

УДК 534.222

ВОЛНОВОЙ РЕЗОНАНС В ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ С МОДУЛЬНОЙ, КВАДРАТИЧНОЙ ИЛИ КВАДРАТИЧНО-КУБИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2018 г. О. В. Руденко^{a, b, c, d, *}, К. М. Хедберг^b

^aМосковский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Россия, 119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы

^bТехнологический Институт Блекинге, Карлскрона, Швеция

^cИнститут общей физики им. А.М. Прохорова РАН
Россия, 119991 Москва, ул. Вавилова 38

^dИнститут физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН
Россия, 123242 Москва, Б. Грузинская ул. 10, стр. 1

*e-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 15.10.2018 г.

Изучено явление “волнового резонанса”, возникающее при возбуждении бегущих волн в диссипативных средах, обладающих модульной, квадратичной или квадратично-кубической нелинейностью. Математической моделью этого явления является неоднородное (или “вынужденное”) уравнение типа Бюргерса. Указанные нелинейности представляют интерес, поскольку соответствующие им уравнения допускают точную линеаризацию и описывают реальные физические объекты. Наличие “сопровождающих источников” (движущихся вместе с волной) в правой части неоднородных уравнений обеспечивает приток энергии в волну, которая после этого распределяется по волновому профилю, перетекает к формирующимся ударным фронтам, а затем диссипирует из-за линейных и нелинейных механизмов потерь. Во введении описывается явление волнового резонанса в идеальной и диссипативной средах, не обладающих нелинейными свойствами, и приводятся физические примеры. Затем даются точные аналитические выражения для нелинейных установившихся профилей. Изучены нестационарные процессы генерации волн, пространственное “биение” амплитуд для различных соотношений скорости движения источников и скорости собственной волны в среде. Построены резонансные кривые, содержащие нелинейный сдвиг абсолютных максимумов в “сверхзвуковую” область. Обсуждаются особенности резонанса для каждой из трех типов нелинейности.

Ключевые слова: неоднородное уравнение типа Бюргерса, возбуждение нелинейной волны, модульная, квадратичная, квадратично-кубическая нелинейность, волновой резонанс

DOI: 10.1134/S0320791918040172

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье рассматриваются распределенные системы, имеющие нелинейности трех важных типов:

$$f_1 = |V|, \quad f_2 = \frac{1}{2}V^2, \quad f_3 = \frac{1}{2}V|V|. \quad (1)$$

Нелинейность f_1 будем называть модульной (M), f_2 – квадратичной (Q), а f_3 – квадратично-кубической (QC). Квадратичная или Q -нелинейность присутствует в обычном уравнении Бюргерса, которое детально изучалось в течение многих лет. Напротив, неоднородные уравнения с неаналитическими нелинейностями M - и QC -типов практически не исследованы.

Результаты, полученные в этой статье, удобно изложить единообразно с помощью схемы, основанной на унифицированной математической модели:

$$\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \theta} f_j(V) - \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = F(\theta + \alpha z), \quad j = 1, 2, 3. \quad (2)$$

По своей форме уравнение (2) похоже на обычное неоднородное уравнение Бюргерса с ненулевой правой частью, которая дается функцией $F(\theta + \alpha z)$.

Как показано в работе [1], соответствующее модели (2) однородное уравнение (оно получается из (2) при $F \equiv 0$) имеет два замечательных свойства. Во-первых, его удается точно линеаризовать

зовать с помощью простой замены переменной. Во-вторых, оно имеет важный физический смысл.

Если говорить о приложениях, следует напомнить, что эта математическая модель представляет большой интерес для исследования нелинейного волнового резонанса, наблюдаемого в распределенных системах различной физической природы. Конкретная форма этой модели — неоднородное квадратично-нелинейное уравнение Бюргерса — использовалась во многих задачах, связанных с возбуждением интенсивного звука лазерным излучением (с помощью электрострикционных [2] и тепловых [3] механизмов и в процессе вынужденного рассеяния Мандельштама–Бриллюэна [4]), а также в механике, физике плазмы и теории электронных потоков.

Следует упомянуть несколько конкретных физических процессов. Это возбуждение волн на поверхности моря ветром или волной движущегося давления; возбуждение волн в газовом потоке, который натекает с трансзвуковой скоростью на лазерный луч [5] или твердый аэродинамический профиль [6]; нелинейная динамика зерен в насыщенном жидкостью грунте [7]. Кроме того, неоднородные уравнения играют важную роль в описании стоячих волн конечной амплитуды в резонаторах [8], используемых для акустической спектроскопии, нелинейной диагностики материалов и в модели турбулентности Бюргерса [9–12] (ее иногда называют “Бургулентность” [11]), так как наряду с нелинейным перемешиванием энергии по спектру и диссипацией энергии уравнения учитывают внешние источники энергии в качестве третьего главного фактора.

2. ЛИНЕЙНЫЙ ВОЛНОВОЙ РЕЗОНАНС

Напомним, в чем заключается явление волнового резонанса. Как известно, обычный колебательный резонанс в простейшей колебательной системе характеризуется значительным ростом амплитуды в ситуации, когда частота колебаний внешнего источника энергии (“вынуждающей силы”) приближается к собственной частоте колебаний осциллятора ($\omega \rightarrow \omega_0$). Аналогично, волновой резонанс — это значительное усиление волны в том случае, когда скорость движения внешнего источника энергии стремится к скорости распространения собственной волны (волновой моды) в среде ($c \rightarrow c_0$) [13].

Уравнение (2) обычно записывается в системе координат, движущейся со скоростью c_0 собственной волны. Это будет показано позже. Если скорость источников $c > c_0$, тогда коэффициент $\alpha > 0$. Напротив, значение $\alpha < 0$ соответствует $c < c_0$. Точное условие волнового резонанса, при котором он должен наблюдаться, имеет вид

$\alpha = 0, c = c_0$. Однако нелинейность может изменить это резонансное условие. Как будет показано ниже, максимум резонансной кривой (то есть зависимости амплитуды волны от скорости движения источника) оказывается сдвинутым относительно $c = c_0$.

Простейшее решение уравнения (2) иллюстрирует эффект волнового резонанса. Пренебрегая нелинейным и диссипативным членами, нетрудно найти:

$$V = \frac{1}{\alpha} [\tilde{F}(\theta + \alpha z) - \tilde{F}(\theta)], \quad V|_{\alpha \rightarrow 0} = zF(\theta). \quad (3)$$

Здесь \tilde{F} — первообразная функции F . Решение (3) удовлетворяет граничному условию $V(z = 0, \theta) = 0$. Последнее означает, что волна начинает расти с увеличением z от нулевого уровня.

