

К ВОПРОСУ О МЕТОДЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗВУКА В КЛИНЕ В АКУСТИКЕ ОКЕАНА: НЕКОТОРЫЕ ИСПРАВЛЕНИЯ И ДОПОЛНЕНИЯ

© 2018 г. **Танг^{a, b, *}, Петров^{c, d, **}, Пiao^{a, b, ***}, Козицкий^{c, ****}**

^aCollege of Underwater Acoustic Engineering, Harbin Engineering University Nantong Street 145, Harbin, 150001 China

^bAcoustic Science and Technology Laboratory, Harbin Engineering University Nantong Street 145, Harbin, 150001 China

^cТихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН

Россия, 690041 Владивосток, ул. Балтийская 43

^dДальневосточный федеральный университет

Россия, 690950 Владивосток, ул. Суханова 8

*e-mail: tangjun@hrbeu.edu.cn

**e-mail: petrov@poi.dvo.ru

***e-mail: psc828@foxmail.com

****e-mail: skozi@poi.dvo.ru

Поступила в редакцию 14.06.2017 г.

В этом исследовании мы возвращаемся к методу изображений в задаче о распространении звука в клиновидном волноводе с проницаемым дном. Эта трехмерная задача является важным тестовым примером в вычислительной подводной акустике, так как клин, ограниченный сверху поверхностью моря, а снизу — наклонным проницаемым дном, является простейшей моделью волновода мелкого моря в окрестности береговой линии. В работе приведены исправленные формулы, описывающие положение изображений источника, а также их вывод. Рассмотрена проблема выбора ветви квадратного корня в формуле для коэффициента отражения, описан простой алгоритм для решения этого вопроса. Дополнительно правильность выбора ветви проверена с помощью численных расчетов. В завершение работы звуковое поле в клине вычислено по методу изображений для серии примеров с различными соотношениями модулей объемной и сдвиговой упругости в дне. Результаты проведенных расчетов демонстрируют взаимодействие эффекта горизонтальной рефракции и перераспределения энергии колебаний между акустическими и упругими волнами.

Ключевые слова: акустика мелкого моря, прибрежный клин, лучевая теория

DOI: 10.7868/S0320791918020077

ВВЕДЕНИЕ

Существенный прирост производительности современных компьютеров, достигнутый за последние два десятилетия, способствовал бурному развитию численных методов моделирования трехмерного распространения звука в подводной акустике. Хотя до сих пор не представляется возможным использовать прямые конечно-разностные и конечно-элементные методы для дискретизации трехмерных волновых уравнений, исключительно успешной показала себя практика расчетов с использованием различного рода приближений, например, параболических уравнений. В то же время любые приближенные и численные методы расчета требуют предварительного тестирования на некоторых модельных задачах, решение которых может быть найдено с высокой точностью. Например, в случае трехмерных параболических

уравнений всегда необходимо выяснять, какие члены аппроксимаций операторного квадратного корня существенны для правильного учета различных эффектов, связанных с распространением звука (горизонтальной рефракции, взаимодействия мод и др.), а какими из этих членов можно пренебречь. Разобраться в таких вопросах обычно можно, сравнивая результаты численных расчетов с аналитическими решениями некоторых модельных задач о трехмерном распространении звука. Известно лишь очень ограниченное количество такого рода тестовых решений, и наиболее важным из них является, безусловно, решение задачи о распространении звука в трехмерном клиновидном волноводе [1–3], полученное Дином и Бакингом в 1993 году с использованием метода изображений.

В основе этого метода лежит представление акустического поля в виде суммы вкладов семейства изображений источника (мнимых источников). Каждое изображение соответствует волнам, излученным реальным источником и испытавшим некоторое количество отражений от границ клина [1], т.е. от поверхности и дна моря (см. следующий раздел).

