
**КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН**

УДК 539.3:534.1:534.16

**ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КОМПЛЕКСНЫХ ДИСПЕРСИОННЫХ
КРИВЫХ ИЗГИБНЫХ ВОЛН ЛЭМБА ДЛЯ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН
В НИЗКОЧАСТОТНОМ ДИАПАЗОНЕ**

© 2018 г. Д. Д. Захаров

Российский университет транспорта (РУТ-МИИТ)

127994 Москва, ул. Образцова 9, стр. 9, Россия

e-mail: dd_zakh@mail.ru

Поступила в редакцию 18.07.2017 г.

Итерационно-асимптотическим методом исследуются дисперсионные кривые при динамическом изгибе изотропно-слоистых пластин. На основании предельного вида дисперсионного уравнения в явном виде выводятся асимптотики корней в статике при больших значениях модулей корней. Анализируется роль упругих и геометрических параметров слоев. Показано существование критических значений геометрических параметров, где происходит смена типа асимптотики. Оценивается погрешность асимптотик и предлагается итерационный метод расчета точных значений корней в статике. Выводится низкочастотная длинноволновая асимптотика комплексных дисперсионных кривых, точность которой тем выше, чем ниже частота и больше значение номера кривой, так, что всякая комплексная дисперсионная кривая имеет протяженный пологий участок малой кривизны. Сами дисперсионные кривые также рассчитываются с помощью отдельной итерационной процедуры. Анализируется фундаментальная изгибная мода, ее чисто мнимый аналог и появление дополнительных чисто мнимых мод. Приводятся примеры расчета статических корней и дисперсионных кривых для докритических и закритических значений параметров пластины и оценивается эффективность алгоритма.

Ключевые слова: волны Лэмба, слоистые пластины, волновые числа, комплексный спектр

DOI: 10.1134/S0320791918030176

ВВЕДЕНИЕ

Исследуется полный спектр волновых чисел для изотропно-слоистых пластин в области низких частот, т.е. при всякой фиксированной частоте находится конечное число вещественных и чисто мнимых волновых чисел и счетное множество комплексных волновых чисел с точкой сгущения на бесконечности. Для этой цели используется итерационно-асимптотический подход, применявшийся для однородных упругих и вязкоупругих пластин [1, 2] и обобщенный для случая пакетов слоев [3].

На примере изгиба пластины, содержащей несущий слой и периферийные покрытия, подробно изучаются параметрические эффекты, возникающие за счет различия как геометрических, так и упругих параметров сред. Основное внимание уделяется наименее изученной комплексной части спектра для волн с PSV-поляризацией вектора перемещений.

В отличие от большинства существующих приближенных методов, где используется дискретизация волновода по толщине и где применимость таких методов ограничена несколькими

первыми комплексными модами (см. обзор [3]), в предлагаемом подходе сначала в замкнутом виде находятся асимптотики дисперсионных кривых. Большим параметром считается модуль волнового числа $|k| \gg 1$ и, соответственно, индекс дисперсионной кривой.

Ключевую роль здесь играют предельные значения волновых чисел в статике, для которых находятся собственные асимптотики, строится оценка погрешностей и предлагается эффективный итерационный метод расчета с быстрой сходимостью. Показано, что при различных упругих модулях сред только геометрические параметры определяют растущую часть асимптотик и что существуют такие *критические* значения геометрических параметров, где происходит перераспределение асимптотик.

Результаты дополняются описанием фундаментальных вещественных и чисто мнимых мод и полностью охватывают *весь* спектр волновых чисел в области низких частот.

Обсуждается возможность обобщения приведенного метода на случай большего числа слоев с

их произвольной укладкой по толщине, что может применяться, например, для построения модальных разложений [4], моделирования полей различных источников, оценки погранслоев, построения неотражающих граничных условий [5], а также в различных практических задачах неразрушающего контроля элементов конструкций ультразвуковыми методами.

ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ИЗГИБА ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ И ЕГО ПРЕДЕЛЬНЫЙ ВИД В СТАТИКЕ

Перечислим сначала полученные в предыдущей работе [3] общие результаты, используемые в нашем рассмотрении для поверхностных волн с PSV-поляризацией. В слоистой пластине с произвольным расположением изотропных слоев с текущим номером $j = 1, 2, \dots, n$ и толщиной $h_j = z_{j+1} - z_j$ в плоскости поперечного сечения $-\infty < x < +\infty$, $z_j \leq z \leq z_{j+1}$ предполагаются заданными постоянные Ламе λ_j, μ_j и плотность ρ_j . Зависимость процесса от времени t и продольной координаты x примем в виде $\exp(ikx - i\omega t)$ с постоянными значениями частоты ω и волнового числа k . В очевидных случаях этот множитель опускаем вместе с номером слоя. Тогда для поля перемещений $\mathbf{u} = (u_x, u_z)$ с соответствующим тензором напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$ из уравнений движения Ламе и условий непрерывности на границах раздела

$$[\sigma_{xz}] = [\sigma_{zz}] = 0, \quad [u_x] = [u_z] = 0, \quad (1)$$

в явном виде выводится матрица распространения [3, 6, 7]. В одном слое она имеет вид $\mathbf{P}_\xi(h)$: $\xi(z_2) = \mathbf{P}_\xi(h) \times \xi(z_1)$ для нормированного псевдовектора перемещений и напряжений $\xi = (-ik^{-1}u_x, k^{-1}u_z, k^{-2}\sigma_{zz}, -ik^{-2}\sigma_{xz})^T$.

Соответственно, при большем количестве слоев $\xi(z_{n+1}) = \mathbf{P} \times \xi(z_1)$, где

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}_\xi(h_n) \times \mathbf{P}_\xi(h_{n-1}) \dots \times \mathbf{P}_\xi(h_1), \\ \mathbf{P}_\xi(h_j) &= e_j \mathbf{P}_+^{(j)} + e_j^{-1} \mathbf{P}_-^{(j)}, \\ h_j &= z_{j+1} - z_j, \quad e_j = e^{kh_j}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для матриц $\mathbf{P}_\pm^{(j)}$ при $|k| \gg 1$ также в явном виде были получены [3] асимптотические разложения по степеням k и предельный вид для выражений $\mathbf{P}_\pm^{(j)}$ в статике при $\omega \rightarrow 0$.

Обобщенным волнам Лэмба соответствуют граничные условия

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zz} = 0 \quad (3)$$

на лицевых поверхностях. Если расположение слоев по толщине симметрично, то условие (3) на нижней лицевой поверхности можно заменить условием на срединной поверхности $z = 0$. При рассмотрении изгиба перемещение u_z и напряжение σ_{xz} — четные функции поперечной координаты z , отсчитываемые от срединной поверхности, тогда как u_x и σ_{zz} нечетны, откуда при $z = 0$

$$u_x = 0, \quad \sigma_{zz} = 0. \quad (4)$$

Тем самым можно поставить граничные условия (4) и (3) для верхней полупластины, полагая, что отсчет слоев в ней ведется снизу вверх, начинается со срединной поверхности при $z_1 = 0$ и число слоев соответственно уменьшено. Далее рассмотрим именно такой случай с дисперсионным уравнением [3]

$$\Psi(k, \omega) = 0, \quad (5)$$

где $\Psi = \Delta_{24}^{34} \equiv \det \mathbf{P} \begin{pmatrix} 34 \\ 24 \end{pmatrix}$ есть определитель минора матрицы \mathbf{P} , отвечающий строкам 3, 4 и столбцам 2, 4.

Левые части уравнения (5) могут быть найдены в замкнутом виде и получен их предельный вид при $\omega \rightarrow 0$ [3]. Для трехслойной пластины с симметричным расположением внутреннего слоя $|z| \leq h_1$ (среда 1) и двух одинаковых периферийных слоев $h_1 \leq |z| \leq h_1 + h_2$ (среда 2), такое статическое уравнение с безразмерными величинами

$$\zeta = 2k(h_1 + h_2), \quad \beta = \frac{h_2}{h_1 + h_2}, \quad (6)$$

$$\beta_1 = 1 - \beta = \frac{h_1}{h_1 + h_2}, \quad 1 - 2\beta = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}$$

приводится к следующему виду [3]:

$$\begin{aligned} \text{sh}\zeta + \frac{\tilde{B}_0}{2} \text{sh}\zeta(1 - 2\beta) + \frac{\zeta^2 \tilde{h}_2^1 + \tilde{h}_0^1}{2} \text{sh}\beta_1 \zeta + \\ + \frac{\zeta \tilde{h}_1^2}{2} \text{ch}\beta \zeta + \frac{\zeta^3 \tilde{h}_3^0 + \zeta \tilde{h}_4^0}{2} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

или к экспоненциально-логарифмическому виду

$$\begin{aligned} T_0 = f(\zeta) \Leftrightarrow \zeta = \text{Ln}f(\zeta) = \\ = ip + \text{ln}f(\zeta) \quad (p \equiv 2\pi n), \end{aligned} \quad (8)$$

$$f(\zeta) = T_1 + T_2 + T_3 + T_4, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} T_0 = e^\zeta, \quad T_1 = \zeta^3 |\tilde{h}_3^0|, \quad T_2 = -\zeta^2 \tilde{h}_2^1 \text{sh}\beta_1 \zeta = T_2^+ + T_2^- \\ \left(T_2^\pm = \mp \frac{1}{2} \zeta^2 \tilde{h}_2^1 e^{\pm\beta_1 \zeta} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} T_3 = -\zeta \tilde{h}_1^2 \text{ch}\beta \zeta = T_3^+ + T_3^- \left(T_3^\pm = -\frac{1}{2} \zeta \tilde{h}_1^2 e^{\pm\beta \zeta} \right), \\ T_4 = \zeta |\tilde{h}_4^0| + e^{-\zeta} + \tilde{B}_0 \text{sh}(2\beta - 1)\zeta - \tilde{h}_0^1 \text{sh}\beta_1 \zeta. \end{aligned} \quad (11)$$

Формулы для постоянных величин $\tilde{B}_0, \tilde{h}_2^1, \tilde{h}_0^1, \tilde{h}_1^2, \tilde{h}_3^0, \tilde{h}_1^0$ приведены в [3] и здесь для краткости опущены.

Пользуясь свойством симметрии дисперсионных уравнений относительно перемены знака и операции комплексного сопряжения волновых чисел $k \leftrightarrow -k, \bar{k}$, достаточно ограничиться только первым квадрантом $\text{Re } k \geq 0, \text{Im } k \geq 0$.

Сначала найдем решения статического уравнения (7) и (8). Затем, начиная с низких частот $\omega \approx 0$, исследуем поведение получающихся из уравнения (5) дисперсионных кривых $k(\omega)$. В отличие от [3], ниже рассматривается наиболее общий случай с произвольными значениями упругих и геометрических параметров.