В первой из формул (3) имеется неопределенность типа 0/0 при $\alpha \rightarrow 0, c \rightarrow c_0$. Раскрывая эту неопределенность, видим, что при точном выполнении условия волнового резонанса происходит неограниченный рост волны при возрастании пройденного ею расстояния z . В этом случае форма волны повторяет форму функции $F(\theta)$. Если же имеется отстройка от резонанса ($\alpha \neq 0$), энергия вносится в область локализации источника, в которой $F(\theta) \neq 0$, и затем вытекает из этой области (см. рис. 1) вправо или влево, так как волна движется со скоростью, большей или меньшей c_0 . В результате этого на достаточно больших расстояниях z достигается конечное стационарное значение V_{\max} . Например, для локализованного источника в форме лоренцевского “колокола” из формулы (3) следует

$$F(\theta) = \frac{A}{1 + b^2\theta^2}, \quad \tilde{F} = \frac{A}{b} \arctan(b\theta), \quad (4)$$

$$|V_{\max}(\alpha)|_{z \rightarrow \infty} = \frac{\pi A}{2|\alpha b|}.$$

При $\alpha \rightarrow 0$ из формулы (4) получаем, что конечный стационарный максимум не существует и $V_{\max} \rightarrow \infty$. Этот результат согласуется с фактом неограниченного резонансного усиления волны, которое показано на рис. 1.

Как и в теории колебаний, бесконечный рост может быть ограничен диссипацией. Чтобы ее учесть, рассмотрим линеаризованное уравнение (2), положив в нем $f_j(V) \equiv 0$:

$$\frac{\partial V}{\partial z} - \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = F(\theta + \alpha z). \quad (5)$$

Решение уравнения (5), удовлетворяющее условию $V(z = 0, \theta) = 0$, имеет вид

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\omega) d\omega}{\omega \sqrt{\Gamma^2 \omega^2 + \alpha^2}} \exp(i\varphi - i\omega\theta) \times \left[\exp(-i\omega\alpha z) - \exp(-\Gamma\omega^2 z) \right]. \quad (6)$$

Здесь

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) \exp(i\omega\theta) d\theta, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\alpha}{\Gamma\omega}\right) \quad (7)$$

– это спектр внешнего источника и фазовый сдвиг.

Для монохроматического спектра $S(\omega) = A\delta(\omega - \omega_0)$ при $z \rightarrow \infty$ из (6) получается такое стационарное решение:

$$V = \frac{A}{\omega_0 \sqrt{\Gamma^2 \omega_0^2 + \alpha^2}} \times \exp[-i\omega_0(\theta + \alpha z) + i\varphi(\omega_0)]. \quad (8)$$

Максимальное значение возмущения в этой стационарной волне равно

$$|V_{\max}| = \frac{A}{\omega_0 \sqrt{\Gamma^2 \omega_0^2 + \alpha^2}}, \quad |V_{\max}|_{\alpha=0} = \frac{A}{\Gamma\omega_0^2}. \quad (9)$$

Из формулы (9) следует, что диссипация действительно ликвидирует особенность при $\alpha = 0$. С ростом величины расстройки $\alpha \gg \Gamma\omega_0$ максимум амплитуды гармонического сигнала уменьшается по гиперболическому закону $|\alpha|^{-1}$.

Этот же диссипативный эффект имеет место и для других форм и спектров внешних источников. Пусть, к примеру, источник описывается функцией, представляющей дипольный одиночный импульс:

$$F(\theta) = A \exp(-\omega_0 |\theta|) \operatorname{sgn}(\theta), \quad S(\omega) = \frac{i}{\pi} A \frac{\omega}{\omega^2 + \omega_0^2}. \quad (10)$$

Вычисляя интеграл (6), найдем форму и параметры стационарной волны на больших расстояниях:

$$V = -\frac{A \exp[-\omega_0 |\theta + \alpha z|]}{\omega_0 (\Gamma\omega_0 + \alpha)}, \quad |V_{\max}| = \frac{A}{\omega_0 (\Gamma\omega_0 + \alpha)}, \quad |V_{\max}|_{\alpha=0} = \frac{A}{\Gamma\omega_0^2}. \quad (11)$$

Как видно, и в этом случае диссипация сглаживает сингулярность.

Однако при слабой диссипации, в случае малых значений Γ , резонансный рост приводит к формированию достаточно сильного возмущения и к проявлениям нелинейных эффектов на больших расстояниях. Эта нелинейность может быть дру-

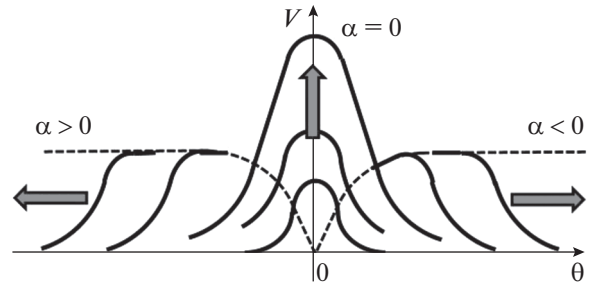


Рис. 1. Возбуждение волны бегущим внешним источником колоколообразной формы в случае точного резонанса ($\alpha = 0$) и при наличии расстройки скоростей ($\alpha \neq 0$).

гим лимитирующим фактором, обеспечивающим конечность величины V_{\max} при $\alpha \rightarrow 0$. Эффекты нелинейного ограничения волны обсуждаются ниже.

3. СХЕМА ВЫВОДА, БЕЗРАЗМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПЕРЕМЕННЫЕ

Приведем здесь схему вывода неоднородного уравнения Бюргера. Для определенности считаем, что возбуждение волны акустического давления происходит благодаря внешней силе, создаваемой электрострикцией [2, 4]. Электрическое поле есть сумма поля лазерной волны накачки E_p и поля стоксовой волны E_s , которая формируется в результате рассеяния лазерной накачки на усиливаемой акустической волне. Рассеяние происходит наиболее эффективно, когда стоксова волна и волна накачки бегут в противоположных направлениях (так называемое “обратное” рассеяние), а разность между частотами световых волн совпадает с частотой акустической волны Ω . Квадрат напряженности электрического поля $\langle E^2 \rangle$, усредненный по быстрым оптическим осцилляциям, дается формулой

$$\langle E^2 \rangle = E_p E_s \cos \left[\Omega \left(t - \frac{x}{c_0} \right) + x\Delta \right], \quad \Delta = k_p - k_s - \frac{\Omega}{c_0}. \quad (12)$$

Расстройка волновых чисел Δ не равна нулю в общем случае, поэтому скорость перемещения “стрикционного источника” может не совпадать со скоростью звука c_0 . Волновое уравнение для акустической волны давления p' имеет вид [4]

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 p' - \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 p' = -\frac{c_0^2}{8\pi} Y \nabla^2 \langle E^2 \rangle + NL(p'). \quad (13)$$

