

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ  
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.23:537.874.6

ДИФРАКЦИЯ ПОЛЯ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА НА КОМПАКТНОМ  
ПРЕПЯТСТВИИ В НЕПРЕРЫВНО-СЛОИСТОМ ВОЛНОВОДЕ

© 2018 г. А. Г. Кюркчан<sup>a, b, c</sup>, С. А. Маненков<sup>a, \*</sup>

<sup>a</sup>Московский технический университет связи и информатики  
111024 Москва, ул. Авиамоторная 8а, Россия

<sup>b</sup>ФирЭ им. В.А. Котельникова РАН  
141190 Фрязино Московской обл., пл. Введенского 1, Россия

<sup>c</sup>ФГУП Центральный научно-исследовательский институт связи  
111141 Москва, 1-й проезд Перова поля 8, Россия

\*e-mail: mail44471@mail.ru

Поступила в редакцию 25.11.2017 г.

Рассмотрена задача дифракции поля точечного источника на теле вращения, расположенном в плоском слое, который ограничен с одной стороны абсолютно мягкой границей, а с другой – жидким полупространством. Рассмотрен случай, когда среда внутри слоя имеет характеристики, непрерывно зависящие от вертикальной координаты. Проведено тестирование метода путем сравнения результатов расчета волнового поля для случая постоянного профиля скорости звука внутри плоского слоя, а также путем сравнения предлагаемого метода и метода поверхностных интегральных уравнений. Показано существенное влияние наличия неоднородности среды слоя на звуковое поле.

*Ключевые слова:* акустические волны в слоистых средах, метод вспомогательных источников

DOI: 10.1134/S0320791918050052

ВВЕДЕНИЕ

Задача дифракции волн на телах, расположенных в неоднородных средах, представляет большой практический интерес. В литературе рассматривались различные задачи дифракции акустических волн на телах, расположенных в плоскостойких средах [1–5]. Наиболее близкой к рассматриваемой в данной работе модели плоскостойкой среды является геометрия, исследованная в работах [3, 4]. В этих работах рассмотрена дифракция монохроматического поля точечного источника и импульсного сигнала на упругой сферической оболочке, помещенной в океанический волновод с поглощающим дном. Задача решалась при помощи разложения поля в интеграл плоских волн с последующим преобразованием этого представления в разложение по нормальным волнам волновода. Существенным отличием настоящей работы от указанных работ является, во-первых, то, что рассеиватель в виде тела вращения может иметь произвольное сечение, и во-вторых, скорость звука внутри плоского слоя может непрерывно меняться вдоль вертикальной координаты.

В работе рассматривается задача дифракции поля точечного источника на теле вращения, расположенном в плоскостойком волноводе, волновое число которого меняется непрерывно

вдоль вертикальной координаты. Предполагается, что верхняя граница волновода абсолютно мягкая, а снизу волновод ограничен однородным жидким полупространством. Задача решалась при помощи модифицированного метода дискретных источников (ММДИ) [6–10]. В основе ММДИ лежат две идеи. Во-первых, носитель вспомогательных источников должен охватывать особенности аналитического продолжения волнового поля внутрь рассеивателя. Во-вторых, для быстрой сходимости численного алгоритма носитель должен выбираться при помощи аналитической деформации границы рассеивателя. Еще один важный шаг, позволяющий получать высокую точность результатов, заключается в использовании различных систем координат для построения носителя дискретных источников. В частности, в настоящей работе применялись сферические и сфероидальные ортогональные координаты для построения носителя вспомогательных источников [8, 9].

Как было указано выше, в данной работе рассматриваются задачи рассеяния в случае, когда среда внутри жидкого слоя имеет постоянные характеристики и когда скорость звука меняется непрерывно вдоль вертикальной координаты. В обоих случаях для вычисления функции Грина (ФГ) слоистой среды применяется методика интегрирования в комплексной плоскости, предло-

женная в [7]. При таком подходе не требуется рассматривать представление ФГ в виде суммы нормальных волн волновода. В работе предложен также эффективный алгоритм нахождения ФГ, основанный на использовании сплайн-аппроксимации [7].

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВЫВОД ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Рассмотрим дифракцию поля точечного источника на теле вращения, которое расположено внутри жидкого слоя, лежащего на однородном полупространстве (дне) с плотностью и скоростью звука  $\mu_0$  и  $c_0$  соответственно. Предполагаем, что зависимость от времени пропорциональна  $\exp(i\omega t)$ , где  $\omega = 2\pi f$  – круговая частота. Обозначим через  $S$  границу тела вращения. Будем считать, что ось вращения тела перпендикулярна границам плоского слоя. Введем декартову систему координат, причём ось  $z$  направим вдоль оси вращения рассеивателя (см. рис. 1). Выберем начало системы координат внутри области, занимаемой телом. Обозначим через  $d_1$  и  $d_2$  расстояния от начала координат до границ слоя ( $d_1 + d_2 = h$ ,  $h$  – толщина слоя). Характеристики среды внутри плоского слоя обозначим через  $\mu$ ,  $c(z)$ . Таким образом, имеется неоднородная слоистая среда. Искомое поле давления удовлетворяет уравнению Гельмгольца всюду вне области, занимаемой телом:

$$\Delta p + k^2(z)p = -\frac{\delta(\rho - \rho_0)\delta(\varphi - \varphi_0)\delta(z - z_0)}{\rho}, \quad (1)$$