АСИМПТОТИКИ ДЛЯ СТАТИЧЕСКИХ КОРНЕЙ

Уравнения (8) показывают естественное происхождение “ветвления” и нумерации своих корней, далее обозначаемых ζ_n по индексу n дисперсионной кривой. Рассмотрим ζ_n при произвольных значениях $\mu_1 \neq \mu_2, \lambda_1, \lambda_2$ и $h_1, h_2 \neq 0$. Знаки коэффициентов будем характеризовать величинами

$$s = \text{sign}(\tilde{h}_1^2) = \text{sign}(\mu_2 - \mu_1) = -\text{sign}(\tilde{h}_2^1), \quad (12)$$

$$s_1 = (s + 1)/2.$$

В предыдущей работе [3] подробно изучен случай $\mu_1 = \mu_2$ (при этом $T_1 = T_2 = T_3 = 0$), где для $|\zeta| \gg 1, p \gg 1$ исследовалась последовательность приближений ζ_n итерациями

$$\zeta_n \sim \zeta_n^{(m+1)} = ip + \ln f(\zeta_n^{(m)}), \quad \zeta_n^{(0)} \equiv ip = i2\pi n. \quad (13)$$

В этом частном случае последовательность итераций (13) имела относительно простой вид, позволяющий выделить при $p \gg 1$ ее асимптотически главную часть и малую невязку и в итоге найти корни квазистатического уравнения. Аналогично можно поступить и в рассматриваемом здесь общем случае, анализируя поведение последовательности $\zeta_n^{(m)}$, которая имеет вид

$$\zeta_n^{(m)} = i(a_m(p) + b_m) + c_m(p) \ln p + d_m(p), \quad (14)$$

и предельные значения коэффициентов a_m, b_m, c_m, d_m , имеющие достаточно сложную зависимость от параметров p, β и m ($m \rightarrow +\infty$). Поскольку $T_1, T_2, T_3 \neq 0$, то рассмотрение оказывается довольно громоздким и требуется принимать во внимание “ветвление” последовательностей за счет многозначности комплексного логарифма. Поэтому, опуская громоздкие выражения, приве-

дем альтернативный и более краткий вывод асимптотик для последовательностей (14), приводящий к тому же результату.

Предположим, что асимптотика корней ζ_n задается равенством

$$\zeta_n^{as} = i(ap + b) + c \ln p + \ln d, \quad (15)$$

где постоянные $a, c > 0$. Тогда после подстановки (15) в выражения T_α (8)–(11) при $p \gg 1$ получим

$$T_0 = e^{\zeta_n^{as}} = de^{i(ap+b)} p^{f_0} (f_0 = c),$$

$$T_1 = a^3 e^{-i\pi/2} p^{f_1} (1 + t_1) (f_1 = 3),$$

$$T_2^+ = 2^{-1} |\tilde{h}_2^1| a^2 d^{\beta_1} e^{i\beta_1(ap+b) - i\pi s_1} p^{f_2} (1 + t_2) \quad (16)$$

$$(f_2 = 2 + \beta_1 c),$$

$$T_3^+ = 2^{-1} |\tilde{h}_1^2| a d^\beta e^{i\beta(ap+b) - i\pi s/2} p^{f_3} (1 + t_3) (f_3 = 1 + \beta c),$$

где $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_\alpha = 0$ ($\alpha = 1 \dots 3$) и порядок убывания t_α меньше $O(p^{-\epsilon})$ при некотором $\epsilon > 0$.

Графики порядков $f_\alpha(c)$ ($\alpha = 0 \dots 3$) приведены на рис. 1а для $0 < \beta < 2/3$ и рис. 1б для $2/3 < \beta < 1$. Во всех случаях для любого $c > 0$ порядки прочих величин меньше $\max_{\alpha=0,1,2,3} f_\alpha(c)$ и далее для краткости опущены, т.к. $|T_4|, |T_2^-|, |T_3^-| \ll \ll \max(|T_0|, |T_1|, |T_2^+|, |T_3^+|)$.

Будем искать коэффициенты выражения (15), для которых существует такое $\epsilon > 0$, что верно равенство

$$(T_0 - T_1 - T_2 - T_3 - T_4) \times$$

$$\times \left(\max(|T_0|, |T_1|, |T_2^+|, |T_3^+|) \right)^{-1} = O(p^{-\epsilon}) \rightarrow 0 \quad (17)$$

$$(p \rightarrow +\infty).$$

Очевидно, этого можно добиться, когда хотя бы два из выражений (16) имеют одинаковый порядок и их главные части взаимно уничтожаются. Рассмотрение различается при $0 < \beta < 2/3$ и $2/3 < \beta < 1$. Величину $\beta_* = 2/3$ естественно называть критическим значением геометрического параметра; оно означает равенство полной толщины внутреннего слоя толщине одного слоя покрытия ($2h_1 = h_2$).

АСИМПТОТИКИ СТАТИЧЕСКИХ КОРНЕЙ В ДОКРИТИЧЕСКОМ ДИАПАЗОНЕ $\beta < \beta_*$ И ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ

Максимальные порядки среди величин (16) в различных интервалах значений параметра c задаются функциями f_1 ($0 < c < 1/\beta_1$), f_2 ($1/\beta_1 < c < 2/\beta$)

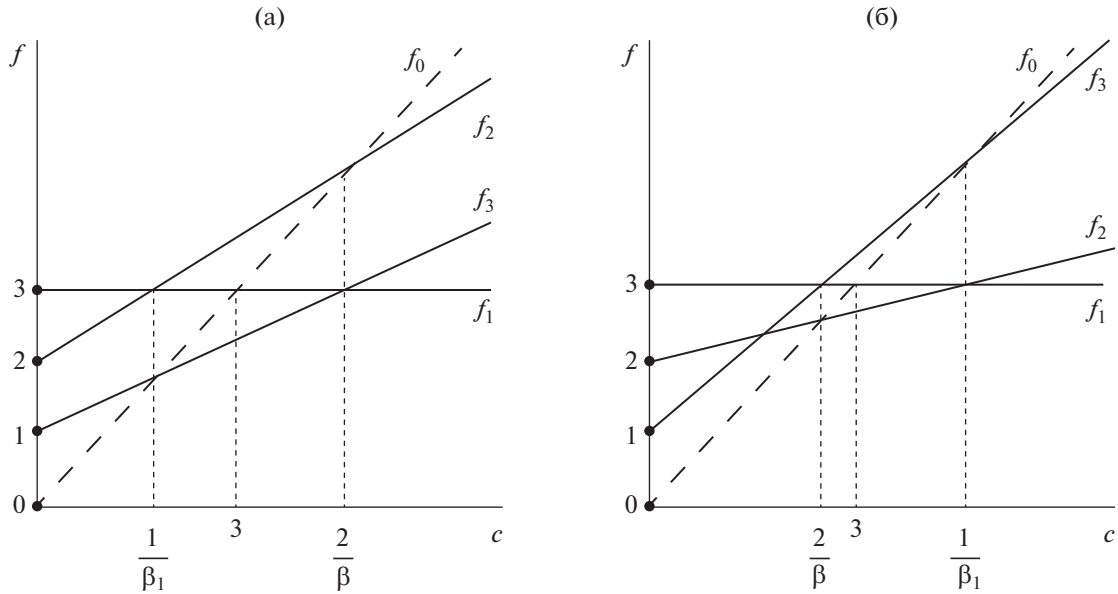


Рис. 1. Порядки $f_\alpha(c)$ для величин T_α ($\alpha = 0 \dots 3$).

и f_0 ($c > 2/\beta$). Совпадения порядков имеют место в точках сопряжения интервалов (рис. 1а) при

$$c = 1/\beta_1: f_1 = f_2 = 3, \tag{18}$$

$$c = 2/\beta: f_2 = f_0 = 2/\beta. \tag{19}$$

Для случая (18) полагаем

$$-T_1^{-1} \times T_2^+ \sim 1, \tag{20}$$

откуда из сравнения получившихся коэффициентов в выражениях (16) с условием (20) вытекают следующие равенства:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1+m_1}{\beta_1}, \quad b = -\frac{\pi s}{2\beta_1} + \frac{2\pi m_2}{\beta_1}, \quad c = \frac{1}{\beta_1}, \\ \ln d &= \frac{1}{\beta_1} \ln \frac{2|\tilde{h}_3^0|}{\beta_1|\tilde{h}_2^1|} + \frac{1}{\beta_1} \ln(1+m_1), \\ \zeta_n^{as} &= \frac{i}{\beta_1} i \left[(1+m_1)p - \frac{\pi s}{2} + 2\pi m_2 \right] + \frac{1}{\beta_1} \ln p + \\ &+ \frac{1}{\beta_1} \ln \frac{2|\tilde{h}_3^0|}{\beta_1|\tilde{h}_2^1|} + \frac{1}{\beta_1} \ln(1+m_1), \end{aligned} \tag{21}$$

Таблица 1. Типы асимптотик в докритическом и за- критическом диапазоне и порядки степенной зависимости от p главных членов уравнения (8)

	(β)	(β_1)
$\beta < \beta_*$	$f_2 = f_0 = 2/\beta > 3$	$f_1 = f_2 = 3$
$\beta > \beta_*$	$f_1 = f_3 = 3$	$f_3 = f_0 = 1/\beta_1 > 3$

где целые числа $m_1 > -1$ и $m_2 \geq 0$. Поскольку $p = 2\pi n$ и $n \in \mathbb{N}$, все семейство асимптотик (21) корректно описывается при $m_1 = m_2 = 0$, т.к. при любых конечных ненулевых значениях m_1 и m_2 будет корректироваться лишь значение индекса $n \leftrightarrow (1+m_1)n + m_2$, и получающееся отличие есть бесконечно малая при $p \rightarrow +\infty$.

Для случая (19) полагаем

$$T_0^{-1} \times T_2^+ \sim 1, \tag{22}$$

откуда из сравнения получившихся коэффициентов в выражениях (16) с условием (22) вытекают следующие равенства:

$$\begin{aligned} a &= \frac{m}{\beta}, \quad b = -\frac{\pi s_1}{\beta}, \quad c = \frac{2}{\beta}, \\ \ln d &= \frac{1}{\beta} \ln \frac{|\tilde{h}_2^1|}{2\beta^2} + \frac{1}{\beta} \ln m, \\ \zeta_n^{as} &= \frac{i}{\beta} i [mp - \pi s_1] + \frac{2}{\beta} \ln p + \frac{1}{\beta} \ln \frac{|\tilde{h}_2^1|}{2\beta^2} + \frac{1}{\beta} \ln m, \end{aligned} \tag{23}$$

где $m \in \mathbb{N}$. Рассуждая аналогично предыдущему, полагаем $m = 1$.

