помещение имеет характерный размер L, то его объем $V \sim L^3$, а первая собственная частота $\omega_1 \sim c\pi/L$. Для круглого горла резонатора с диаметром d его масса равна $M = \rho l \pi d^2/4$, где l — длина горла резонатора. Из (4) получаем $m \sim 4\pi Ll/d^2$. Длина горла резонатора может быть устремлена к нулю, однако в этом пределе масса резонатора не становится нулевой и определяется присоединенной массой отверстия. Эффективная длина горла резонатора составляет $l \sim d$, т.е. для короткого горла получаем оценку $m \sim 4\pi L/d$. Отверстие можно считать малым по сравнению с характерным размером помещения, если $L \gg d$. Для расчета можно принять $L/d = 10$, тогда минимальное значение параметра, характеризующее массу резонатора, составляет $m \sim 10^2$. Максимальное значение m не ограничено.

Отнормируем все частоты задачи на самую низкую собственную частоту помещения ω_1, т.е. введем безразмерные частоты $\omega' = \omega/\omega_1$, $\omega_0' = \omega_0/\omega_1$, $\omega_n' = \omega_n/\omega_1$. Далее штрихи у величин ω', ω_0', ω_n' будем опускать.

Для удобства положим, что резонатор находится в пучностях всех мод, т.е. $p_n^2(r) = 1$ для всех n. Для этого, например, в прямоугольном помещении резонатор необходимо поместить в угол. Тогда (3) с учетом (1) и (2) преобразуется к виду

$$r + im\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right) + i\omega\sum_{n\ge1}\frac{1}{\omega^2 - \omega_n^2} = 0. \tag{5}$$

Для высокочастотного случая $\omega_0 \gg \omega$ корни (5) найдены в [9]. Исследуем, как ведут себя корни (5) в зависимости от параметров резонатора вблизи первого резонанса помещения. Корни (5) будем искать численно, для определенности рассмотрим помещение, имеющее форму прямоугольного параллелепипеда, длины сторон которого относятся как 5 : 2 : 1. В этом случае первые собственные частоты помещения имеют значения $\omega_1 \equiv 1$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = 2.5$, которые и учитываются в сумме в (5).

На рис. 1а приведены первые два корня уравнения (5) для $m = 100$ и $\omega_0 = 1$ при изменении коэффициента трения от нуля до бесконечности, а на рис. 1б их мнимые части. Стрелками на рис. 1а указано направление движения корней по комплексной плоскости при увеличении значения коэффициента трения. В случае бездиссипативного резонатора, т.е. при $r = 0$, оба корня вещественны, обозначим их Ω_0, Ω_1 и отметим на комплексной плоскости на рис. 1а проколотыми точками. Их нумерация начинается с $n = 0$, поскольку помещение с резонатором имеет дополнительную степень свободы и собственную частоту. Для $n \ge 1$ все частоты Ω_n оказываются выше ω_n [9], но при этом Ω_0 оказываются ниже ω_0. Будем увеличивать значение r с нулевого значения до бесконечного и отслеживать, как изменяются собственные частоты. При ненулевом трении резонатора собственные частоты становятся комплексными, а соответствующие им моды затухающими. Введем коэффициент затухания моды δ_n, равный, но противоположный по знаку мнимой части соответствующего корня уравнения (5). Коэффициент затухания первой моды δ_1 с увеличением трения достигает максимального значения, а коэффициент затухания нулевой моды δ_0 монотонно увеличивается. При дальнейшем увеличении трения коэффициент затухания уменьшается и стремится к нулю, а собственная частота первой моды — к ω_1. Таким образом, сильно задемпфированный резонатор не оказывает влияния на звуковое поле в помещении.

Итак, при наличии в помещении резонатора с собственной частотой, близкой к первой резонансной частоте помещения ω_1, в окрестности этой частоты есть два корня. Скорость затухания звука будет определяться наименьшим коэффициентом затухания соответствующих мод. Так, на рис. 1б максимальный коэффициент затухания первой моды равен $\delta_1 = 0.044$ при коэффициенте трения $r = 19$, при этом коэффициент затухания нулевой моды равен $\delta_0 = 0.053$. Поэтому затухание звука в помещении с резонатором в окрестности частоты ω_1 будет определяться коэффициентом затухания δ_1.