где  $k(z)$  – волновое число (при  $z > d_2$  волновое число среды постоянно и равно  $k_0$ ),  $\delta(x)$  – дельта-функция. В формуле (1)  $p = p^0 + p^1$ ,  $p^0$  – поле точечного источника в отсутствие тела,  $p^1$  – вторичное (рассеянное) поле. Точечный источник располагается в точке с цилиндрическими координатами  $\mathbf{r}_0 = (\rho_0, 0, z_0)$ , причём  $-d_1 < z_0 < d_2$ . В силу осевой симметрии задачи можно считать, что координата источника  $\varphi_0$  равна нулю. На поверхности тела  $S$  выполняется условие Неймана для полного поля:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_S = 0, \quad (2)$$

где  $\partial/\partial n$  – производная вдоль внешней нормали к поверхности тела. Граница слоя  $z = -d_1$  абсолютно мягкая, а на границе  $z = d_2$  выполнены условия сопряжения

$$p|_{z=d_2-0} = p|_{z=d_2+0}, \quad \frac{1}{\mu} \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=d_2-0} = \frac{1}{\mu_0} \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=d_2+0}. \quad (3)$$

На бесконечности выполняется условие предельного поглощения:

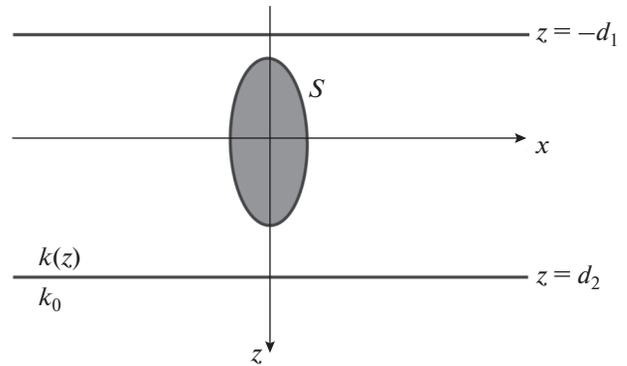


Рис. 1. Геометрия задачи.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p = 0, \quad \text{Im } k(z) < 0, \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}. \quad (4)$$

В соответствии со стандартной схемой ММДИ будем искать решение краевой задачи в виде потенциала простого слоя:

$$p(\mathbf{r}) = p^0(\mathbf{r}) + \int_{\Sigma} J(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')ds'. \quad (5)$$

В формуле (5)  $\Sigma$  – носитель вспомогательных источников, расположенный внутри тела,  $J(\mathbf{r}')$  – неизвестная функция, заданная на  $\Sigma$ ,  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  – ФГ рассматриваемой слоистой среды. В результате подстановки (5) в граничное условие (2) на поверхности тела получим следующее интегральное уравнение первого рода [6, 7, 10]:

$$\int_{\Sigma} J(\mathbf{r}') \frac{\partial G}{\partial n} ds' = -\frac{\partial p^0}{\partial n}, \quad \mathbf{r} \in S. \quad (6)$$

Сделаем замечание относительно корректности интегрального уравнения (6). Как следует из его вывода, уравнение (6) имеет гладкое ядро (так как поверхности тела и вспомогательная поверхность разнесены на некоторое расстояние). Поэтому существенной проблемой при решении уравнения (6) является устойчивость решения. Здесь нужно отметить два момента. Во-первых, при решении задач методом вспомогательных источников результатом является не распределение неизвестной функции  $J$  на вспомогательной поверхности, а некоторый функционал от этой величины, который является устойчивым. Во-вторых, аналитическая деформация исходной поверхности тела, которая используется в настоящей работе для построения вспомогательной поверхности, позволяет строить устойчивые численные алгоритмы благодаря тому, что при увеличении параметра деформации исходной поверхности тела (ниже этот параметр обозначен  $\delta$ ) дискретные источники движутся по кратчайшим путям, сгущаясь вблизи особенностей продолжения поля внутрь поверхности тела [10].

Рассмотрим вопрос о построении носителя  $\Sigma$  для неизвестной функции  $J$ . Как было указано во

введении, для быстрой сходимости численного алгоритма вспомогательная поверхность должна выбираться при помощи аналитической деформации границы рассеивателя. Поясним это подробнее. Предположим вначале, что поверхность тела  $S$  задана в сферических координатах

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \quad (7)$$

где  $r = r(\theta)$  и  $\theta \in [0, \pi]$ . Введем переменную  $\zeta(\theta) = r(\theta) \exp(i\theta) = z + ip$ , где  $(\rho, \varphi, z)$  – цилиндрические координаты. Основная идея ММДИ состоит в том, чтобы считать угол  $\theta$  комплексным, т.е. положить вместо угла  $\theta$  угол  $\theta + i\delta$  в формуле для  $\zeta(\theta)$ . Здесь  $\delta$  – положительный параметр, определяющий степень деформации исходной поверхности тела. Параметр  $\delta$  изменяется в диапазоне  $0 < \delta < \delta_{\max}$ , где выбор величины  $\delta_{\max}$ , которая определяет максимальное значение параметра  $\delta$ , подробно рассмотрен в работах [6–10]. Заметим, что если  $\delta = 0$ , то переменная  $\zeta \in C$ , где  $C$  – контур на комплексной плоскости  $\zeta$ , соответствующий контуру осевого сечения рассеивателя и конгруэнтный ему. Если начать увеличивать  $\delta$ , то  $C$  будет сжиматься и мы получим новый контур, который может быть выбран в качестве контура осевого сечения поверхности  $\Sigma$ . Для нахождения сферических или декартовых координат точки на вспомогательной поверхности используем формулы [8] для сферических и [9] для декартовых координат точки на вспомогательной поверхности  $\Sigma$ :