Таким образом, получаем *два итоговых семейства асимптотик докритического диапазона* (причем каждое семейство имеет собственную индексацию), которые мы условно назовем β_1 - и β -асимптотиками:

$$\zeta_n^{as} = \frac{i}{\beta_1} i \left[p - \frac{\pi s}{2} \right] + \frac{1}{\beta_1} \ln p + \frac{1}{\beta_1} \ln \frac{2|\tilde{h}_3^0|}{\beta_1 |\tilde{h}_2^1|}, \quad (24)$$

$$\zeta_n^{as} = \frac{i}{\beta} (p - \pi s_1) + \frac{2}{\beta} \ln p + \frac{1}{\beta} \ln \frac{|\tilde{h}_2^1|}{2\beta^2}. \quad (25)$$

Для β_1 -асимптотики можно предложить также иную форму записи и ввести новую переменную η такую, что

$$\eta = \beta_1 \zeta; -T_2^+ (\zeta^2 \tilde{h}_2^1 / 2)^{-1} = e^\eta, \quad (26)$$

$$\eta_n^{as} = i \left[p - \frac{\pi s}{2} \right] + \ln p + \ln \frac{2|\tilde{h}_3^0|}{\beta_1 |\tilde{h}_2^1|}, \quad (27)$$

и уравнение (8) приводится к виду

$$e^\eta = \varphi(\eta) \Leftrightarrow \zeta = \text{Ln} \varphi(\eta) = ip + \ln \varphi(\eta), \quad (28)$$

$$\varphi(\eta) \equiv \left\{ \frac{2\zeta |\tilde{h}_3^0|}{\tilde{h}_2^1} + \frac{2}{\zeta^2 \tilde{h}_2^1} (-e^\zeta + T_2^- + T_3 + T_4) \right\}_{\zeta=\eta\beta_1^{-1}}. \quad (29)$$

Покажем теперь, что выражения (25) и (24), (27) действительно являются асимптотиками статических корней ζ_n ($n \rightarrow +\infty$) и оценим их порядок погрешности.

Рассмотрим сначала асимптотику (25) и оценим невязку

$$\theta_n = \zeta_n - \zeta_n^{as} \quad (n \rightarrow +\infty), \quad (30)$$

преобразуя уравнение (8) $\zeta_n = ip + (\zeta_n^{as} - ip) + \ln \left[e^{-\zeta_n^{as} + ip} f(\zeta_n) \right]$ к виду

$$\zeta_n = \zeta_n^{as} + \ln \left[e^{-\zeta_n^{as}} f(\zeta_n) \right], \quad (31)$$

$$\theta_n = g(\theta_n), \quad g(\theta_n) \equiv \ln e^{-\zeta_n^{as}} f(\zeta_n^{as} + \theta_n). \quad (32)$$

В предположении $\theta_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) можно доказать следующие равенства и теоремы:

$$e^{-\zeta_n^{as}} f(\zeta_n^{as} + \theta_n) = \begin{cases} e^{\beta_1 \theta_n} [1 + O(p^{-1} \ln p) + O(p^{-1})] + o(p^{-1}), & 0 < \beta \leq 1/2 \\ e^{\beta_1 \theta_n} [1 + O(p^{-1} \ln p) + O(p^{3-2/\beta})] + o(p^{3-2/\beta}), & 1/2 < \beta < 2/3, \end{cases} \quad (33)$$

$$g(\theta_n) = \begin{cases} \beta_1 \theta_n + O(p^{-1} \ln p), & 0 < \beta \leq 1/2 \\ \beta_1 \theta_n + O(p^{3-2/\beta}), & 1/2 < \beta < 2/3. \end{cases} \quad (34)$$

Теорема 1. При достаточно большом $p = 2\pi n$ существуют такие $\varepsilon, C > 0$, что оператор $g(\theta_n)$ (32) является *вполне непрерывным* в круге

$$|\theta_n| \leq Cp^{-\varepsilon} \quad (35)$$

и отображает круг в себя. Утверждение вытекает из оценок (33) и (34), где значение ε в докритическом диапазоне $0 < \beta < 2/3$ достаточно выбрать в интервале $0 < \varepsilon < 1$ ($0 < \beta \leq 1/2$), или $0 < \varepsilon < 2\beta^{-1} - 3$ ($1/2 < \beta < 2/3$).

Следствие 1. По теореме Шаудера о неподвижной точке [8] в круге (35) имеется неподвижная точка $\theta_n = g(\theta_n)$; тогда выражение (25) задает асимптотику семейства статических корней ζ_n при $n \rightarrow +\infty$ с погрешностью не выше, чем $O(p^{-\varepsilon})$. Это вполне согласуется с классическими результатами для одного слоя [1, 2, 9–12].

Теорема 2. Существует такое $1 > \beta' > 0$, что при достаточно большом p оператор $g(\theta_n)$ в круге (35) задает *сжимающее отображение* $|g(\theta_n)| \leq \beta' |\theta_n|$.

Из равенств (30)–(34) следует, что для этого в докритическом диапазоне ($0 < \beta < 2/3$) значение β' достаточно выбрать в интервале $\beta_1 < \beta' < 1$.

Следствие 2. В силу теоремы Банаха [8] *модифицированная рекуррентная процедура*

$$\zeta_n^{(\ell+1)} = \zeta_n^{as} + \ln \left[e^{-\zeta_n^{as}} f(\zeta_n^{(\ell)}) \right], \quad \zeta_n^{(0)} = \zeta_n^{as}, \quad (36)$$

является *быстро сходящейся* (не медленнее, чем по степенному закону), причем к *единственной* неподвижной точке ζ_n в круге (35).

Аналогичные результаты верны для асимптотики (24) или (27). Невязку примем в виде

$$\kappa_n = \eta_n - \eta_n^{as} \quad (n \rightarrow +\infty), \quad (37)$$

преобразуя уравнение (28) $\eta_n = ip + (\eta_n^{as} - ip) + \ln \left[e^{-\eta_n^{as} + ip} \varphi(\eta_n) \right]$ к виду

$$\eta_n = \eta_n^{as} + \ln \left[e^{-\eta_n^{as}} \varphi(\eta_n) \right], \quad (38)$$

$$\kappa_n = q(\kappa_n), \quad q(\kappa_n) \equiv \ln e^{-\eta_n^{as}} \varphi(\eta_n^{as} + \kappa_n). \quad (39)$$

В предположении $\kappa_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) можно доказать следующую оценку:

$$e^{-\eta_n^{as}} \varphi(\eta_n^{as} + \kappa_n) = 1 + O(\kappa_n p^{-1}) + O(p^{-1} \ln p) + O(p^{-3+1/\beta_1}). \quad (40)$$

Теорема 3. При достаточно большом $p = 2\pi l$ существуют такие $\varepsilon, C > 0$, что оператор $q(\kappa_n)$ (39) является *вполне непрерывным* в круге

$$|\kappa_n| \leq Cp^{-\varepsilon}, \quad (41)$$

отображает круг в себя, и притом является *сжимающим*.

Утверждение вытекает из формул (37)–(40) и значение ε в докритическом диапазоне $0 < \beta < 2/3$ достаточно выбрать в интервале $0 < \varepsilon < \min(1, 3 - \beta_1^{-1})$.

Следствие 3. В силу теоремы Банаха [8] *модифицированная рекуррентная процедура*

$$\eta_n^{(\ell+1)} = \eta_n^{as} + \ln \left[e^{-\eta_n^{as}} \varphi(\eta_n^{(\ell)}) \right], \quad \eta_n^{(0)} = \eta_n^{as}, \quad (42)$$

является *быстро сходящейся* (не медленнее, чем по степенному закону), причем к *единственной* неподвижной точке η_n в круге (41). Соответственно, выражение (24) или (27) задает асимптотическое приближение искомой неподвижной точки с погрешностью не выше $O(p^{-\varepsilon})$. Отметим, что асимптотики (24) и (25), вообще говоря, не являются равномерными по параметрам слоев и случаи вырождения параметров должны рассматриваться отдельно.

АСИМПТОТИКИ СТАТИЧЕСКИХ КОРНЕЙ В ЗАКРИТИЧЕСКОМ ДИАПАЗОНЕ $\beta > \beta_*$ И ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ

Теперь наибольшие порядки среди величин (16) задаются функциями f_1 ($0 < c < 2/\beta$), f_3 ($2/\beta < c < 1/\beta_1$) и f_0 ($c > 1/\beta_1$). Соответственно, совпадения порядков (рис. 1б) имеют место при

$$c = 2/\beta: f_1 = f_3 = 3, \quad (43)$$

$$c = 1/\beta_1: f_3 = f_0 = 1/\beta_1. \quad (44)$$

Повторяя рассуждения предыдущего параграфа, для случая (43) полагаем

$$-T_1^{-1} \times T_3^+ \sim 1, \quad (45)$$

откуда из сравнения коэффициентов в выражениях (16) с условием (45) аналогично предыдущему анализу получаем собственную β -асимптотику

$$\zeta_n^{as} = \frac{i}{\beta}(p - \pi s_1) + \frac{2}{\beta} \ln p + \frac{1}{\beta} \ln \frac{2|\tilde{h}_3^0|}{\beta^2 |\tilde{h}_4^2|}. \quad (46)$$

Здесь для β -асимптотики можно предложить иную форму записи:

$$\eta = \beta \zeta: \eta_n^{as} = i(p - \pi s_1) + 2 \ln p + \ln \frac{2|\tilde{h}_3^0|}{\beta^2 |\tilde{h}_4^2|}, \quad (47)$$

так, что для новой переменной η

$$-T_3^+ (\zeta \tilde{h}_4^2 / 2)^{-1} = e^\eta,$$

и уравнение (8) приводится к виду

$$e^\eta = \varphi(\eta) \Leftrightarrow \zeta = \text{Ln} \varphi(\eta) = ip + \ln \varphi(\eta), \quad \varphi(\eta) \equiv \left\{ \frac{2\zeta^2 |\tilde{h}_3^0|}{\tilde{h}_4^2} + \frac{2}{\zeta \tilde{h}_4^2} (-e^\zeta + T_2 + T_3^- + T_4) \right\}_{\zeta=\eta\beta^{-1}}. \quad (48)$$

Для случая (44) полагаем аналогично:

$$T_0^{-1} \times T_3^+ \sim 1, \quad (49)$$

откуда из сравнения коэффициентов в выражениях (16) с условием (49) следует β_1 -асимптотика вида

$$\zeta_n^{as} = \frac{i}{\beta_1} \left(p - \frac{\pi s}{2} \right) + \frac{1}{\beta_1} \ln p + \frac{1}{\beta_1} \ln \frac{|\tilde{h}_4^2|}{2\beta_1}. \quad (50)$$

Рассмотрим сначала свойства β_1 -асимптотики (50). Для невязки (30) и преобразованных уравнений (31), (32) можно доказать следующие оценки:

$$e^{-\zeta_n^{as}} f(\zeta_n^{as} + \theta_n) = \begin{cases} e^{\beta \theta_n} [1 + O(p^{-1} \ln p) + O(p^{-1})] + o(p^{-1}), & 3/4 \leq \beta < 1 \\ e^{\beta \theta_n} [1 + O(p^{-1} \ln p) + O(p^{3-1/\beta_1})] + o(p^{3-1/\beta_1}), & 2/3 < \beta < 3/4 \end{cases}, \quad (51)$$

$$g(\theta_n) = \begin{cases} \beta \theta_n + O(p^{-1} \ln p), & 3/4 \leq \beta < 1 \\ \beta \theta_n + O(p^{3-1/\beta_1}), & 2/3 < \beta < 3/4. \end{cases} \quad (52)$$

Из оценок (51), (52) вытекает, что в закритическом диапазоне $2/3 < \beta < 1$ *теорема 1* и *следствие 1* предыдущего параграфа также будут выполнены

при выборе значения ε в интервале $0 < \varepsilon < \beta_1^{-1} - 3$ ($2/3 < \beta < 3/4$) или $0 < \varepsilon < 1$ ($3/4 \leq \beta < 1$).