Здесь b , ρ_0 – диссипативный коэффициент и равновесная плотность массы среды, Y – коэффициент оптоакустической связи, и $NL(p')$ – символическое обозначение группы нелинейных членов. Если лазерные пучки имеют широкое поперечное сечение, они создают силовое поле источников (12), бегущих вдоль направления x и возбуждающих акустическую волну в том же направлении. Поэтому уравнение (13) можно упростить, перейдя в систему координат, движущуюся со скоростью звука c_0 :

$$\tau = t - \frac{x}{c_0}, \quad x_1 = \mu x. \quad (14)$$

Здесь $\mu \ll 1$ – некоторый малый параметр. Диссипативный и нелинейный члены в уравнении (13) также считаем малыми. Используя стандартную процедуру упрощения волнового уравнения, описанную во многих учебных пособиях (см., например, [9, 13]), пренебрегаем малыми членами порядка μ^n , $n \geq 2$. В результате получаем эволюционное уравнение [2, 4] первого порядка по x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} p' \frac{\partial p'}{\partial \tau} - \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} = \\ = \frac{Y \Omega}{16\pi c_0} E_p E_S \sin(\Omega \tau + x \Delta). \end{aligned} \quad (15)$$

Более строго оно выводится из модели Навье–Стокса для флюидного континуума, с удержанием лишь квадратично-нелинейного члена. Тот факт, что правая часть уравнения (15) изменяется во времени по гармоническому закону, связан со специфической постановкой задачи, типичной для задач рассеяния света. В других задачах часто встречаются правые части, зависимость которых от времени имеет вид одиночного импульса [3, 5, 6] (см. рис. 1). Иногда исследуются уравнения с другими регулярными, и даже случайными функциями $F(\theta)$ [12, 14]. Однако дать общий вывод упрощенного модельного уравнения для всех возможных типов нелинейности $f_j(V)$ и зависимостей $F(\theta)$ (см. (2)), конечно, нельзя. Причиной является разнообразие исходных моделей с различным физическим содержанием, таких как уравнения гидродинамики, Максвелла, теории упругости и, соответственно, разнообразие определяющих уравнений (или уравнений состояния).

Введем безразмерные переменные и числа:

$$\begin{aligned} V = \frac{p'}{\rho_0'}, \quad \theta = \Omega \tau, \quad z = \frac{\varepsilon \Omega}{c_0^3 \rho_0} p_0' x, \quad \Gamma = \frac{b \Omega}{2\varepsilon \rho_0'}, \\ A = \frac{Y E_p E_S c_0^2 \rho_0}{16\pi \varepsilon \rho_0'^2}, \quad \alpha = \Delta \frac{c_0^3 \rho_0}{\varepsilon \Omega \rho_0'}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь акустическое давление p' нормировано на свое характерное амплитудное значение ρ_0' , “запаздывающее” время τ – на частоту звука Ω , расстояние x – на характерную нелинейную длину

$l_{NL} = \frac{c_0^3 \rho_0}{\varepsilon \Omega \rho_0'}$. Число Γ – это безразмерный диссипативный параметр, и A – безразмерная амплитуда возбуждающей “силы”.

Безразмерная форма уравнения (15) такова:

$$\frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = A \sin(\theta + \alpha z). \quad (17)$$

Сравнивая уравнение (17) с универсальной формой (2), видим, что здесь $f_j = f_2 = \frac{1}{2} V^2$, и $F(\theta) = A \sin(\theta)$. Вывод уравнений типа Бюргерса для M - и QC -нелинейностей, а также их физический смысл и соответствующие примеры описаны в работах [1, 15–17].

4. СТАЦИОНАРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

Бегущие волны, которые приобрели устойчивую форму в процессе их генерации и распространения, называют стационарными волнами. Они описываются решениями эволюционных уравнений, не зависящими от расстояния z . В дальнейшем понятие стационарной волны будет уточнено.

Чтобы найти стационарное решение уравнения (2), положим в нем $\alpha = 0$ и будем считать равной нулю производную по переменной z . В результате придем к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\Gamma \frac{dV}{d\theta} + f_j(V) = C^2 + A \cos(\theta). \quad (18)$$

Рассмотрим вначале M -нелинейную среду ($j = 1$ – см. (1), (2)). Интегрируя уравнение (18) и определяя константу из условия периодичности $V(0) = V(\pi) = 0$, найдем решение в пределах одного периода ($-\pi \leq \theta \leq \pi$) [18]:

$$\begin{aligned} V = A \frac{\operatorname{sgn} \theta}{1 + \Gamma^2} \times \\ \times \left[2 \frac{1 - \exp(-|\theta|/\Gamma)}{1 - \exp(-\pi/\Gamma)} + \cos \theta + \Gamma |\sin \theta| - 1 \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Форма стационарной волны (19) изображена на рис. 2 для различных значений числа Γ . С ростом диссипации Γ профиль волны становится более гладким. Максимальное значение V уменьшается. Напротив, при $\Gamma \rightarrow 0$ появляется разрыв, то есть формируется крутой ударный фронт. Для значения $\Gamma = 0$ решение (19) на одном периоде волны описывается простой формулой:

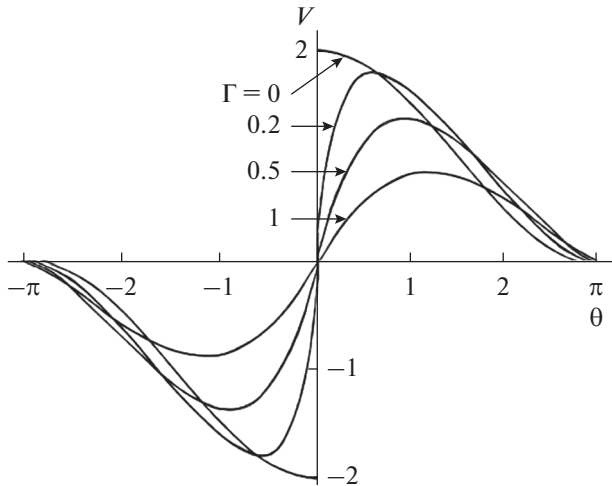


Рис. 2. Стационарная волна, возбуждаемая синусоидальным источником в M -нелинейной диссипативной среде. Параметры полагались равными $\Gamma = 0, 0.2, 0.5, 1$, и $A = 1$.

$$V = 2A \operatorname{sgn} \theta \cos^2 \frac{\theta}{2}. \quad (20)$$

Профиль волны, содержащий ударный фронт, изображен на рис. 2.

Перейдем теперь к Q -нелинейной среде ($j = 2$ – см. (1), (2)). В этом случае уравнение (18) примет вид

$$\Gamma \frac{dV}{d\theta} + \frac{1}{2}(V^2 - C^2) = A \cos(\theta). \quad (21)$$

Решение уравнения (18) выражается через функции Матье [2]:

$$V = 2\Gamma \frac{d}{d\theta} \ln ce_0 \left(\frac{\theta}{2}, \frac{A}{\Gamma^2} \right), \quad -\pi \leq \theta \leq \pi. \quad (22)$$

При $\Gamma \rightarrow 0$ для среды с исчезающе слабыми диссипативными свойствами из (22) следует (по аналогии с (20)):

$$V = 2\sqrt{A} \operatorname{sgn} \theta \cos \frac{\theta}{2}. \quad (23)$$

Решения (22) и (23) показаны на рис. 3.