$$r_\Sigma = |\zeta|, \quad \theta_\Sigma = \arg \zeta, \quad \zeta = r(\theta + i\delta) \exp(i\theta - \delta), \quad (8)$$

$$x_\Sigma = \text{Im } \zeta \cos \varphi, \quad y_\Sigma = \text{Im } \zeta \sin \varphi, \quad z_\Sigma = \text{Re } \zeta. \quad (9)$$

Пусть далее поверхность тела  $S$  задана в вытянутых сфероидальных координатах:

$$x = f \text{ sh } \alpha \sin \beta \cos \varphi, \quad y = f \text{ sh } \alpha \sin \beta \sin \varphi, \quad (10)$$

$$z = f \text{ ch } \alpha \cos \beta,$$

причем уравнение  $S$  имеет вид  $\alpha = \alpha(\beta)$ , где  $\beta \in [0, \pi]$ . Тогда вводится комплексная переменная  $Z(\beta) = \alpha(\beta + i\delta) + i(\beta + i\delta)$ , и вспомогательная поверхность определяется соотношениями [8, 9]

$$\alpha_\Sigma = \text{Re } Z, \quad \beta_\Sigma = \text{Im } Z, \quad (11)$$

где  $(\alpha_\Sigma, \beta_\Sigma, \varphi)$  – сфероидальные координаты “образа” точки с координатами  $(\alpha, \beta, \varphi)$  на исходной поверхности. Для получения декартовых координат точки на вспомогательной поверхности нужно вновь использовать формулы (9), в которых в данном случае  $\zeta(\beta) = z + ip = f \text{ ch } Z(\beta)$ . Для иллюстрации выбора носителя вспомогательной поверхности предположим, что тело представляет собой вытянутый сфероид, так, что поверхность  $S$  описывается уравнением  $\alpha = \alpha_0$ . Тогда в соответствии с формулой (11) имеем:  $Z(\beta) = \alpha_0 - \delta + i\beta$  и  $\alpha_\Sigma = \alpha_0 - \delta$ ,  $\beta_\Sigma = \beta$ . То есть вспомогательная по-

верхность  $\Sigma$  также будет сфероидом, лежащим внутри  $S$  и софокусным с поверхностью тела. Заметим, что в случае сферических координат мы обозначим  $\alpha = \ln r$ ,  $\beta = \theta$ . Таким образом, будем считать, что поверхность тела задана уравнением  $\alpha = \alpha(\beta)$  в соответствующей ортогональной системе координат.

Рассмотрим метод построения ФГ слоистой среды, в которой расположено тело. Заметим, что приведенный ниже алгоритм нахождения ФГ является обобщением метода расчета ФГ, изложенного в [7], на случай трехмерной задачи дифракции. Как известно, ФГ является решением краевой задачи [11]:

$$\begin{cases} \Delta G + k^2(z)G = -\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z'), \\ G|_{z=-d_1} = 0, \\ G|_{z=d_2-0} = G|_{z=d_2+0}, \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=d_2-0} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=d_2+0}. \end{cases} \quad (12)$$

Для нахождения ФГ запишем

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}(\xi, \eta, z, z') \times \exp(-i\xi(x-x') - i\eta(y-y')) d\xi d\eta, \quad (13)$$

где спектральная функция  $\hat{G}(\xi, \eta, z, z')$  представляет собой решение одномерной краевой задачи

$$\begin{cases} \hat{G}'' + (k^2(z) - \kappa^2) \hat{G} = -\delta(z-z'), \\ \hat{G}(-d_1) = 0, \\ \hat{G}(d_2-0) = \hat{G}(d_2+0), \quad \hat{G}'(d_2-0) = \nu \hat{G}'(d_2+0), \end{cases} \quad (14)$$

где  $\kappa = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ ,  $\nu = \mu/\mu_0$ . Представим  $\hat{G}$  в виде суммы сингулярной и регулярной части:

$$\hat{G} = \hat{G}_s + \hat{G}_r, \quad (15)$$

где

$$\hat{G}_s = -\frac{i}{2\sqrt{k_1^2 - \kappa^2}} \exp(-i|z-z'| \sqrt{k_1^2 - \kappa^2}). \quad (16)$$

Здесь  $k_1 = k(z')$ . Знак квадратного корня в формуле (16) выбирается из того условия, что его мнимая часть должна быть неположительна. При подстановке (16) в интеграл Фурье (13) получаем

$$G_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}_s(\xi, \eta, z, z') \exp(-i\xi(x-x') - i\eta(y-y')) d\xi d\eta = \frac{\exp(-ik_1 R)}{4\pi R}, \quad (17)$$