Как было указано ранее, основной областью приложений решения, полученного с помощью метода изображений, является тестирование численных моделей трехмерного распространения звука в океанических волноводах [4]. До настоящего времени такого рода тесты, как правило, выполнялись лишь для моделей с жидким дном [5, 6]. Очевидно, однако, что в ближайшем будущем будут весьма востребованы аналитические решения для трехмерных задач распространения сейсмоакустических волн, по мере того как появляются вычислительные методы и расчетные программы, учитывающие сдвиговые волны в дне.

В настоящем исследовании мы возвращаемся к решению из работы [1] с целью уточнения и прояснения некоторых деталей процедуры его вычисления, а также внесения небольших поправок в ряд приведенных там формул. Более точно, мы выводим исправленные формулы для угловых координат изображений источника и изображений дна, а также предлагаем четкий алгоритм для выбора ветви квадратного корня в коэффициенте отражения (этот вопрос не освещен в оригинальной работе). Правильность данного алгоритма верифицирована путем прямого сравнения решения по методу изображений с другими эталонными решениями. Кроме того, используя метод изображений, мы проводим расчеты звукового поля для нескольких клиновидных геоакустических волноводов с различными скоростями сдвиговых волн в дне. В работе рассматриваются и обсуждаются результаты одновременного влияния горизонтальной рефракции и упругих свойств дна на интерференционную структуру акустического поля в клине.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим волновод мелкого моря, показанный на рис. 1. Он представляет собой водный слой, имеющий форму клина и ограниченный снизу проницаемым дном, а сверху – поверхностью моря. При этом угол раскрытия клина обозначается α_w . Скорость звука и плотность в водном слое равны c_1 и ρ_1 , а соответствующие параметры дна – c_2 и ρ_2 ; затухание звуковых волн в дне составляет β_2 (эта величина задается в децибелах на длину волны). В случае упругого дна мы также обозначим скорость S-волн символом c_{2s} , а их затухание как β_{2s} . Здесь и далее мы рассматриваем

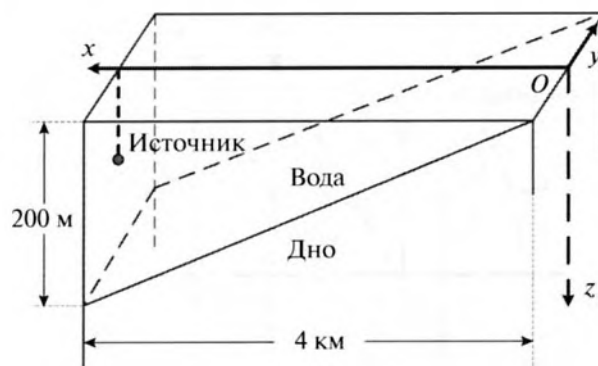


Рис. 1. Схема клиновидного волновода.

задачу расчета акустического поля, сформированного гармоническим точечным источником звука частоты f , расположенным внутри водного слоя в таком клиновидном волноводе (далее для простоты именуемом *клином*).

Хотя данная задача выглядит очень простой, при ее решении обнаруживаются весьма интересные и сложные эффекты, связанные с распространением звука, такие как, например, взаимодействие мод, горизонтальная рефракция и дифракция звука в вершине (на ребре) клина. Точное воспроизведение всех этих эффектов при моделировании звукового поля требует привлечения исключительно сложных математических методов (см., например, [12]). До некоторой степени данная задача представляет собой собрание всех основных вычислительных сложностей, с которыми можно столкнуться при проведении расчетов в подводной акустике.

По-видимому, самой значительной из них является учет дифракции в окрестности вершины клина, в особенности в случае малого угла раскрытия [12]. К нашему счастью, однако, вклад дифрагированной волны пренебрежимо мал при типичных для акустики океана пространственных масштабах задачи (т.е. в случае, когда угол раскрытия очень мал, а ребро клина находится очень далеко от источника звука).