Интересно, что энергия стационарной волны пропорциональна собственному значению λ_0 функции Матье ce_0 [2]. Этот результат непосредственно следует из формул (21) и (22):

$$C^2 = \overline{V^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V^2(\theta) d\theta = -\Gamma^2 \lambda_0 \left(\frac{A}{\Gamma^2} \right). \quad (24)$$

Перейдем теперь к QC -нелинейной среде ($j = 3$ – см. (1), (2)). В этом случае симметрия задачи иная. Очевидно, что M - и Q -нелинейности являются четными: $f_1(-V) = f_1(V)$, $f_2(-V) = f_2(V)$, в то время как QC -нелинейность – нечетная: $f_3(-V) =$

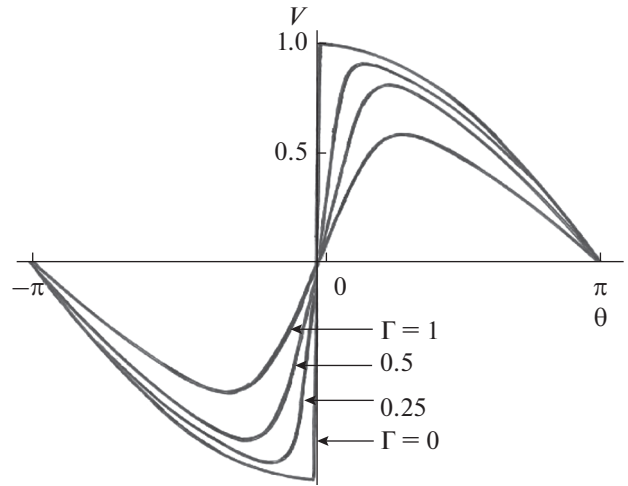


Рис. 3. Стационарная волна, возбуждаемая синусоидальным источником в Q -нелинейной диссипативной среде. Параметры полагались равными $\Gamma = 0, 0.25, 0.5, 1$, и $A = 2$.

$= -f_3(V)$. В соответствии с известными результатами теории нелинейных волн нечетные нелинейности приводят к появлению эффектов самовоздействия, среди которых наиболее известны самофокусировка волновых пучков и самосжатие волновых пакетов (см., например, учебное пособие [12]). В нашем случае самовоздействие проявляется как изменение скорости распространения волны c_0 в QC -среде. Скорость отличается от c_0 и растет с увеличением амплитуды волны.

Эти пояснения приводят к необходимости несколько иного понимания термина “стационарная волна” по сравнению с термином, использованным выше. Чтобы профиль волны оставался неизменным в процессе ее распространения, возбуждающий волну источник должен также двигаться с новой скоростью, превышающей c_0 . Поэтому запишем уравнение (18) для стационарной (в новом смысле этого слова) волны в следующей форме:

$$\Gamma \frac{dV}{d\theta_*} + \frac{1}{2}V|V| - \alpha V = C^2 + A \cos(\theta_*) \quad (25)$$

$$\theta_* = \theta + \alpha z.$$

Рассмотрим вначале решение для недиссипативной среды (полагая $\Gamma \rightarrow 0$). Как следует из теории свободно бегущих волн, описываемых однородным уравнением [17], каждый период должен содержать два разрыва – ударную волну сжатия и ударную волну разрежения. Такая периодическая волна будет иметь “пилообразную” форму с трапециевидными “зубцами”, показанную на рис. 4.

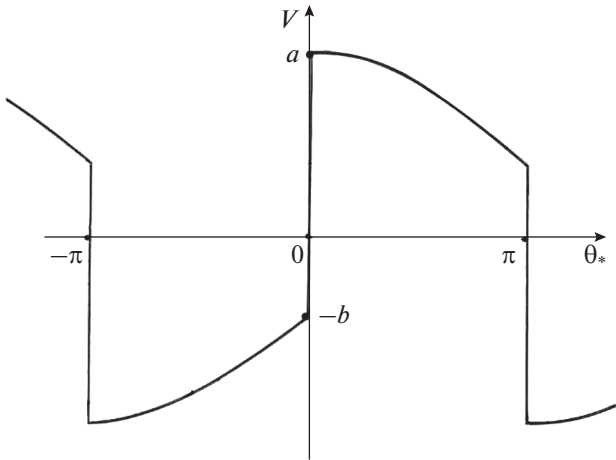


Рис. 4. Стационарная волна, возбуждаемая синусоидальным источником в QC -нелинейной диссипативной среде.

Решение для одного периода дается формулами

$$\begin{aligned} V^2 - 2\alpha V &= 2C^2 + 2A \cos(\theta_*), \quad V > 0; \\ -V^2 - 2\alpha V &= 2C^2 + 2A \cos(\theta_*), \quad V < 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Сшивая две ветви периодического решения (26) в точках $\theta_* = 0, \theta_* = \pi$, получим $C^2 = 0$, и

$$a^2 - 2\alpha a = -b^2 + 2\alpha b = 2A. \quad (27)$$

Накладывая требование единственности решения, найдем

$$a = \frac{\alpha}{\sqrt{2} - 1}, \quad b = \alpha, \quad A = \alpha^2. \quad (28)$$

Интересно, что то же самое соотношение $b/a = \sqrt{2} - 1$ между меньшей и большей частями скачка на ударном фронте имеет место для свободно распространяющихся волн в рамках моде-

ли однородного уравнения [17]. Из формулы (28) также следует, что чем сильнее волна (или чем больше A), тем быстрее она бежит (число α возрастает).

Решение уравнения (25) для диссипативной среды по аналогии с формулой (26) состоит из положительных и отрицательных ветвей, описываемых функциями Матье, и нелинейного преобразования вида (22). Однако сшивание этих ветвей оказывается громоздкой процедурой, и его описание выходит за рамки данной статьи.

5. ПРОЦЕССЫ ЭВОЛЮЦИИ ВОЛН ПРИ ИХ ВОЗБУЖДЕНИИ И РАСПРОСТРАНЕНИИ ЧЕРЕЗ M -НЕЛИНЕЙНУЮ ДИССИПАТИВНУЮ СРЕДУ

Процесс установления стационарного профиля, обусловленный притоком энергии из внешних источников, его перераспределением из-за нелинейности и потерями из-за диссипативных и нелинейных эффектов, очень сложен и может быть изучен только численными методами.

На рис. 5а показан процесс генерации периодического профиля, который приближается к своей стационарной форме с ростом пройденного волной расстояния z . На расстоянии $z = 10$ кривая, изображающая профиль почти установившейся волны, лежит между двумя стационарными профилями, соответствующими $\Gamma = 0$ и $\Gamma = 0.2$ на рис. 2.