Соответственно, *теорема 2* и *следствие 2* предыдущего параграфа имеют место в закритическом диапазоне ($2/3 < \beta < 1$) при выборе значения β' , удовлетворяющего неравенству $\beta < \beta' < 1$.

Для асимптотики (46) или (47) можно доказать оценку

$$e^{-\eta_n^{as}} \varphi(\eta_n^{as} + \kappa_n) = 1 + O(\kappa_n p^{-1}) + O(p^{-1} \ln p) + O(p^{-3+2/\beta}). \tag{53}$$

Из равенства (53) следует, что в закритическом диапазоне $2/3 < \beta < 1$ теорема 3 и следствие 3 предыдущего параграфа будут выполнены при выборе значения ϵ в интервале $0 < \epsilon < \min(1, 3 - 2\beta^{-1})$.

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ СТАТИЧЕСКИХ КОРНЕЙ В ДОКРИТИЧЕСКОМ И ЗАКРИТИЧЕСКОМ ДИАПАЗОНАХ

Используя в докритическом диапазоне приближенные формулы корней (25) и (24), (27) с асимптотическим порядком погрешности не выше $O(p^{-\epsilon})$ с приведенными выше значениями ϵ , найдем точные значения корней по рекуррентным процедурам (36) и (42) соответственно.

Для численных примеров выбирались параметры изотропного материала центрального слоя (среда 1) с плотностью $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$ и скоростями объемных и сдвиговых волн $c_p = 6400 \text{ м/с}$ и $c_s = 3150$. Для периферийного покрытия (среда 2) принимались значения $\rho = 1170 \text{ кг/м}^3$, $c_p = 2610 \text{ м/с}$, $c_s = 1100$.

Корни ζ_n рассчитывались при докритическом значении $\beta = 1/2$ ($h_1 = h_2$) с помощью пакета программ MAPLE. Итерационный процесс расчета прекращался при одновременном выполнении неравенств $|\zeta_n^{(\ell+1)} - \zeta_n^{(\ell)}| \leq 10^{-10}$ и $|\Delta_{24}^{34}(\zeta_n^{(\ell)})| \leq 10^{-12}$.

Полученные результаты для докритического случая приведены на рис. 2а и 2б при $n = 1, 2, \dots, 50$. Точные значения ζ_n показаны квадратами и кружками, сплошными кривыми изображены асимптотики (24) и (25). Метки асимптотик β и β_1 приведены на рисунках рядом с графиками. Те же результаты в увеличенном масштабе приведены на рис. 3а и 3б, т.к. при $\beta = \beta_1 = 1/2$ графики мнимых частей параллельны и конечное расстояние между ними относительно невелико.

Асимптотики хорошо согласуются с численными значениями, и необходимое количество итераций в рекуррентных формулах (36) или (42) не превышает нескольких десятков.

На рис. 4 приведены графики относительной погрешности. Относительная погрешность для первых корней составляет 20% для β -асимптотики и 6% для β_1 -асимптотики. Затем относительная и абсолютная погрешности быстро стремятся

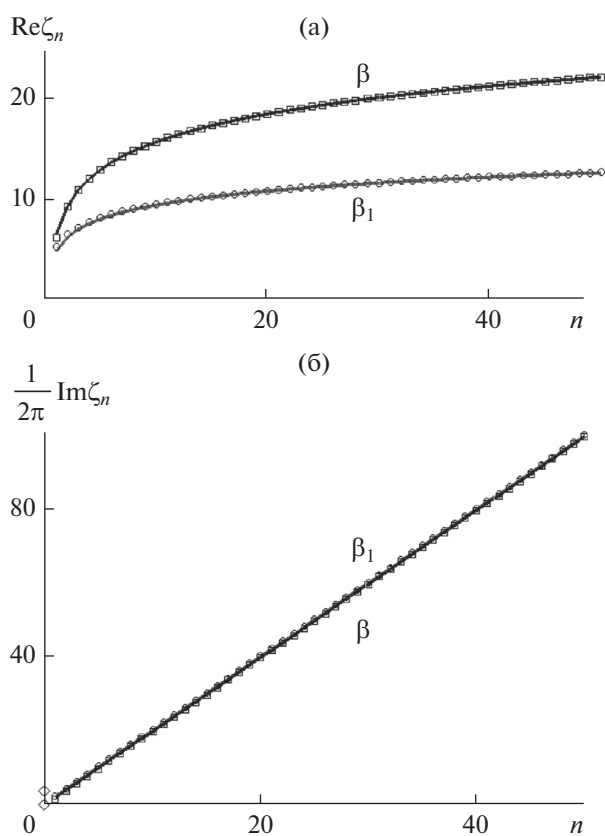


Рис. 2. Вещественные (а) и мнимые (б) части корней ζ_n изгибных мод для $\beta = 1/2$ и их асимптотики (сплошные кривые) при $n = 1, 2, \dots, 50$.

к нулю начиная с $n \geq 3$, и чем больше номер моды n , тем точнее аппроксимации (24) и (25).

Заметим также, что статическое уравнение (8) всегда имеет кратный корень $\zeta = 0$, как это имеет место и в однослойной пластине. Но всегда имеется также и чисто мнимый корень; при $\beta = 1/2$ он равен $\zeta \approx 0 + i3.88908628$. На рис. 2, 3 оба эти корня отмечены ромбами. Наличие чисто мнимого корня обусловлено именно слоистостью, в однослойной пластине, как известно, чисто мнимых корней нет [9–12].

Действительно, можно показать, что поведение непрерывной вещественной функции $g(y) = -i [e^\zeta - f(\zeta)]_{\zeta=iy}$ при малых и больших y определяется равенствами

$$g(y) = -Gy^3 [1/6 + O(y)] < 0 \quad (y \rightarrow +0),$$

$$g(y) = |\tilde{h}_3^0| y^3 [1 + O(y^{-1})] > 0 \quad (y \rightarrow +\infty), \tag{54}$$

$$G = 2 + \tilde{h}_0^1 \beta^3 + 6\tilde{h}_2^1 \beta + 3\tilde{h}_4^2 \beta^2 + 6\tilde{h}_3^0 + 6(\beta - \beta_1)^3 > 0,$$

что в явном виде доказывает существование чисто мнимого корня — наличие нуля непрерывной

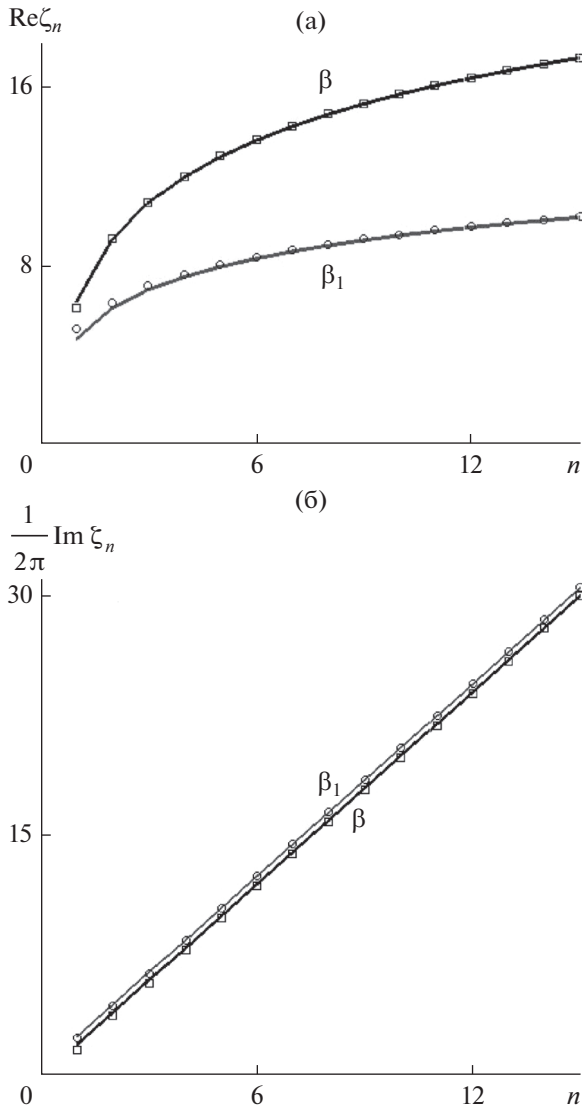


Рис. 3. Вещественные (а) и мнимые (б) части корней ζ_n изгибных мод для $\beta = 1/2$ и их асимптотики (сплошные кривые) при $n = 1, 2, \dots, 15$.

функции между ее значениями разных знаков. Типичный график функции $g(y)$ при $\beta = 1/2$ и заданных выше параметрах слоев показан на рис. 5.

Отметим, что неравенства (54) не выполняются при $\mu_1 = \mu_2$. В этом случае знак функции не меняется, т.к. $g(y)$ приводится к виду

$$g(y) = 2 \left[\sin y + \frac{\tilde{h}_0^1}{2} \sin(\beta_1 y) - y \frac{|\tilde{h}_1^0|}{2} \right] = -2 \left[\chi(y) + \frac{\tilde{h}_0^1}{2} \chi(\beta_1 y) \right],$$

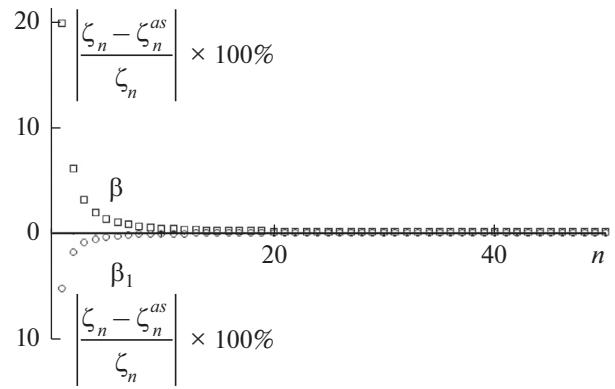


Рис. 4. Относительная погрешность асимптотик корней (24) и (25) для изгибных мод при $\beta = 1/2$ и $n = 1, 2, \dots, 50$.

$$\frac{\tilde{h}_0^1}{2} = \frac{1}{\beta_1} \left[\frac{|\tilde{h}_1^0|}{2} - 1 \right] = \frac{\mu_1 (\lambda_1 - \lambda_2)}{(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + \mu_1)}, \quad \left| \frac{\tilde{h}_0^1}{2} \right| < 1,$$

$$\chi(y) = y - \sin y = 2 \int_0^y \sin^2 \frac{y_1}{2} dy_1 > 0 \text{ при } y > 0.$$

Отсюда немедленно следует постоянство знака при $y > 0$:

$$g(y) = -4 \left\{ \left(1 + \frac{\tilde{h}_0^1}{2} \right) \int_0^{\beta_1 y} + \int_{\beta_1 y}^y \right\} \sin^2 \frac{y_1}{2} dy_1 < 0,$$

и, как и в случае однородной пластины, чисто мнимого корня нет (см. [3]).