где  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . При этом регулярная часть спектральной плотности ФГ  $\hat{G}$  является решением краевой задачи

$$\begin{cases} \hat{G}_r'' + (k^2(z) - \kappa^2)\hat{G}_r = (k_1^2 - k^2(z))\hat{G}_s, \\ \hat{G}_r(-d_1) = -\hat{G}_s(-d_1), \\ \hat{G}_r(d_2) + \hat{G}_s(d_2) = A, \\ \hat{G}_r'(d_2) + \hat{G}_s'(d_2) = -i\sqrt{k_0^2 - \kappa^2}Av. \end{cases} \quad (18)$$

Здесь мы учли, что при  $z > d_2$  функция  $\hat{G}$  выражается известным образом:

$$\hat{G} = A \exp\left(-i(z - d_2)\sqrt{k_0^2 - \kappa^2}\right), \quad (19)$$

где  $A$  – неизвестная постоянная. Очевидно, что в последних двух уравнениях в (18) можно исключить неизвестную величину  $A$ . Переходя далее к цилиндрическим координатам в формуле (13) с учетом (17), получим выражение для ФГ:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + G_r(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp(-ik_1R)}{4\pi R} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \hat{G}_r(\kappa, z, z') J_0(\kappa R_\perp) \kappa d\kappa, \quad (20)$$

где  $R_\perp = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ ,  $J_0(x)$  – функция Бесселя.

В случае постоянного профиля скорости звука (при  $k(z) = k_1$ ) внутри плоского слоя функция  $\hat{G}_r$  имеет вид [11]

$$\begin{aligned} \hat{G}_r(\kappa, z, z') = & -\frac{i}{2} [V \exp(-i\gamma(2d_2 - z - z')) - \\ & - V \exp(-i\gamma(2h + z - z')) - V \exp(-i\gamma(2h - z + z')) - \\ & - \exp(-i\gamma(2d_1 + z + z'))] \frac{1}{\gamma(1 + V \exp(-i2\gamma h))}, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$V = \frac{\gamma - v\gamma_0}{\gamma + v\gamma_0}, \quad \gamma = \sqrt{k_1^2 - \kappa^2}, \quad \gamma_0 = \sqrt{k_0^2 - \kappa^2}. \quad (22)$$

В случае произвольного профиля скорости звука необходимо решать краевую задачу (18) численно. С этой целью используем сплайн-аппроксимацию неизвестной функции  $\hat{G}_r(z)$  [7]. Выберем точки коллокации на интервале  $[-d_1, d_2]$ :

$$\bar{z}_j = -d_1 + \frac{h(j-1)}{L-1}, \quad j = 1, 2, \dots, L. \quad (23)$$

Затем введем сетку на рассматриваемом интервале:

$$z_l = \begin{cases} -d_1, & l = 1, 2, \dots, q, \\ \bar{z}_{l-q/2}, & l = q+1, q+2, \dots, L, \\ d_2, & l = L+1, L+2, \dots, L+q, \end{cases} \quad (24)$$

где  $q$  – порядок сплайнов, причем  $q$  – четное число. Данный выбор узлов сетки соответствует

условию в конечных точках интервала  $[-d_1, d_2]$  типа “нет узла” [12]. Далее запишем

$$\hat{G}_r(\kappa, z, z') = \sum_{l=1}^L c_l B_l^q(z), \quad (25)$$

где  $B_l^q(z)$  – В-сплайн порядка  $q$ ,  $c_l$  – неизвестные коэффициенты. Коэффициенты при базисных функциях удовлетворяют линейной системе, получаемой при помощи метода коллокации:

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^L c_l \left( B_l^{q''}(\bar{z}_j) + (k^2(\bar{z}_j) - \kappa^2) B_l^q(\bar{z}_j) \right) = \\ = (k_1^2 - k^2(\bar{z}_j)) \hat{G}_s(\bar{z}_j), \quad j = \overline{2, L-1}, \\ \sum_{l=1}^L c_l B_l^q(-d_1) = -\hat{G}_s(-d_1), \\ \sum_{l=1}^L c_l \left( B_l^q(d_2) + iv\gamma_0 B_l^q(d_2) \right) = -\left( \hat{G}_s'(d_2) + iv\gamma_0 \hat{G}_s(d_2) \right). \end{cases} \quad (26)$$

Для краткости мы опустили все аргументы кроме  $z$  у функции  $\hat{G}_s$ . Видно, что матричные элементы данной системы зависят от значений сплайнов и их производных в точках коллокации. Поэтому, вычислив заранее значения сплайнов и их производных, можно существенно сократить время вычислений на ЭВМ.

Для дальнейшего решения задачи необходимо учесть осевую симметрию рассматриваемой геометрии. Сделаем замену неизвестной функции  $J$  по формуле [8, 9]

$$I(\mathbf{r}') = J(\mathbf{r}') h_\phi h_\Sigma \sqrt{\alpha_\Sigma^2 + \beta_\Sigma^2}. \quad (27)$$

В формуле (27)  $h_\phi$  и  $h_\Sigma = h_\alpha = h_\beta$  – коэффициенты Ламе соответствующей системы координат (т.е. это могут быть сферические или сфероидальные координаты) в точке с координатами  $(\alpha_\Sigma, \beta_\Sigma, \phi')$  на вспомогательной поверхности  $\Sigma$ . Точка означает дифференцирование по  $\beta'$ . Разложим неизвестную функцию  $I(\mathbf{r}')$  и ФГ в ряды Фурье:

$$I(\mathbf{r}') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(\beta') \exp(im\phi'), \quad (28)$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{G}_m(\alpha, \beta, \alpha', \beta') \exp(im\tau), \quad (29)$$

$$\tau = \phi - \phi',$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{G}_m = G_m^0 + G_m^1 = & \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-ik_1R - im\tau)}{R} d\tau + \\ & + \int_0^\infty \hat{G}_r(\kappa, z, z') J_m(\kappa r) J_m(\kappa r') \kappa d\kappa, \end{aligned} \quad (30)$$