Более сложная картина возбуждения имеет место для отличной от нуля расстройки $\alpha \neq 0$. Этот процесс иллюстрирован на рис. 5б. В случае $\alpha \neq 0$ энергия вкладывается в область локализации источника, но затем вытекает из нее, потому

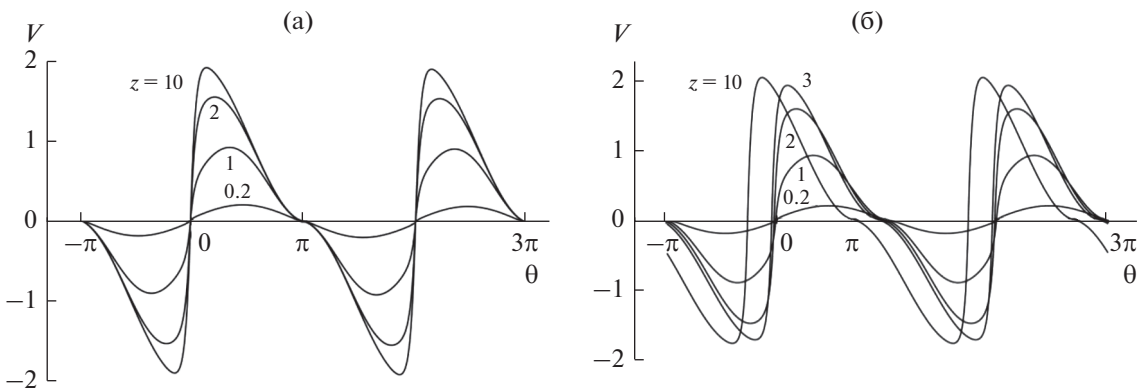


Рис. 5. Профили периодической волны, возбуждаемой синусоидальным бегущим внешним источником в M -нелинейной диссипативной среде для значений параметров $\Gamma = 0.1, A = 1$ при (а) $\alpha = 0$ и (б) $\alpha = 0.1$. Расстояние z , прошедшее волной, указано при каждой кривой.

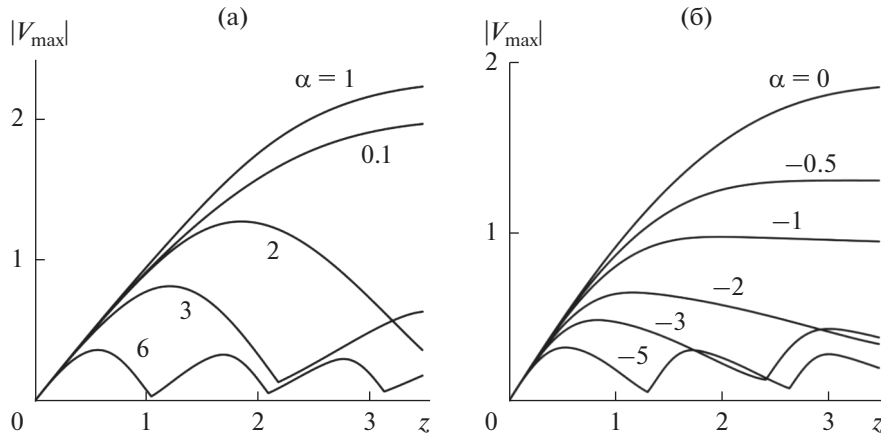


Рис. 6. Зависимости от расстояния z максимальных амплитуд волны, возбуждаемой синусоидальным бегущим внешним источником в M -нелинейной диссипативной среде при (а) положительной и (б) отрицательной расстройке α и значениях $\Gamma = 0.1$, $A = 1$.

что скорость возбужденной волны оказывается большей или меньшей, чем скорость источника. Это создает пространственные “биения” с максимальной (в пределах одного периода) величиной возмущения $|V_{\max}|$.

Эти “биения” показаны на рис. 6 для (а) положительной $\alpha > 0$ и (б) отрицательной $\alpha < 0$ расстройки. С увеличением абсолютной величины расстройки $|\alpha|$ биения происходят более часто. Их пространственный период уменьшается, как и максимальное значение $|V_{\max}|$, достигаемое в процессе биений.

Особенно интересно построить и проанализировать зависимость максимальной величины $|V_{\max}|$, достигаемой на некотором расстоянии z , от расстройки $|\alpha|$. Обозначим этот “максимум максимальных значений” как $|V_{\max}|^{\text{abs}}$. Очевидно, что изображение зависимости $|V_{\max}|^{\text{abs}}(\alpha)$ имеет смысл называть нелинейной резонансной кривой.

Эта зависимость показана сплошной линией на рис. 7. Интересно, что максимум достигается не при $\alpha = 0$, как в линейном случае, а при лишь при некотором положительном значении α . Эффект нелинейного сдвига максимума резонансной кривой в область сверхзвукового движения источника известен из оптоакустики [5], аэродинамики [6]; он наблюдался в некоторых других физических системах [7]. В отличие от максимального значения волнового поля, максимум интенсивности волны в сверхзвуковую область не смещается (см. штриховую кривую на рис. 7).

6. ПРОЦЕССЫ ЭВОЛЮЦИИ ВОЛН ПРИ ИХ ВОЗБУЖДЕНИИ И РАСПРОСТРАНЕНИИ ЧЕРЕЗ Q -НЕЛИНЕЙНУЮ ДИССИПАТИВНУЮ СРЕДУ

Исследуем теперь аналогичные явления в квадратично-нелинейной среде. Процесс возбуждения волны гармоническим источником при нулевой расстройке скорости показан на рис. 8а. Видно, что на малых расстояниях z волновой профиль повторяет форму гармонической внешней силы. С увеличением z амплитуда волны растет, и

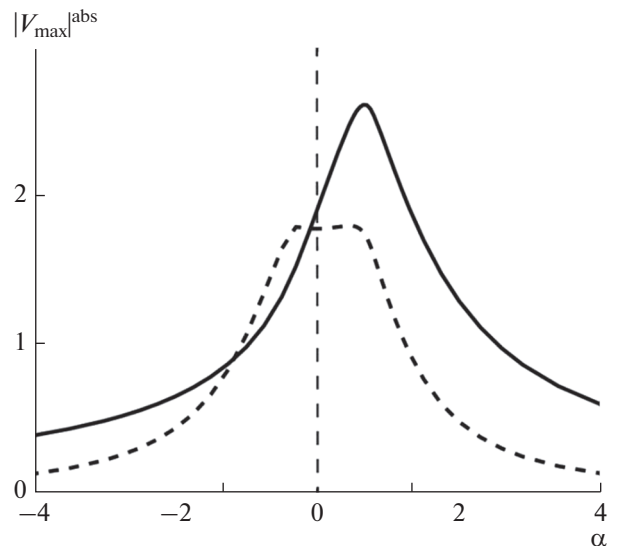


Рис. 7. Нелинейные резонансные кривые — зависимости максимального значения амплитуды волны в M -нелинейной диссипативной среде от расстройки α (сплошная кривая) и зависимость энергии волны от α (штриховая кривая); для значений $\Gamma = 0.1$ и $A = 1$.