Поведение функции $g(y)$ в закритическом и докритическом диапазонах значений β качественно не отличается. Закритическое значение геометрического параметра выбиралось равным $\beta = 3/4$ ($3h_1 = h_2$). Значение дополнительного чисто мнимого корня уравнения (8) при этом равно $\zeta \approx 0 + i4.82534157$.

Для расчета корней ζ_n использовались асимптотики (46), (50) и аналогичные итерационные процедуры (36), (42) с теми же критериями точности, что и выше. Численные результаты для закритического случая приведены на рис. 6–8.

Для закритического случая $\beta = 3/4$ относительная погрешность для первых корней составляет 22% для β -асимптотики и 5.5% для β_1 -асимптотики. Начиная с $n \geq 3$ относительная и абсолютная погрешности быстро убывают и стремятся к нулю.

Таким образом, численное тестирование подтверждает теоретические выкладки и асимптотические оценки, приемлемую точность β - и β_1 -асимптотик, а также эффективность алгоритмов расчета точных значений корней ζ_n как в докрити-

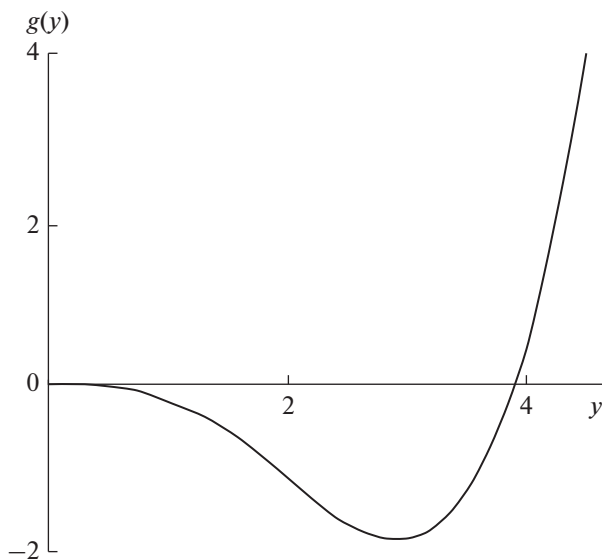


Рис. 5. Пример графика функции $g(y)$ в докритическом диапазоне при $\beta = 1/2$.

ческим, так и в закритическом диапазоне значений безразмерного геометрического параметра.

В рассмотренных примерах с ростом индекса n в каждом семействе корней количество итераций для достижения заданной точности уменьшается от нескольких десятков до нескольких единиц при $n \geq 10$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ КОНТРОЛЬ ЧИСЛА КОРНЕЙ В СТАТИКЕ

Контроль числа корней как для докритического, так и для закритического случая проводился с использованием принципа аргумента [13]. Для этого на комплексной плоскости выбирался контур Γ в виде квадрата со сторонами $[0, p]$ и $[0i, pi]$ ($p = 2\pi n$) на вещественной и мнимой оси с вырезами в виде четверти окружности малого радиуса r_0 в левом нижнем углу для обхода всегда существующего корня $\zeta_0 = 0$ и в виде полуокружности такого же радиуса для обхода чисто мнимого корня.

Пример контура Γ приведен на рис. 9а для $n = 5$, $r_0 = \pi/40$ и докритического значения $\beta = 1/2$. Фрагмент контура Γ вблизи начала координат и чисто мнимого корня показан в увеличенном масштабе на рис. 9б. Точные значения корней показаны квадратами, кружками и ромбами.

Согласно нашему рассмотрению, если внутри такого контура Γ находится ровно m корней изгибных мод, то в силу аналитичности функции $f(\zeta)$ при положительном обходе контура Γ для приращения аргумента должно выполняться равенство

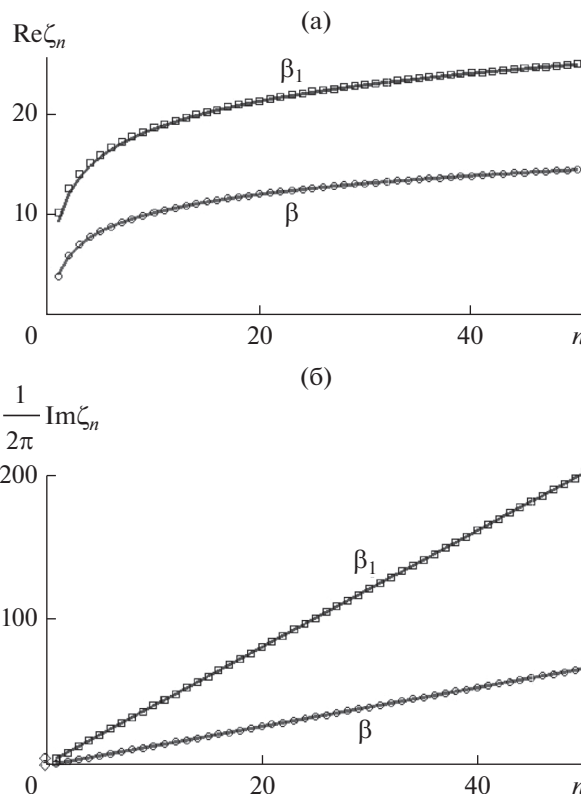


Рис. 6. Вещественные (а) и мнимые (б) части корней ζ_n изгибных мод для $\beta = 3/4$ и их асимптотики (сплошные кривые) при $n = 1, 2, \dots, 50$.

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg [e^\zeta - f(\zeta)] = m. \tag{55}$$

Равенство (55) проверялось для докритического и закритического случаев при обходе контура Γ из исходной точки $\zeta_* = r_0 + i0$ при различных значениях $n = 1 \dots 100$, $r_0 = 10^{-3} \dots 10^{-2}$ и давало полное совпадение левой и правой части.

График изменения нормированного аргумента функции $\frac{1}{2\pi} \arg [e^\zeta - f(\zeta)]$ для контура Γ (рис. 9а и 9б) показан жирной линией на рис. 9в (при этом $m = 4$). По горизонтальной оси отложена длина дуги $L(\zeta, \zeta_*)$, отсчитываемая вдоль контура от начальной точки ζ_* до текущей точки контура ζ . Тонкими вертикалями отмечены угловые точки перехода на различные стороны квадрата. Наиболее крутые участки графиков отвечают изменению аргумента на малых дугах окружностей вблизи начала координат и вблизи чисто мнимого корня.

Поведение аргумента при прочих значениях параметров слоев, а также величин n , m и β выглядит аналогично.

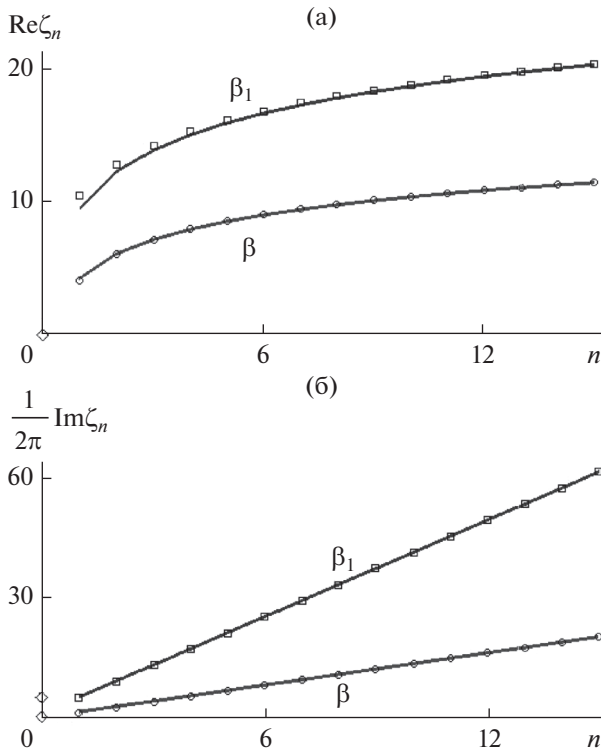


Рис. 7. Вещественные (а) и мнимые (б) части корней ζ_n изгибных мод для $\beta = 3/4$ и их асимптотики (сплошные кривые) при $n = 1, 2, \dots, 15$ в увеличенном масштабе.

ДЛИННОВОЛНОВЫЕ АСИМПТОТИКИ И ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ДИСПЕРСИОННЫХ КРИВЫХ

Все множество комплексных дисперсионных кривых естественным образом разбивается на два счетных подмножества в соответствии с β - или β_1 -семействами статических корней (и их асимптотиками).

Для аппроксимации n -й дисперсионной кривой в каждом подмножестве воспользуемся общим результатом [3] – двухчленной асимптотикой разложения $k_n^2(\omega^2)$ в ряд Маклорена по степеням ω^2 ($k_n(0) = \zeta_n/2h$):

$$k_n^{as}(\omega) = k_n(0) \left\{ 1 - \frac{\omega^2}{k_n^2(0)} \frac{\partial \Psi / \partial (k_n^2)}{\partial \Psi / \partial (\omega^2)} \Big|_{\omega=0} \right\}^{1/2} \sim k_n(\omega), \tag{56}$$

$$\frac{\partial \Psi / \partial (k_n^2)}{\partial \Psi / \partial (\omega^2)} \Big|_{\omega=0} = O(k_n^{-1}(0)),$$

так что $[k_n(\omega)/k_n^{as}(\omega)]^2 = 1 + \omega^2 o(\omega^2/k_n^2(0))$. Асимптотика (56) означает, что с ростом n дисперсионные кривые начинаются со все более

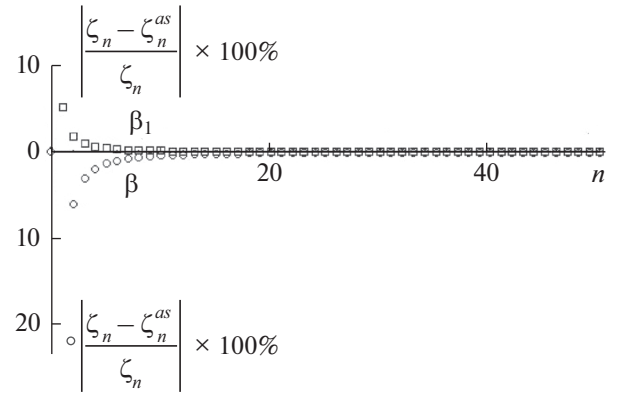


Рис. 8. Относительная погрешность асимптотик корней (45) и (46) для изгибных мод при $\beta = 3/4$ и $n = 1, 2, \dots, 50$.