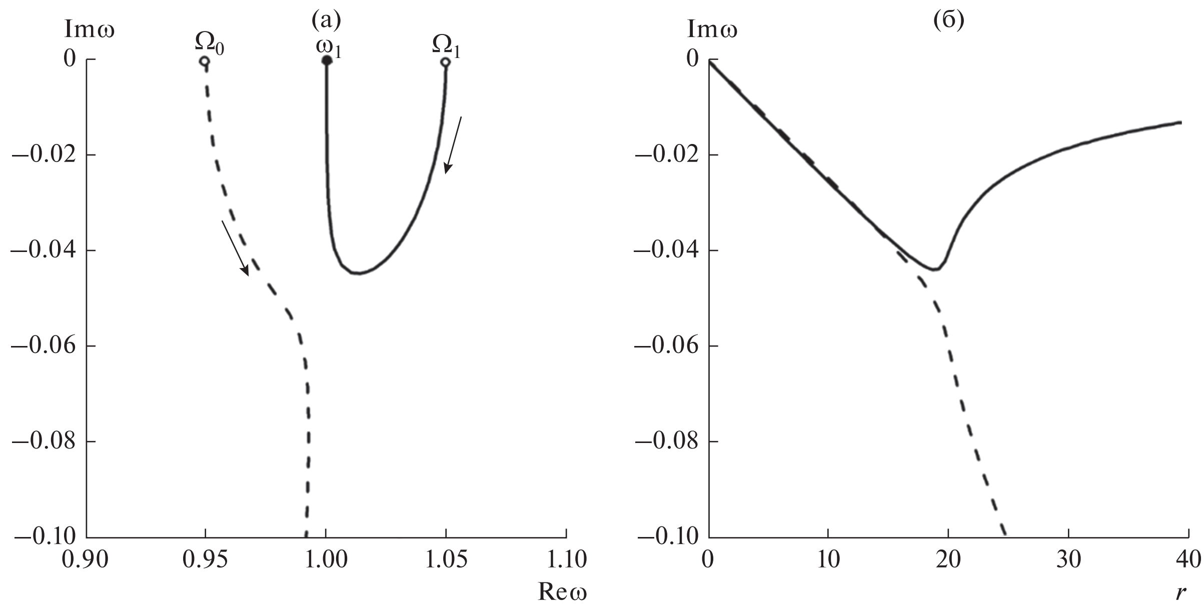

Рис. 1. Первые два корня уравнения (5) при изменении коэффициента трения r от 0 до ∞ (а) и мнимая часть этих корней (б) для резонатора с параметрами $\omega_0 = 1$ и $m = 100$. Пунктирной линей обозначения нулевая мода ($n = 0$), сплошной – первая ($n = 1$).

При подборе собственной частоты резонатора ω_0 можно добиться большего сближения ветвей корней уравнения (5), чем в примере на рис. 1а, и в пределе найти такую частоту ω_0 (для рассматриваемого примера она равна 1.0026), при которой, как показано на рис. 2, две ветви корней имеют общую точку ω_{01}. В этом случае коэффициенты затухания обеих мод имеют одинаковое значение, и оно является максимальным при заданном значении m, т.е. на этой частоте резонатор обеспечивает максимальное поглощение звука в помещении в окрестности первого резонанса помещения.

Определим параметры резонатора ω_0, m и r, при которых обеспечивается максимальное поглощение на первом резонансе помещения. С этой целью упростим (5), для чего представим сумму, входящую в (5), следующим образом:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\omega^2-\omega_n^2} = \frac{1}{\omega^2-1} - \alpha, \tag{6}$$

где сумма $\alpha = -\sum_{n\geq 2}\frac{1}{\omega^2-\omega_n^2}$ слабо зависит от частоты в окрестности $\omega = 1$ и может полагаться константой $\alpha = -\sum_{n\geq 2}\frac{1}{1-\omega_n^2}$.

С учетом (6) уравнение (5) запишется в виде

$$r + im\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right) + i\omega\left(\frac{1}{\omega^2-1} - \alpha\right) = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) представляет полином четверной степени, имеющий четыре корня, при этом две пары корней имеют одинаковую мнимую часть и одинаковую по значению, но различающуюся знаком, действительную часть. С учетом