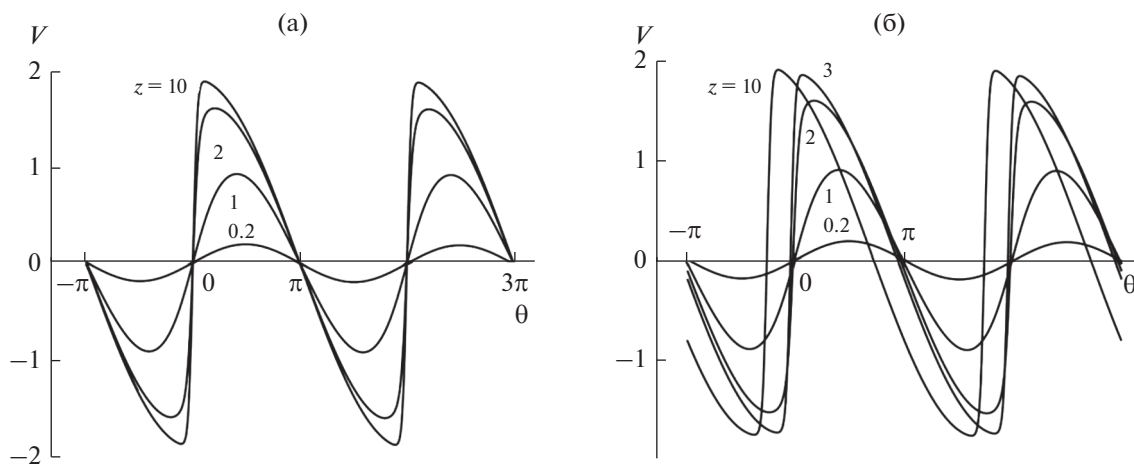


Рис. 8. Профили периодической волны, возбуждаемой синусоидальным бегущим внешним источником в Q -нелинейной диссипативной среде для значений параметров $\Gamma = 0.1$, $A = 1$ при (а) $\alpha = 0$ и (б) $\alpha = 0.1$. Расстояние z , прошедшее волной, указано на при каждой кривой.

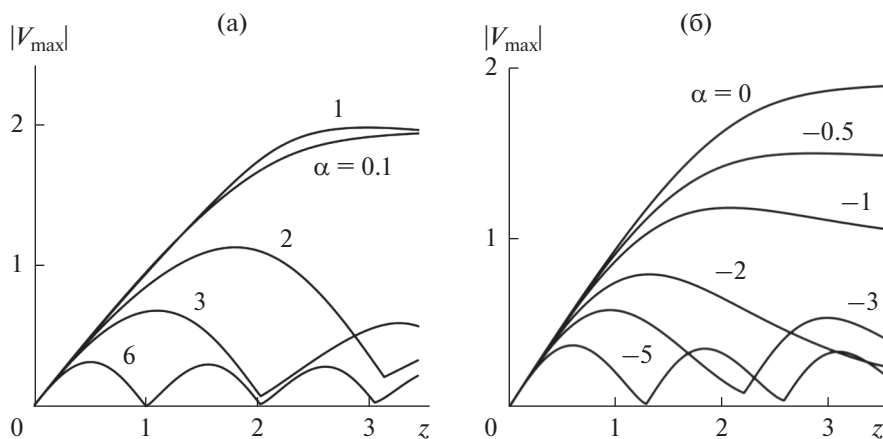


Рис. 9. Зависимости от расстояния z максимальных амплитуд волны, возбуждаемой синусоидальным бегущим внешним источником в Q -нелинейной диссипативной среде при (а) положительной и (б) отрицательной расстройке α и значениях $\Gamma = 0.1$, $A = 1$.

профиль волны искажается. Предельная кривая ($z = 10$) близка по форме к стационарному профилю, показанному на рис. 3. Она содержит фронт ударной волны и лежит между кривыми для $\Gamma = 0$ и $\Gamma = 0.25$ на этом рисунке.

Процесс возбуждения волн в случае ненулевой расстройки показан на рис. 8б. Как и на рис. 5б, рост профиля и увеличение крутизны переднего фронта сопровождаются сдвигом профиля вперед, поскольку при $\alpha > 0$ источник движется быстрее, чем свободно бегущая волна.

По аналогии с M -нелинейной средой, пространственные “биения” максимальных (в пределах одного периода) значений $|V_{\max}|$ наблюдаются также и в Q -нелинейной среде. Эти “биения” показаны на рис. 9 для (а) положительной $\alpha > 0$ и

(б) отрицательной $\alpha < 0$ расстройки. Биения происходят более часто с возрастанием величины расстройки $|\alpha|$. При этом и пространственный период биений, и максимальное значение возмущения в профиле волны $|V_{\max}|$ уменьшаются.

Резонансная кривая $|V_{\max}|^{\text{abs}}(\alpha)$ показана сплошной линией на рис. 10. Как и на рис. 7, максимум достигается не при выполнении “линейного” резонансного условия $\alpha = 0$, но при некотором положительном значении α . Следует подчеркнуть, что в предшествующих работах [7, 19] аналогичные резонансные кривые для Q -нелинейной среды были вычислены аналитически, но для несколько иных физических постановок задач.

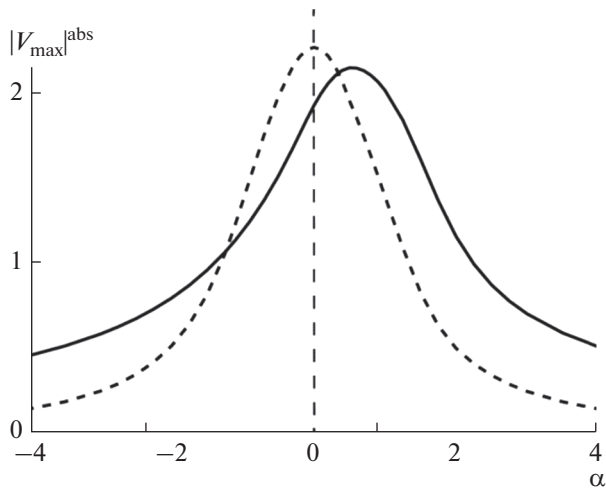


Рис. 10. Нелинейные резонансные кривые – зависимости максимального значения амплитуды волны в Q -нелинейной диссипативной среде от расстройки α (сплошная кривая) и зависимость энергии волны от α (штриховая кривая) для значений $\Gamma = 0.1$ и $A = 1$.

Вторая резонансная кривая для интенсивности изображена с помощью штриховой линии. Она симметрична относительно точки $\alpha = 0$, в которой достигается максимум.