протяженного пологого участка. Она также позволяет рассчитывать искомые кривые итерационным методом Ньютона.

При малой частоте ω асимптотика (56) выбирается в качестве начального приближения волнового числа, и точное значение $k_n(\omega)$ может быть рассчитано по итерационной формуле

$$k^{(\ell+1)} = k^{(\ell)} - \Psi(k^{(\ell)}, \omega) [\partial \Psi(k, \omega) / \partial k]^{-1} \Big|_{k=k^{(\ell)}}. \tag{57}$$

При больших значениях ω начальное приближение может быть получено, например, экстраполяцией трехточечным полиномом Лагранжа по уже полученным точным значениям $k_n(\omega)$ для предыдущих частот.

Тестовый расчет проводился с помощью пакета MAPLE, где итерации (57) прекращались при одновременном выполнении неравенств $|k^{(\ell+1)} - k^{(\ell)}| \leq 10^{-10}$ и $|\Psi(k^{(\ell)}, \omega)| \leq 10^{-12}$. Параметры сред выбирались те же, что и в статике. Графики безразмерных волновых чисел $2k_n(\Omega)h$ в зависимости от безразмерной частоты $\Omega = 2\omega h/c_s$ (h – полутолщина пластины, c_s – скорость волн сдвига в среде 1) представлены на рис. 10 и 11 сплошными линиями вместе со своими асимптотиками (56), показанными пунктиром.

Как в докритическом ($\beta = 1/2$), так и в закритическом случае ($\beta = 3/4$) показаны первые пять кривых из β -семейства и первые три кривые из β_1 -семейства. Количество кривых выбрано по соображениям масштаба для показа на одном рисунке; по тем же соображениям каждая кривая показана лишь в том интервале частот, где ясно видно как ее согласование, так и начало расхождения с соответствующей асимптотикой (56).

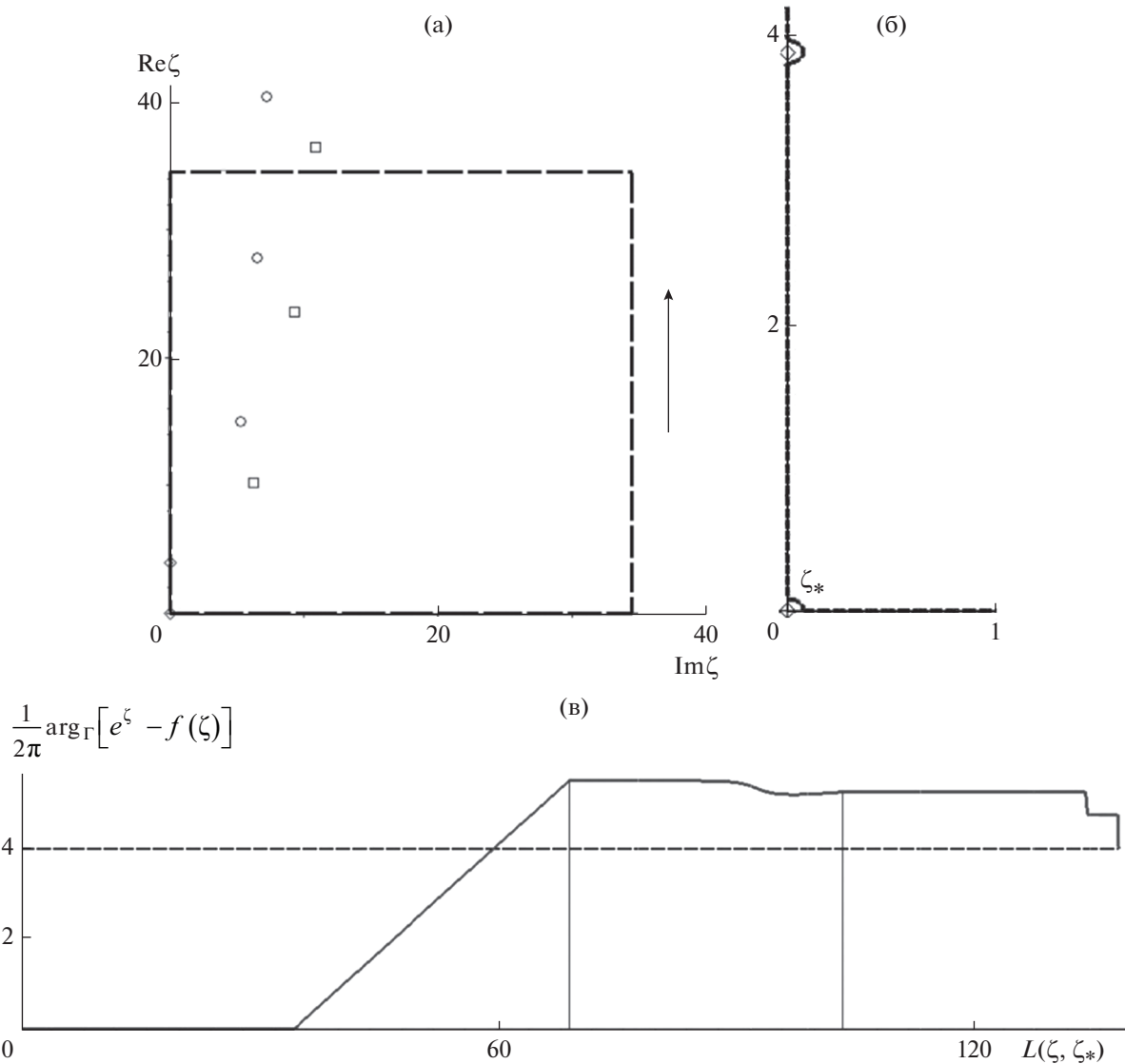


Рис. 9. (а) Контур Γ при $\beta = 1/2$, $n = 5$, $r_0 = \pi/40$, $m = 4$; (б) увеличенный фрагмент контура Γ вблизи корней на мнимой оси; (в) график изменения аргумента при смещении точки вдоль контура Γ .

Во всех случаях численный расчет подтверждает оценки (56) и наличие пологого участка кривой в низкочастотной области, растущего с ростом индекса, что и послужило причиной ограничить количество графиков на рис. 10 и 11.

Интервал согласования с асимптотикой для мнимой части волнового числа оказывается существенно больше интервала согласования для вещественной части. Кроме того, итоговый интервал согласования в рассмотренных докритическом и закритическом случаях для семейства кривых β_1 оказывается существенно больше, чем для семейства кривых β , и это различие возрастает с ростом индексов кривых. Очевидную разномасштабность дисперсионных кривых, принадлежащих к различным семействам, можно объяснить

различными масштабами динамических процессов в слоях. Семейство кривых β_1 может быть приведено к масштабу $|kh_1| \sim p/2$ в области низких частот $\omega \approx 0$ для индекса n ($p = 2\pi n$), тогда как β -семейство – к масштабу $|kh_2| \sim p/2$.

Введем теперь характерные времена пробега по толщине каждого слоя наиболее медленной (сдвиговой) волной в данной среде, обозначая их $\tau_1 = (h/c_S)_1$ и $\tau_2 = (h/c_S)_2$. Для докритического значения $\beta = 1/2$ отношение этих масштабов времени равно $\tau_2/\tau_1 \approx 2.8125$; для закритического значения $\beta = 3/4$ получаем $\tau_2/\tau_1 \approx 8.4375$. Частоты собственных сдвиговых резонансов (частоты

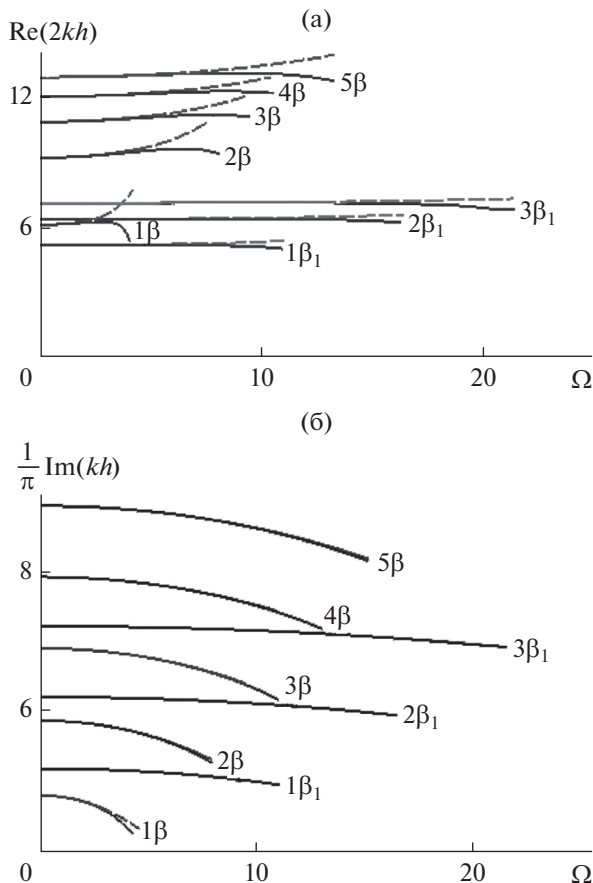


Рис. 10. Вещественная (а) и мнимая (б) часть волновых чисел $2kh$ (сплошные линии) и их асимптотики (пунктир) при докритическом $\beta = 1/2$ как функции Ω для изгибных мод при $n = 1, 2, 3, 4, 5$ (β -кривые) и $n = 1, 2, 3$ (β_1 -кривые).

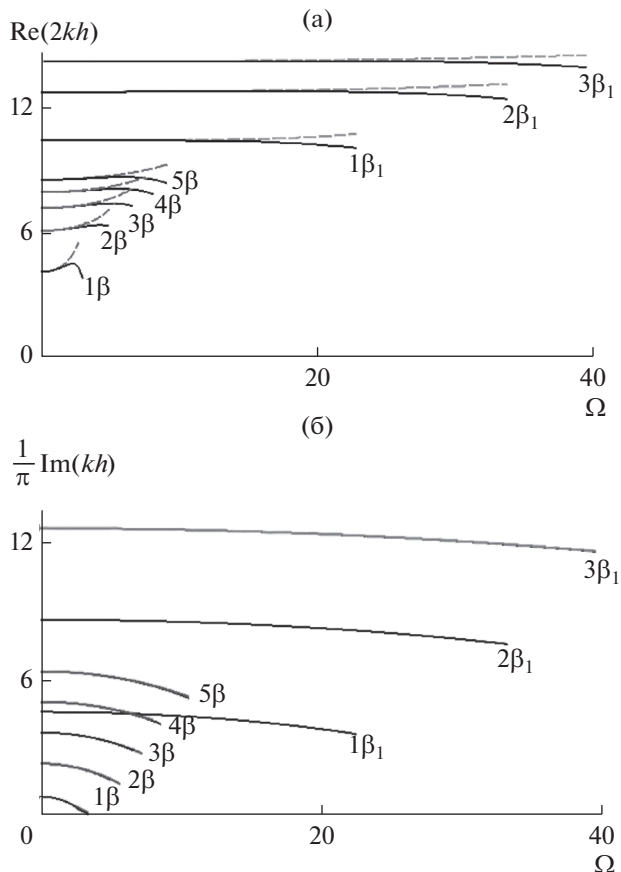


Рис. 11. Вещественная (а) и мнимая (б) части волновых чисел $2kh$ (сплошные линии) и их асимптотики (пунктир) при $\beta = 3/4$ как функции Ω для изгибных мод при $n = 1, 2, 3, 4, 5$ (β -кривые) и $n = 1, 2, 3$ (β_1 -кривые).