$J_m(x)$  – функция Бесселя порядка  $m$ . В результате подстановки формул (28) и (29) в уравнение (6)

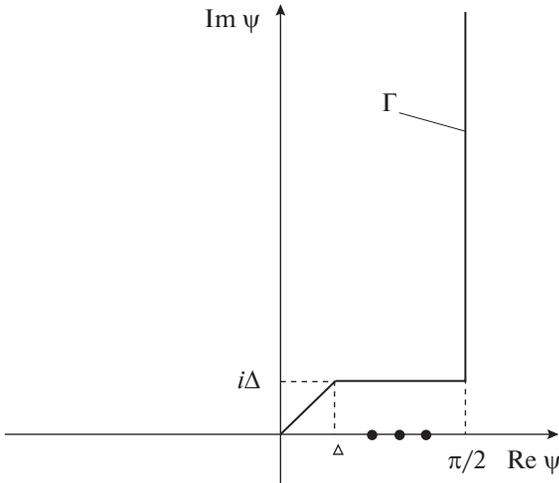


Рис. 2. Комплексная плоскость переменной  $\psi$ .

Заметим, что подынтегральное выражение во втором слагаемом в формуле (30) содержит особенности на комплексной плоскости  $k$ . А именно, имеются точки ветвления  $k = \pm k_0$  и полюсы, которые расположены на действительной оси (в случае отсутствия поглощения в дне) или вблизи нее. Интеграл в формуле (30) удобно вычислять, используя замену  $k = k_1 \sin \psi$  и переходя к интегрированию по контуру  $\Gamma$ , показанному на рис. 2. Точками на рисунке показаны полюсы подынтегральной функции. Величина  $\Delta$  выбирается равной порядка 0.2–0.5. При таком выборе контура не возникает трудностей при интегрировании в окрестности полюсов и точек ветвления. Таким образом,

$$G_m^1 = k_1^2 \int_{\Gamma} \hat{G}_r(k_1 \sin \psi, z, z') J_m(k_1 \rho \sin \psi) \times J_m(k_1 \rho' \sin \psi) \sin \psi \cos \psi d\psi. \tag{33}$$

получим бесконечную систему одномерных интегральных уравнений (СИУ) первого рода относительно неизвестных гармоник функции  $I(\mathbf{r}')$ :

При расчетах мы вычисляли интеграл в формуле (33), разбивая его на сумму интегралов по прямолинейным участкам контура  $\Gamma$ . При этом подынтегральную функцию в формуле (33) вычисляли, решая систему (26) для каждого комплексного значения переменной  $k$ .

$$\int_0^{\pi} K_m(\beta, \beta') I_m(\beta') d\beta' = B_m(\beta), \tag{31}$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \beta \in [0, \pi],$$

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

$$K_m(\beta, \beta') = \frac{\partial \tilde{G}_m}{\partial n}, \tag{32}$$

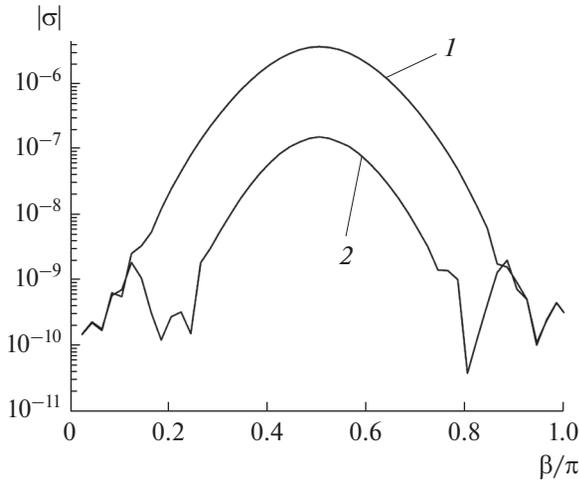
$$B_m(\beta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial p^0}{\partial n} \exp(-im\varphi) d\varphi,$$

Для тестирования разработанного метода было проведено сравнение результатов расчета волнового поля для задачи рассеяния поля точечного источника на абсолютно жесткой сфере и сфероиде, расположенных в слое с постоянной скоростью звука. В табл. 1 приведены значения модуля волнового поля, полученные при помощи методики расчета ФГ, основанной на применении сплайнов, и при помощи формулы (21). Размеры тел были следующие: радиус сферы  $a = 8.52616$  м,

где  $p^0(\mathbf{r}) = p_0^0(\mathbf{r}) + p_1^0(\mathbf{r}) = G_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + G_r(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ . Для численного решения одномерных интегральных уравнений (31) использовался метод коллокации, описанный в работах [6–10].