7. ПРОЦЕССЫ ЭВОЛЮЦИИ ВОЛН ПРИ ИХ ВОЗБУЖДЕНИИ И РАСПРОСТРАНЕНИИ ЧЕРЕЗ QC -НЕЛИНЕЙНУЮ ДИССИПАТИВНУЮ СРЕДУ

Как уже упоминалось в разделе 4, случай квадратично-кубичной (QC) среды качественно отличается от сред с модульной и квадратичной нели-

нейностями. Нечетная QC -нелинейность изменяет условие волнового резонанса. Вообще говоря, с увеличением амплитуды волны целесообразно варьировать скорость источников в соответствии со специальным законом $\alpha = \Psi(z)$, чтобы обеспечить непрерывный приток энергии в волну. Однако расчет этой функции $\Psi(z)$ представляет собой отдельную и весьма сложную задачу, выходящую за рамки настоящей статьи.

На рис. 11 приведены результаты расчета волновых профилей для фиксированных значений (а) $\alpha = 0$ и (б) $\alpha = 0.1$. В обоих случаях видно, как на малых расстояниях растущий профиль повторяет синусоидальную форму бегущего источника. Затем скорость волны возрастает, и профиль сдвигается вперед; одновременно искажается его форма. Каждый период волны стремится принять трапецевидную форму, похожую на форму стационарного профиля (см. рис. 4). Немонотонная зависимость максимума от расстояния заметна даже при нулевой расстройке $\alpha = 0$; максимум на расстоянии $z = 10$ заметно меньше максимума при $z = 2$. Для отличной от нуля расстройки наступление пространственных биений выражено еще более четко.

Пространственные осцилляции функции $|V_{\max}|(z)$ для различных значений расстройки α показаны на рис. 12а и 12б. Соответствующие резонансные кривые $|V_{\max}|^{\text{abs}}(\alpha)$ даны на рис. 13. Заметим, что максимум оказывается смещенным в область $\alpha > 0$ как для амплитуды, так и для интенсивности волны. В этом смысле появляется различие в поведении кривых по сравнению с аналогичными кривыми для M - и Q -нелинейных сред (см. рис. 7 и 10).

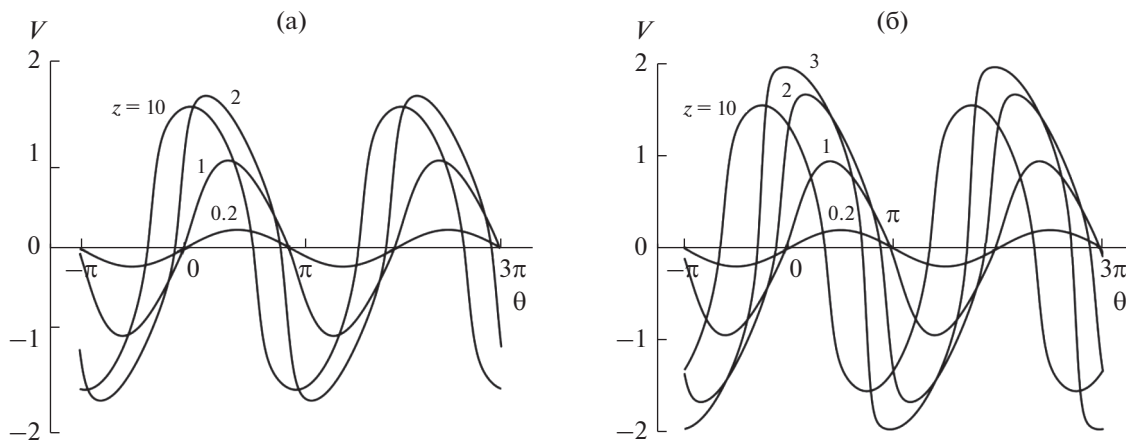


Рис. 11. Профили периодической волны, возбуждаемой синусоидальным бегущим внешним источником в QC -нелинейной диссипативной среде для значений параметров $\Gamma = 0.1$, $A = 1$ при (а) $\alpha = 0$ и (б) $\alpha = 0.1$. Расстояние z , прошедшее волной, указано при каждой кривой.

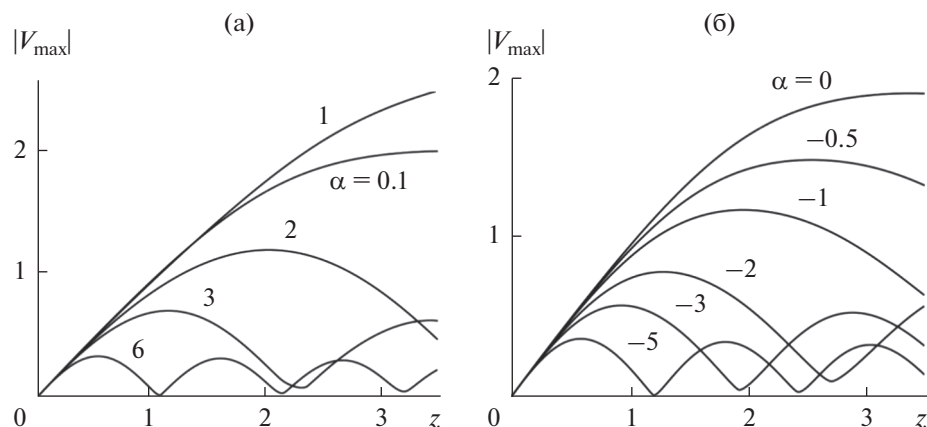


Рис. 12. Зависимости от расстояния z максимальных амплитуд волны, возбуждаемой синусоидальным бегущим внешним источником в QC -нелинейной диссипативной среде при (а) положительной и (б) отрицательной расстройке α и значениях $\Gamma = 0.1$, $A = 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

После публикации работ [2–6], где использовалась модель неоднородного нелинейного уравнения Бюргера для изучения конкретных физических явлений, появился ряд чисто математических работ, посвященных различным свойствам этого уравнения и разработке приближенных методов его решения. Результаты этих исследований можно найти в статьях [21–25] и в цитируемых в них работах. Из этих статей следует очевидное указание на то, как уже реализованная исследовательская программа для получения математических

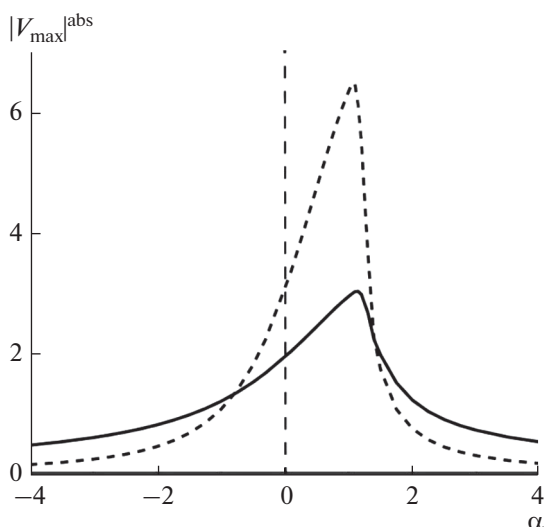


Рис. 13. Нелинейные резонансные кривые — зависимости максимального значения амплитуды волны в QC -нелинейной диссипативной среде от расстройки α (сплошная кривая) и зависимость энергии волны от α (штриховая кривая); для значений $\Gamma = 0.1$ и $A = 1$.