среза) в каждом из слоев, рассматриваемых по отдельности, обратно пропорциональны временам пробега $\omega_{1\text{рез}} \sim \pi/\tau_1$ и $\omega_{2\text{рез}} \sim \pi/\tau_2$. Разница масштабов для времен пробега объемных волн по толщинам слоев аналогична.

Как легко видеть, различия в изменяемости дисперсионных кривых семейств β и β_1 на рис. 10 и 11 четко коррелируют с указанной разницей характерных времен.

НИЗКОЧАСТОТНЫЕ АСИМПТОТИКИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ И ЧИСТО МНИМЫХ ДИСПЕРСИОННЫХ КРИВЫХ

В низкочастотной области кроме комплексных дисперсионных кривых всегда существует фундаментальная вещественная кривая A_0 и ее чисто мнимый аналог – кривая A_{0i} . Как было показано в [14–16], даже в случае анизотропных материалов с несимметричной укладкой упругих слоев по толщине можно построить асимпто-

тически точные изгибные длинноволновые низкочастотные уравнения движения и вывести соответствующие дисперсионные соотношения. Для изгиба изотропно-слоистых пластин они задаются двумя равенствами:

$$\omega^2 \left[\sum_j \rho_j (z_{j+1} - z_j) \right] = \frac{2}{3} \left[\sum_j \frac{\mu_j (z_{j+1}^3 - z_j^3)}{1 - \nu_j} \right] k^4, \tag{58}$$

$$\sum_j \frac{\mu_j (z_{j+1}^2 - z_j^2)}{1 - \nu_j} = 0.$$

Второе из равенств (58) задает положение системы координат по вертикали и при симметричном расположении слоев по толщине будет выполняться автоматически.

Другая чисто мнимая кривая I_0 появляется в силу существования чисто мнимого статического корня при выполнении условия (54). При низких частотах кривая I_0 описывается той же асимпто-

тической формулой (56), что и комплексные дисперсионные кривые, с подстановкой собственного статического корня.

В тестовом расчете для начальных приближений волновых чисел использовались асимптотики (58) и (56) соответственно, а затем значения уточнялись с помощью итерационной процедуры (57). При больших частотах для начальных приближений волновых чисел применялась экстраполяция полиномом Лагранжа [17] по трем предыдущим полученным значениям. Критерии точности не менялись.

Результаты для докритического и закритического случаев показаны на рис. 12а и 12б. Дисперсионные кривые показаны сплошными линиями, а их асимптотики – пунктиром. Точность приближений для кривых A_0 и A_{0i} вполне согласуется с двумерной теорией пластин. Точность асимптотики (56) для кривой I_0 существенно выше и аналогична точности β -асимптотики для комплексных кривых. Заметим, что в докритическом случае асимптотика (56) приближает кривую I_0 снизу, а в закритическом случае – сверху.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Ключевое значение для построения комплексной части спектра $\{k_n(\omega)\}$ имеет структура множества безразмерных статических корней $\{\zeta_n\}$. Как показано выше, $\text{Re } \zeta_n = O(\ln p)$, $\text{Im } \zeta_n = O(p)$ ($p = 2\pi n$), т.е. вид зависимости корня от индекса n тот же, что и в однородном слое. Однако коэффициенты при главной части ζ_n различны и определяются только геометрическими параметрами (относительными толщинами слоев), что приводит к разделению всего множества $\{\zeta_n\}$ на два счетных подмножества комплексных корней с собственной нумерацией внутри каждого из них. При этом существует критическое значение $\beta_* = 2/3$ геометрического параметра, при котором изменяется тип асимптотик ζ_n .

Величины следующего порядка в асимптотиках – константы – зависят только от упругих параметров сред.

В докритическом и закритическом диапазоне значений геометрического параметра, найденные асимптотики β - и β_1 -семейств получаются из анализа членов различного порядка в предельном статическом уравнении (8) (см. таблицу).

Тем не менее, итоговые выражения для самих β - и β_1 -асимптотик в каждой паре формул (25), (46) и (24), (50) оказываются одинаковыми в силу равенств

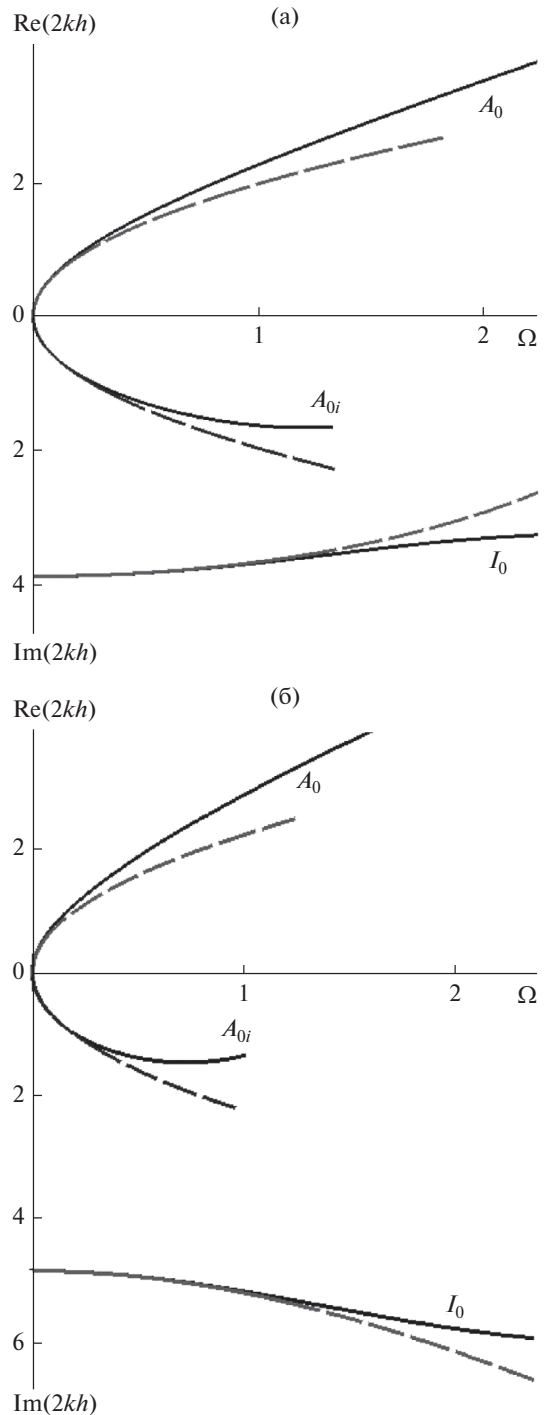


Рис. 12. Фундаментальная вещественная кривая A_0 и чисто мнимые кривые A_{0i} и I_0 для докритического случая $\beta = 1/2$ (а) и закритического случая $\beta = 3/4$ (б).

$$\frac{2|\tilde{h}_3^0|}{\beta^2|\tilde{h}_1^2|} = \frac{|\mu_1 - \mu_2|}{(\mu_1 + \mu_2)} \times \left(1 + \frac{2\mu_1\mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)(\lambda_2 + \mu_2)} \right)^{-1} = \frac{|\tilde{h}_2^1|}{2\beta^2}, \tag{59}$$

$$\frac{|\tilde{h}_1^2|}{2\beta_1} = \frac{2|\mu_1 - \mu_2|}{(\mu_1 + \mu_2)} \times \left(1 + \frac{2\mu_1\mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)(\lambda_1 + \mu_1)} \right)^{-1} = \frac{2|\tilde{h}_3^0|}{\beta_1|\tilde{h}_2^1|}. \quad (60)$$

Выражения (59), (60) подтверждают, что полученные асимптотики не являются равномерными, и случаи вырождения параметров должны исследоваться отдельно (случай $\mu_1 = \mu_2$ и случаи вырождения толщин исследованы в [3]).

Другим осложнением, порождаемым слоистой структурой, является появление кроме корня $\zeta_0 = 0$ дополнительных чисто мнимых корней ζ_n , отсутствующих при $\mu_1 = \mu_2$.

Перечисленные свойства приводят к существенным отличиям в свойствах дисперсионных кривых $\{k_n(\omega)\}$. Так, комплексные дисперсионные кривые четко разделяются на β - и β_1 -семейства, причем различие в динамических параметрах слоев (временах пробега собственных Р- и S-волн по толщинам слоев) коррелирует с изменчивостью по частоте для каждой функции $k_n(\omega)$ в рассматриваемом семействе.

В низкочастотной области кроме фундаментальной изгибной моды A_0 и ее чисто мнимого аналога (моды A_{0i}), появляется дополнительная чисто мнимая дисперсионная кривая I_0 .

Все перечисленные дисперсионные кривые хорошо аппроксимируются полученными длинноволновыми низкочастотными асимптотиками, интервал применимости которых в каждом семействе различен и зависит от различия геометрических и динамических параметров слоев. В каждом семействе этот интервал применимости монотонно возрастает с ростом индекса кривой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренный итерационно-асимптотический подход к расчету дисперсионных кривых для собственных волн с PSV-поляризацией в упругих слоистых пластинах со свободными лицевыми поверхностями позволяет составить полное представление о спектре волновых чисел в низкочастотном диапазоне. Достоинством метода является возможность получать приближенные (асимптотически точные) формулы для зависимостей $k_n(\omega)$ в замкнутом виде. Основными результатами такого подхода являются полученные в замкнутом виде дисперсионное уравнение и его предельный вид в статике, асимптотики статических корней при больших индексах корней (большом модуле волнового числа) и простые алгоритмы расчета точных значений этих корней, длинно-

волновые асимптотики дисперсионных кривых и простые алгоритмы расчета точных кривых. Эффективность метода подтверждают приведенные численные примеры.

Отметим существование критических сочетаний геометрических параметров, для которых изменяется вид статической асимптотики корней. Выше приведен анализ докритического и закри- тического диапазона значений. По соображениям размера статьи случай достижения критического значения здесь не рассматривается и будет приведен в отдельной публикации.

Метод может быть обобщен как для других вариантов однородных краевых условий на лицевых поверхностях, так и на случай линейно-вязкоупругих материалов, что позволяет находить полный спектр волновых чисел в заданном интервале частот.

Изложенный подход, основанный на выводе асимптотики статических корней, может быть применен при большем числе слоев и разбивается на следующие основные этапы.