Таблица 1. Сравнение результатов расчета волнового поля для постоянного профиля скорости звука, полученных двумя методами

Значение координаты $z$ , м	Дифракция на сфере		Дифракция на сфероиде	
	ММДИ для постоянного профиля	вычисление ФГ с помощью сплайнов	ММДИ для постоянного профиля	вычисление ФГ с помощью сплайнов
-17.05232	$9.361470 \times 10^{-13}$	$9.360864 \times 10^{-13}$	$5.905157 \times 10^{-15}$	$5.907065 \times 10^{-15}$
-13.26292	$8.801879 \times 10^{-4}$	$8.801110 \times 10^{-4}$	$4.640632 \times 10^{-3}$	$4.640900 \times 10^{-3}$
-9.473500	$2.156493 \times 10^{-3}$	$2.156686 \times 10^{-3}$	$3.614811 \times 10^{-3}$	$3.614463 \times 10^{-3}$
-5.684100	$2.332295 \times 10^{-3}$	$2.332226 \times 10^{-3}$	$2.010339 \times 10^{-3}$	$2.010271 \times 10^{-3}$
-1.894700	$4.189371 \times 10^{-3}$	$4.189335 \times 10^{-3}$	$5.215462 \times 10^{-3}$	$5.215304 \times 10^{-3}$
1.894700	$1.149541 \times 10^{-3}$	$1.149750 \times 10^{-3}$	$3.633970 \times 10^{-3}$	$3.633959 \times 10^{-3}$
5.684100	$2.518205 \times 10^{-3}$	$2.518133 \times 10^{-3}$	$1.998978 \times 10^{-3}$	$1.998957 \times 10^{-3}$
9.473500	$1.208210 \times 10^{-3}$	$1.208087 \times 10^{-3}$	$4.135630 \times 10^{-3}$	$4.135530 \times 10^{-3}$
13.26292	$1.741079 \times 10^{-3}$	$1.741167 \times 10^{-3}$	$2.853135 \times 10^{-3}$	$2.852925 \times 10^{-3}$
17.05232	$2.902997 \times 10^{-3}$	$2.903019 \times 10^{-3}$	$5.870371 \times 10^{-3}$	$5.870394 \times 10^{-3}$



**Рис. 3.** Распределение невязки на контуре осевого сечения вытянутого сфероида. Кривая 1 – число угловых гармоник  $M = 6$ , кривая 2 –  $M = 8$ .

полуоси сфероида  $a_1 = 8.52616$  м,  $b_1 = a_1/3$  ( $a_1$  – полуось вдоль оси  $z$ ), толщина волновода  $h = 34.1046$  м, скорости звука в слое и в дне  $c = 1500$  м/с и  $c_0 = (1675 + i15.34)$  м/с, плотности сред  $\mu = 1000$  кг/м<sup>3</sup> и  $\mu_0 = 2000$  кг/м<sup>3</sup> (параметры сред взяты из работы [3]), координаты источника  $\rho_0 = h/2$ ,  $z_0 = 0$ , координата точек наблюдения  $\rho = h/2$  в случае сферы и  $\rho = h/3$  в случае сфероида, угол наблюдения  $\varphi = 180^\circ$ . Частота источника  $f = 140$  Гц. Центр обоих рассеивателей располагался в середине слоя (т.е.  $d_1 = d_2 = h/2$ ). При вычислении ФГ методом на основе сплайнов мы выбирали  $L = 50$  и порядок сплайнов  $q = 8$ . Как видно из таблицы, результаты расчета поля отличаются не более, чем на 0.01%, т.е. имеется хорошая точность результатов, получаемых при использовании сплайнов. Видно также, что полное поле практически равно нулю при  $z = -h/2$ , т.е. в точке на

верхней границе слоя, что согласуется с постановкой задачи.

В качестве еще одной проверки разработанной методики была вычислена невязка краевого условия на контуре осевого сечения вытянутого сфероида рассмотренных выше размеров, расположенного в слое с переменным волновым числом. Невязка вычислялась по формуле

$$|\sigma(\beta, \varphi)| = \left| \left( \sum_{m=-M}^M \int_0^\pi K_m(\beta, \beta') I_m(\beta') d\beta' \right) \times \exp(im\varphi) - \sum_{m=-M}^M B_m(\beta) \exp(im\varphi) \right|, \quad (34)$$

где  $M$  – максимальный номер гармоники по угловой координате. Невязку находили в точках, расположенных на контуре осевого сечения тела посередине между точками коллокации, причем угол  $\varphi = 0$ . Рассматривался случай, когда квадрат волнового числа внутри слоя изменялся по закону [11]

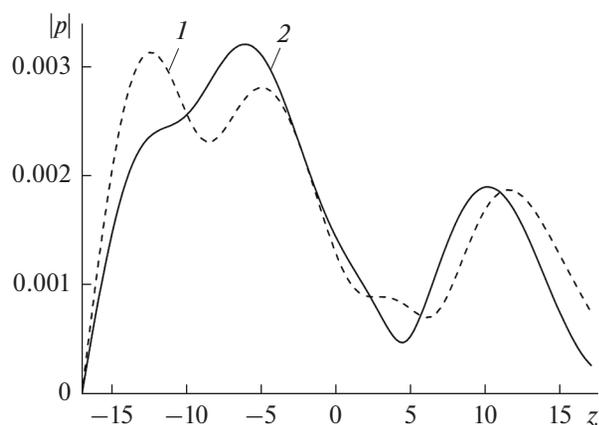
$$k^2(z) = k_1^2(1 - \tau_0(z + d_1)/h), \quad (35)$$

где  $\tau_0 = 0.1$ , параметр  $k_1 = 2\pi f/c$ ,  $f = 140$  Гц. Размеры слоя, параметры сред и координаты источника были те же, что и выше. Тело располагалось в середине слоя ( $d_1 = d_2$ ). Соответствующие кривые зависимости невязки приведены на рис. 3. Число дискретных источников было равно  $N = 50$ , т.е. было небольшим. Число гармоник по углу  $\varphi$  составляло  $M = 6$  (кривая 1 на рисунке) и  $M = 8$  (кривая 2). Как видно из рисунка, максимальный уровень невязки не превосходит  $2 \times 10^{-7}$  при  $M = 8$ , т.е. очень мал.