результатов для обычного Q -нелинейного неоднородного уравнения Бюргера может быть распространена на модели с рассмотренными здесь QC - и M -нелинейностями. Эти нелинейности могут быть включены в уравнения по отдельности или совместно в виде любой комбинации.

С нашей точки зрения, в будущем было бы важно найти именно такие решения уравнения (2), которые представляют наибольший интерес для физических приложений. В частности, желательно получить сведения о решениях статистических задач, для которых $F(\theta)$ есть случайная функция. Статистические проблемы для обычного уравнения Бюргера хорошо изучены (см. [9, 11]). Генерация нелинейного шума бегущими источниками изучена хуже. Укажем только на раздел 8 обзора [11], который полностью посвящен возбуждению волн случайной правой частью в модели неоднородного уравнения Бюргера. Новое продвижение в решении статистических проблем требует использования численных методов и компьютерного моделирования.

Очевидным продолжением этой статьи могут быть аналитические исследования для случая, когда $F(\theta)$ является одиночным импульсом. Наконец, особый интерес представляют нелинейные уравнения, содержащие одновременно два или три типа нелинейностей (1), поскольку такие структурно-неоднородные среды существуют и уже изучены экспериментально [20].

Работа поддержана грантом РФФ № 14-22-00042.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rudenko O.V. Equation admitting linearization and describing waves in dissipative media with modular, quadratic, and quadratically cubic nonlinearities // Doklady Mathematics. 2016. V. 94. № 3. P. 703–707.

2. *Rudenko O.V.* Feasibility of generation of high-power hypersound with the aid of laser radiation // *JETP Letters*. 1974. V. 20. № 7. P. 203–205.
3. *Karabutov A.A., Rudenko O.V.* Nonlinear sound excitation by surface absorption of laser radiation // *J. Techn. Physics*. 1975. V. 45. № 7. P. 1457–1461.
4. *Karabutov A.A., Lapshin E.A., Rudenko O.V.* Interaction between light waves and sound under acoustic nonlinearity conditions // *J. Exp. Theor. Physics*. 1976. V. 44. № 1. P. 58–63.
5. *Karabutov A.A., Rudenko O.V.* Nonlinear plane waves excited by volume sources in a medium moving with transonic velocity // *Sov. Phys. Acoust.* 1979. V. 25. № 4. P. 306–309.
6. *Karabutov A.A., Rudenko O.V.* Modified Khokhlov's method for nonstationary trans-sonic flows of compressible gas // *Sov. Phys. Doklady*. 1979. V. 248. № 5. P. 1082–1085.
7. *Rudenko O.V., Hedberg C.M.* Nonlinear dynamics of grains in a liquid-saturated soil // *Nonlinear Dyn.* 2004. V. 35. № 2. P. 187–200.
8. *Rudenko O.V.* Nonlinear standing waves, resonant phenomena and frequency characteristics of distributed systems // *Acoust. Phys.* 2009. V. 55. № 1. P. 27–54.
9. *Gurbatov S.N., Rudenko O.V., Saichev A.I.* *Waves and Structures in Nonlinear Nondispersive Media*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, and Beijing: Higher Education Press, 2011. 472 p.
10. *Gurbatov S.N., Saichev A.I., Yakushkin I.G.* Nonlinear waves and one-dimensional turbulence in nondispersive media // *Sov. Phys. Usp.* 1986. V. 26. P. 857–876.
11. *Frish U., Bec J.* Burgulence. In: *New trends in turbulence*, P. 341–384. Les Houches. V. 74. Paris, Cambridge: Les Ulis, and Berlin, Heidelberg: Springer, 2001. 552 p.
12. *Rudenko O.V.* Interactions of intense noise waves // *Physics Uspekhi*. 1986. V. 29. № 7. P. 620–641.
13. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* *Теория волн*, 3-е изд. М.: Ленанд, 2015. 432 с.
14. *Rudenko O.V.* Nonlinear sawtooth-shaped waves // *Physics Uspekhi*. 1995. V. 38. № 9. P. 965–989.
15. *Hedberg C.M., Rudenko O.V.* Collisions, mutual losses and annihilation of pulses in a modular nonlinear medium // *Nonlinear Dyn.* 2017. V. 90. № 3. P. 2083–2091.
16. *Rudenko O.V., Hedberg C.M.* A new equations and exact solutions describing focal fields in media with modular nonlinearity // *Nonlinear Dyn.* 2017. V. 89. № 3. P. 1905–1913.
17. *Rudenko O.V., Hedberg C.M.* The quadratically cubic Burgers equation: an exactly solvable nonlinear model for shocks, pulses and periodic waves // *Nonlinear Dyn.* 2016. V. 85. № 2. P. 767–776.
18. *Rudenko O.V.* Inhomogeneous Burgers equation with modular nonlinearity: excitation and evolution of high-intensity waves // *Doklady Mathematics*. 2017. V. 95. № 3. P. 291–294.
19. *Enflo B.O., Hedberg C.M., Rudenko O.V.* Resonant properties of a nonlinear dissipative layer excited by a vibrating boundary: Q-factor and frequency response // *J. Acoust. Soc. Am.* 2005. V. 117. № 2. P. 601–612.
20. *Korobov A.I., Kokshaiskii A.I., Prokhorov V.M., Evdokimov I.A., Perfilov S.A., Volkov A.D.* Mechanical and nonlinear elastic characteristics of polycrystalline *Mg6* aluminum alloy and *n-AMg6/C60* nanocomposite // *Phys. Solid State*. 2016. V. 58. № 12. P. 2472–2480.
21. *Sinai Ya.G.* Asymptotic behavior of solutions of 1D-Burgers equation with quasiperiodic forcing // *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 1998. V. 11. № 2. P. 219–226.
22. *Kudryavtsev A.G., Sapozhnikov O.A.* Determination of the exact solutions to the inhomogeneous Burgers equation with the use of the Darboux transformation // *Acoust. Phys.* 2011. V. 57. № 3. P. 311–319.
23. *Pasmanter R.A.* Stability and Backlund transform of the forced Burgers equation // *J. Math. Phys.* 1986. V. 29. P. 2744–2746.
24. *Kirsch W., Kutzelnig A.* Time asymptotics for solutions of the Burgers equation with a periodic force // *Math. Z.* 1999. V. 232. № 4. P. 691–705.
25. *Büyükasik S.A., Pashaev O.K.* Exact solutions of forced Burgers equations with time variable coefficients // *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2013. V. 18. № 7. P. 1635–1651.