Во-первых, необходимо получить предельный вид дисперсионного уравнения в статике (см. [3]), основанный на представлении матрицы распространения в виде (2) (j – номер текущего слоя) или в экспоненциальной форме с представлением компонент в замкнутом виде:

$$P = \sum P(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \exp\left(k \sum_{j=1}^n \delta_j h_j\right), \quad (61)$$

$$P(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) = \prod_{j=1}^n P_{\tau_{n+1-j}}^{(n+1-j)}, \quad \delta_j = \mp,$$

где суммирование ведется по всем различным сочетаниям знаков $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$. Как показано в [3], в статике предельный вид определителя минора матрицы (61), отвечающий заданным на лицевых поверхностях краевым условиям, приводит к уравнению вида

$$\sum_{\alpha} T_{\alpha} = 0 \left(T_{\alpha} = Q_{\alpha} \zeta^{k_{\alpha}} e^{\zeta \ell_{\alpha}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)} \right), \quad (62)$$

с конечным числом различных слагаемых полиномиально-экспоненциального вида T_{α} , где k_{α} – постоянная степень, $\ell_{\alpha}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)$ – линейная функция β_j , $\zeta = kh$ – безразмерное волновое число, $\beta_j = h_j/h$ – безразмерная толщина слоя j ($\sum_j \beta_j = 1$), и $h = \sum_j h_j$ – полная толщина пластины. Постоянный коэффициент Q_{α} , вообще говоря, зависит от толщин слоев и упругих модулей.

Таким образом, уравнение (62) в общем случае имеет полиномиально-экспоненциальный вид, аналогично рассмотренному выше более простому случаю.

Во-вторых, асимптотики статических корней ищутся в том же виде (15) $\zeta_n^{as} = i(ap + b) + c \ln p + \ln d$, для чего сначала определяются максимальные значения порядков – степеней выражений $T_\alpha|_{\zeta=\zeta_n^{as}}$ по параметру $p = 2\pi n \rightarrow +\infty$:

$$T_\alpha|_{\zeta=\zeta_n^{as}} \sim p^{f_\alpha} Q_\alpha (ia)^{k_\alpha} (1 + O(p^{-1} \ln p))^{k_\alpha} \times \times d^{\ell_\alpha(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)} e^{i(ap+b)\ell_\alpha(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)}, \quad (63)$$

$$f_\alpha = k_\alpha + c\ell_\alpha(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N). \quad (64)$$

При различных $c > 0$, исходя из попарного сравнения порядковых функций (64) в различных диапазонах значений β_j , находится кусочно-линейная функция максимально возможного порядка $F = \max_a f_\alpha$ и граничные точки $c_*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)$ для ее интервалов сопряжения (угловых точек полученной ломаной). В таких точках рассматриваются дополнительные уравнения на получившиеся постоянные множители при степенях p в соответствующих выражениях T_α (63).

Например, при $f_1 = f_2$, получаем

$$c = \frac{k_2 - k_1}{l_1 - l_2} = c_*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N). \quad (65)$$

Тогда величины $a > 0$, b и d должны быть таковы, чтобы выполнялась оценка вида

$$\left(T_1 + T_2 + \sum_{\alpha>2} T_\alpha\right) T_1^{-1} = O(p^{-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0, \quad (66)$$

т.е. уравнение (62) выполнялось асимптотически. Следовательно, из условия $T_1 \sim -T_2$ получим равенства

$$Q_1 (ia)^{k_1} d^{\ell_1} e^{i(ap+b)\ell_1} = Q_2 (ia)^{k_2} d^{\ell_2} e^{i(ap+b)\ell_2 \pm i\pi},$$

$$d = \frac{1}{\ell_1 - \ell_2} \ln \left| \frac{Q_2}{Q_1} \right| a^{k_2 - k_1}, \quad (67)$$

$$(ap + b)(\ell_1 - \ell_2) \mp \pi + (k_1 - k_2)\pi/2 + + \arg \frac{Q_1}{Q_2} = 2\pi m, \quad m \in Z.$$

Если, для определенности, принять $\ell_1 > \ell_2$, то

$$a = \frac{2\pi m_1}{(\ell_1 - \ell_2)p} \quad (m_1 \in Z), \quad (68)$$

$$b = \frac{1}{\ell_1 - \ell_2} \left(\pm\pi + (k_2 - k_1)\pi/2 - \arg \frac{Q_1}{Q_2} + 2\pi m_2 \right), \quad (69)$$

$$m_1 + m_2 = m.$$

Как легко видеть, семейство асимптотик, задаваемое набором значений a, b, c, d (65)–(69) не изменится, если положить $a = (\ell_1 - \ell_2)^{-1}$ и в выражении (69) выбрать наименьшее значение $m_2 = m_*$, задающее положительное значение сум-

мы $ap + b$ при наименьшем $p = 2\pi$. При другом выборе m_2 семейство асимптотик (15) останется прежним, в нем лишь будет рассматриваться ветвь следующего порядка при $p = 2\pi(n + m_2 - m_*)$.

Затем рассматривается следующая угловая точка, и т.д.

Критические значения геометрических параметров будут порождаться такими частными случаями, когда какие-либо из найденных граничных точек вида $c_*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)$ будут совпадать друг с другом, т.е. когда какой-либо из интервалов сопряжения соответствующих значений c для функции F будет вырождаться в точку при некоторых значениях геометрических параметров. Очевидно, получить критические значения можно, решая уравнения для попарных совпадений величин $c_*(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)$.

В третьих, следуя той же логике, что и выше, необходимо провести оценку погрешностей каждой из найденных асимптотик корней в статике и построить итерационный алгоритм расчета искомым точных значений корней для каждой ветви. Для рассматриваемой асимптотики (65)–(69), например, полагаем

$$\eta_n = \zeta_n \ell_1(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N), \quad \kappa_n = \eta_n - \eta_n^{as},$$

$$\eta_n = ip + (\eta_n^{as} - ip) + \ln \left[e^{-\eta_n^{as} + ip} \varphi(\eta_n) \right] =$$

$$= \eta_n^{as} + \ln \left[e^{-\eta_n^{as}} \varphi(\eta_n) \right], \quad (70)$$

$$\varphi(\eta_n) = \left(-T_2 - \sum_{\alpha>2} T_\alpha \right) Q_1^{-1} \zeta_n^{-k_1} \Big|_{\zeta_n = \eta_n / \ell_1},$$

$$\kappa_n = \ln e^{-\eta_n^{as}} \varphi(\eta_n^{as} + \kappa_n),$$

оценивая (в предположении о малости величины κ_n) конкретное значение получившегося показателя степени $\delta > 0$ в равенстве

$$e^{-\eta_n^{as}} \varphi(\eta_n^{as} + \kappa_n) = 1 + O(p^{-\delta}), \quad (71)$$

с доказательством аналогов теорем 1 и 2 в итерационной процедуре (42).

Отдельно исследуются возможные дополнительные чисто мнимые корни; их количество в статике всегда конечно.

В четвертых, на основании оценок вида (56) необходимо аналогично получить длинноволновые низкочастотные приближения для комплексных дисперсионных ветвей, и построить итерационный расчет вида (57) для искомым точных значений в динамике с проведением параметрического анализа.

Приближения и расчет фундаментальной вещественной моды, ее чисто мнимого аналога и дополнительных чисто мнимых дисперсионных

кривых выполняются тем же способом, что рассматривался выше.

Таким образом, изложенная методика позволяет получить полное описание спектра волновых чисел в низкочастотной области и затем отслеживать его эволюцию с ростом частоты. Разумеется, вопросы “группировки” и “сгущения” комплексных дисперсионных кривых с ростом числа слоев требуют дополнительного исследования. В отличие от приближенного низкочастотного анализа фундаментальных вещественных и мнимых мод, где могут эффективно применяться методы гомогенизации, для бесконечной комплексной части спектра их эффективность теряется, т.к. комплексные дисперсионные кривые с большими индексами отвечают за пограничные слои высоких порядков, которые осредненными моделями корректно не описываются.

Работа выполнена при частичной поддержке фонда “Основание”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Златин А.Н.* О корнях некоторых трансцендентных уравнений, встречающихся в теории упругости // Прикл. мех. 1980. Т. 16. № 12. С. 69–74.
2. *Zakharov D.D., Castaings M., Singh D.* Numerical and asymptotic approach for evaluating complex wavenumbers of guided modes in viscoelastic plates // J. Acoust. Soc. Am. 2011. V. 130. № 2. P. 764–771.
3. *Захаров Д.Д.* Низкочастотные асимптотики комплексных дисперсионных кривых для волн Лэмба в слоистых упругих пластинах // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 5. С. 463–473.
4. *Zakharov D.D.* Orthogonality of 3D guided waves in viscoelastic laminates and far field evaluation to a local acoustic source // Intern. J. Solids and Struct. 2008. V. 45. № 6. P. 1788–1803.
5. *Захаров Д.Д.* Условия Дирихле–Неймана и ортогональность трехмерных собственных волн в слоистых твердых телах // ЖВММФ. 2010. Т. 50. № 9. С. 1598–1612.
6. *Knopoff A.L.* A matrix method for elastic wave problem // Bull. Seismol. Soc. Am. 1964. V. 54. № 1. P. 431–438.
7. *Schwab F., Knopoff A.L.* Surface waves in multilayered anelastic media // Bull. Seismol. Soc. Am. 1971. V. 61. № 4. P. 893–912.
8. *Dunford N., Schwartz J.T.* Linear Operators: General theory. N.Y.: Wiley – Interscience Publishers, 1958. 2592 p.
9. *Dougall J.* An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic plate // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. 1904. V. 41. P. 129–228.
10. *Mindlin R.D (Onoe M, Medick MA).* Mathematical theory of vibrations of elastic plates. In: Proc. 11th Annual Symp. on Frequency Control, Fort Monmouth, Army Signal Engineering Laboratories (USA). 1957. P. 1–40.
11. *Меркулов Л.Г., Рохлин С.И., Зобнин О.П.* Расчет спектра волновых чисел для волн Лэмба в пластине // Дефектоскопия. 1970. № 4. С. 12–17.
12. *Меркулов Л.Г., Фирсов И.П.* Спектр возбуждения волн Лэмба в пластине // Дефектоскопия. 1972. № 5. С. 115–118.
13. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 749с.
14. *Захаров Д.Д.* Асимптотический анализ трехмерных динамических уравнений упругости для тонкой слоистой анизотропной пластины произвольной структуры // ПММ. 1992. Т. 59. № 5. С. 637–644.
15. *Zakharov D.D.* Asymptotic integration of 3D dynamic equations for thin multilayered anisotropic plates // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris II. 1992. V. 315. № 8. P. 915–920.
16. *Zakharov D.D., Becker W.* 2-D Problems of thin asymmetric laminates // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik. 2000. V. 51. № 4. P. 49–66.
17. *Korn G.A., Korn T.M.* Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review. Dover Publications: Mineola, New York, 2000. 1151 p.