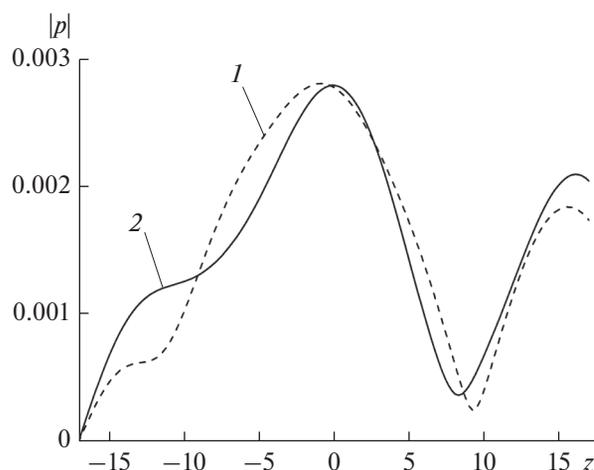
Представляет интерес сравнить работу ММДИ с каким-либо другим методом. Например, рассмотрим решение задачи дифракции на теле, расположенном в плоском слое, при помощи метода поверхностных интегральных уравнений (МПИУ).

**Таблица 2.** Сравнение результатов расчета волнового поля для задачи дифракции на сфероиде, полученных при помощи ММДИ и МПИУ

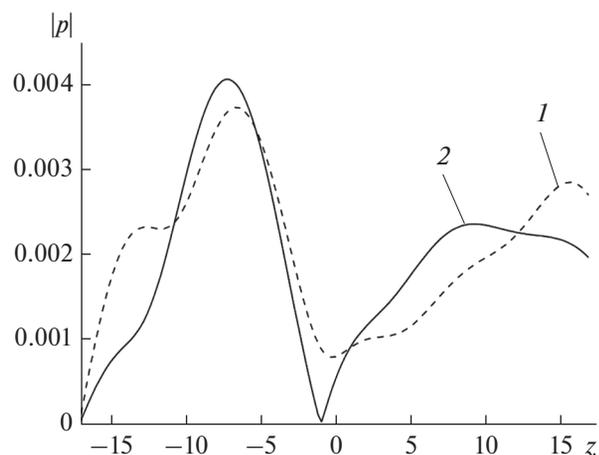
Значение координаты $z$ , м	$\rho = h/2$		$\rho = h$	
	ММДИ	МПИУ	ММДИ	МПИУ
-17.05232	$0.5374801 \times 10^{-11}$	$0.1536949 \times 10^{-12}$	$0.8853391 \times 10^{-11}$	$0.4161582 \times 10^{-12}$
-13.26292	$0.2305395 \times 10^{-2}$	$0.2305158 \times 10^{-2}$	$0.1307957 \times 10^{-2}$	$0.1307880 \times 10^{-2}$
-9.473500	$0.2784273 \times 10^{-2}$	$0.2784241 \times 10^{-2}$	$0.1434596 \times 10^{-2}$	$0.1434550 \times 10^{-2}$
-5.684100	$0.3658068 \times 10^{-2}$	$0.3658122 \times 10^{-2}$	$0.2293261 \times 10^{-2}$	$0.2293196 \times 10^{-2}$
-1.894700	$0.1413977 \times 10^{-2}$	$0.1413839 \times 10^{-2}$	$0.2763154 \times 10^{-2}$	$0.2763059 \times 10^{-2}$
1.894700	$0.1003313 \times 10^{-2}$	$0.1003255 \times 10^{-2}$	$0.1564024 \times 10^{-2}$	$0.1563936 \times 10^{-2}$
5.684100	$0.1257527 \times 10^{-2}$	$0.1257539 \times 10^{-2}$	$0.1067566 \times 10^{-2}$	$0.1067711 \times 10^{-2}$
9.473500	$0.1909733 \times 10^{-2}$	$0.1909395 \times 10^{-2}$	$0.4007555 \times 10^{-3}$	$0.4006935 \times 10^{-3}$
13.26292	$0.2471005 \times 10^{-2}$	$0.2470907 \times 10^{-2}$	$0.2430499 \times 10^{-2}$	$0.2430455 \times 10^{-2}$
17.05232	$0.2724291 \times 10^{-2}$	$0.2724412 \times 10^{-2}$	$0.2973907 \times 10^{-2}$	$0.2973919 \times 10^{-2}$



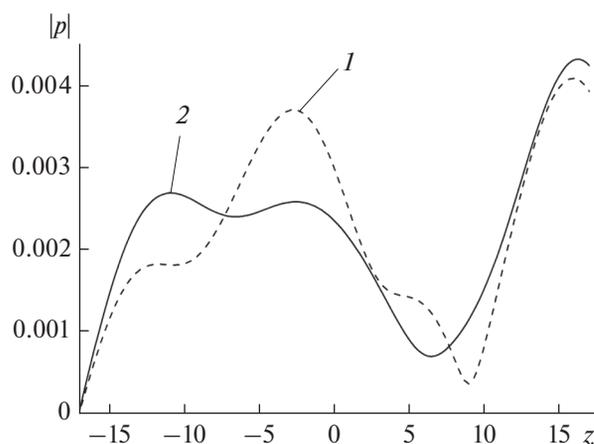
**Рис. 4.** Распределение поля по сечению волновода. Дифракция на сфере ( $\rho = h/2$ ). Кривая 1 – постоянный профиль, 2 – линейная зависимость квадрата волнового числа.