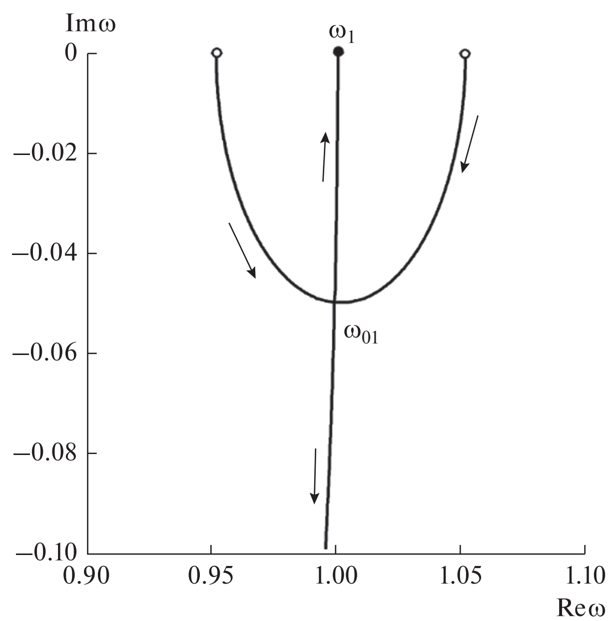

Рис. 2. Кратный корень ω_{01} при $\omega_0 = 1.0026$ и $m = 100$. Стрелками указано смещение корней по кривой при увеличении коэффициента трения r.

этого, а также того, что искомый корень $\omega_{01} = \tilde{\omega} - i\tilde{\delta}$ уравнения (7) является двукратным, можно воспользоваться теоремой Виета для уравнения четвертой степени и найти соотношения между коэффициентами уравнения (7) и кратными корнями:

$$\tilde{\delta} = \frac{r}{4(m+\alpha)}, \tag{8}$$

$$\tilde{\omega}^2 + 3\tilde{\delta}^2 = \frac{1+\alpha+m(\omega_0^2+1)}{2(m+\alpha)}, \tag{9}$$

$$\tilde{\delta}\left(\tilde{\omega}^2 + \tilde{\delta}^2\right) = \frac{r}{4(m+\alpha)}, \tag{10}$$

$$\tilde{\omega}^2 + \tilde{\delta}^2 = \sqrt{\frac{m}{m+\alpha}}\omega_0. \tag{11}$$

Из (8)–(11) находим коэффициент затухания

$$\tilde{\delta} = \frac{1}{2\sqrt{m+\alpha}}, \tag{12}$$

который достигается при коэффициенте трения резонатора $r = 2\sqrt{m+\alpha}$ и его собственной частоте $\omega_0 = \sqrt{\frac{m+\alpha}{m}}$. При этом абсолютное значение кратного корня равно $|\omega_{0,1}| = 1$.

Из (12) очевидна оптимизация массы резонатора: она должна быть минимально возможной. Однако, как показано выше, значения параметра m не могут принимать малые значения; характерное минимальное значение составляет 10^2. В рассмотренном выше примере прямоугольного помещения с соотношением сторон 5 : 2 : 1 значение параметра α составляет 1.38. Поэтому максимально достижимый коэффициент затухания зависит только от m и равен

$$\tilde{\delta} = \frac{1}{2\sqrt{m}}. \tag{13}$$

При $m = 100$ коэффициент затухания равен $\tilde{\delta} = 0.05$.

Таким образом, для максимального поглощения звука на первом резонансе помещения коэффициент трения резонатора должен быть равен $r = 2\sqrt{m}$, его масса удовлетворять условию $m \sim 10^2$, а упругость подбирается таким образом, чтобы собственная частота в свободном пространстве была близка к первой резонансной частоте помещения $\omega_0 \approx 1$.

Автор выражает признательность М.А. Миронову за ценные советы при подготовке настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973.
2. *Комкин А.И., Миронов М.А., Быков А.И.* Поглощение звука резонатором Гельмгольца // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 4. С. 356–363.
3. *Канев Н.Г., Миронов М.А.* Монопольно–дипольный резонансный поглотитель в узком волноводе // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 1. С. 111–116.
4. *Лапин А.Д.* Поглощение звука резонаторами в цилиндрическом волноводе // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 5. С. 716–719.
5. *Selamet A., Dicky N.S., Novak J.M.* Theoretical, computational and experimental investigation of Helmholtz resonators with fixed volume: lumped versus distributed analysis // J. Sound Vibr. 1995. V. 187. P. 358–367.
6. *Fahy F.J., Schofield C.A.* Note on the interaction between a Helmholtz resonator and an acousticmode of an enclosure // J. Sound Vibr. 1980. V. 72. P. 365–378.
7. *Yu G., Li D., Cheng L.* Internal resistance optimization of a Helmholtz resonator in noise control of small enclosures // Proc. of 14th International Congress on Sound and Vibration, Cairns, Australia. 9–12 July, 2007.
8. *Klaus J., Bork I., Graf M., Ostermeyer G.-P.* On the adjustment of Helmholtz resonators // Appl. Acoust. 2014. V. 77. P. 37–41.
9. *Лапин А.Д.* Низкочастотное звуковое поле в помещении с резонатором Гельмгольца // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 4. С. 563–565.