**Рис. 5.** Распределение поля по сечению волновода. Дифракция на сфере ( $\rho = h$ ). Кривая 1 – постоянный профиль, 2 – линейная зависимость квадрата волнового числа.



**Рис. 6.** Распределение поля по сечению волновода. Дифракция на сфероиде ( $\rho = h/2$ ). Кривая 1 – постоянный профиль, 2 – линейная зависимость квадрата волнового числа.



**Рис. 7.** Распределение поля по сечению волновода. Дифракция на сфероиде ( $\rho = h$ ). Кривая 1 – постоянный профиль, 2 – линейная зависимость квадрата волнового числа.

Как известно [13], решение задачи дифракции при помощи МПИУ сводится к интегральному уравнению второго рода:

$$\frac{1}{2} p(\mathbf{r}) = p^0(\mathbf{r}) + \int_S p(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} ds', \quad (36)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. В табл. 2 приведены значения модуля волнового поля в нескольких точках внутри плоского слоя, полученные при помощи ММДИ и МПИУ. Рассматривалась дифракция на вытянутом абсолютно жестком сфероиде, расположенном в слое с постоянным волновым числом. Параметры задачи были выбраны такими же, как и для табл. 1. Результаты получены для двух значений координаты  $\rho$ . Как видно из таблицы, при  $z \neq -h/2$  отно-

сительная разность значений волнового поля, полученных при помощи обоих методов, не превосходит 0.02%. В случае  $z = -h/2$  (на верхней границе слоя) поле равно нулю, и поэтому необходимо сравнивать абсолютную ошибку вычисления поля, которая, как следует из таблицы, очень мала.

На рис. 4–7 изображены зависимости модуля полного поля от координаты  $z$  для задачи дифракции на абсолютно жесткой сфере (рис. 4 и 5) и сфероиде (рис. 6 и 7). Координата  $z$  измерялась в метрах. Координаты источника  $\rho_0 = h$  и  $z_0 = 0$ , координата точек наблюдения  $\rho = h/2$  для рис. 4 и 6 и  $\rho = h$  для рис. 5 и 7 соответственно, угол наблюдения  $\varphi = 180^\circ$ . Остальные параметры задачи такие же, как и для таблиц, приведенных выше.

Кривые 1 на рисунках соответствуют случаю постоянного профиля внутри слоя, а кривые 2 соответствуют зависимости волнового числа внутри слоя вида (35). Как следует из рисунков, кривые 1 и 2 различаются значительно, несмотря на малое значение градиента скорости звука.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 16-02-00247, 18-02-00961).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кравцов Ю.А., Кузькин В.М., Петников В.Г.* Дифракция волн на регулярных рассеивателях в многомодовых волноводах // Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 2. С. 339–343.
2. *Hackman R.H., Sammelmann G.S.* Multiple scattering analysis for a target in an oceanic waveguide // J. Acoust. Soc. Am. 1988. V. 84. № 5. P. 1813–1825.
3. *Григорьева Н.С., Фридман Г.М.* Рассеяние звука сферической упругой оболочкой, помещенной в волновод с жидким дном // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 4. С. 424–432.
4. *Григорьева Н.С., Фридман Г.М.* Дифракция звуковых импульсов на упругой сферической оболочке, помещенной в океанический волновод // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 3. С. 230–239.
5. *Папкова Ю.И.* Поле точечного источника в неоднородном гидроакустическом волноводе с плавающим на поверхности телом // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 4. С. 484–489.
6. *Кюркчан А.Г., Минаев С.А., Соловейчик А.Л.* Модификация метода дискретных источников на основе априорной информации об особенностях дифракционного поля // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46. № 6. С. 666–672.
7. *Маненков С.А.* Применение модифицированного метода дискретных источников к задаче дифракции на неоднородности расположенной в непрерывно-слоистой среде // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54. № 5. С. 541–549.
8. *Kyurkchan A.G., Manenkov S.A.* Application of different orthogonal coordinates using modified method of discrete sources for solving a problem of wave diffraction on a body of revolution // J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2012. V. 113. P. 2368–2378.
9. *Маненков С.А.* Новая версия модифицированного метода дискретных источников применительно к задаче дифракции на теле вращения // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 2. С. 129–136.
10. *Кюркчан А.Г., Смирнова Н.И.* Математическое моделирование в теории дифракции с использованием априорной информации об аналитических свойствах решения. М.: Медиа Паблишер, 2014. 226 с.
11. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
12. *К. Де Бор.* Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь, 1985. 304 с.
13. *Галишиникова Т.Н., Ильинский А.С.* Численные методы в задачах дифракции. М.: Изд-во МГУ, 1987. 208 с.