Согласно работе Дина и Бакингема [1], акустическое поле в клине может быть представлено в виде ряда по так называемым изображениям источника $S_{n_b, l}$, которые нумеруются двумя индексами (см. объяснение в следующем разделе). Поле, связанное с каждым изображением $S_{n_b, l}$, мы обозначаем $p_{n_b, l}$. В этом случае суммарное поле внутри клина может быть найдено по формуле

$$p(x, y, z) = p_{0, -1}(x, y, z) + \sum_{n_b=1}^N \sum_l p_{n_b, l}(x, y, z). \quad (1)$$

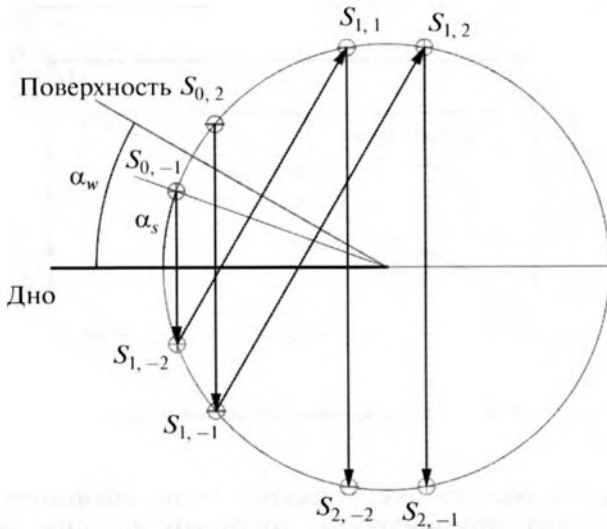


Рис. 2. Источник звука $S_{0,-1}$ и его изображения. Стрелки на рисунке показывают, как вся цепочка изображений может быть получена из истинного источника $S_{0,-1}$ и его отражения относительно поверхности моря $S_{0,2}$. Сначала мы отражаем пару $S_{0,-1}$ и $S_{0,2}$ относительно дна, чтобы получить $S_{1,-2}$ и $S_{1,-1}$. В свою очередь, их отражение относительно поверхности моря дает нам следующую пару $S_{1,1}$ и $S_{1,2}$, и т.д.

Вклад от каждого изображения источника может быть записан в виде разложения сферической волны по плоским волнам:

$$p_{n,l} = (-1)^{n_s} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{b=1}^{n_b} V(\varphi_b) \right] \times \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) dk_x dk_y, \quad (2)$$

где n_s есть число отражений от поверхности моря, которое, в свою очередь, определяется значениями n_b и l ; произведение в квадратных скобках представляет собой итоговый коэффициент отражения, ассоциированный с данным изображением. Волновой вектор \mathbf{k} в уравнении (2) имеет компоненты k_x , k_y и k_z в направлениях координатных осей x , y и z соответственно, они удовлетворяют соотношению $k_z = (k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2}$, где $k = \omega/c_1$, ω — циклическая частота источника. Положение приемника в координатной системе, начало которой совпадает с данным изображением источника, мы обозначим $\mathbf{R} = (x_r, y_r, z_r)$ (см. рис. 3). Для $z_r \geq 0$ мы выбираем ветвь квадратного корня, для которой $\text{Im}(k_z) \geq 0$, чтобы гарантировать выполнение условия излучения на бесконечности.

С помощью перехода к сферическим координатам

$$\begin{aligned} k_x &= k \sin \theta \cos \phi, & x_r &= R \sin \zeta \cos \xi, \\ k_y &= k \sin \theta \sin \phi, & y_r &= R \sin \zeta \sin \xi, \\ k_z &= k \cos \theta, & z_r &= R \cos \zeta \end{aligned} \quad (3)$$

уравнение (2) может быть переписано в более удобном для численной реализации виде:

$$p_{n,l} = (-1)^{n_s} \frac{ik}{2\pi} \int_0^{\pi/2-i\infty} \exp[i\Omega_z(\theta)] \sin \theta \times \int_0^{2\pi} \left[\prod_{b=1}^{n_b} V(\varphi_b) \right] \exp[i\Omega(\theta) \cos(\phi - \xi)] d\theta d\phi, \quad (4)$$

где $\Omega_z(\theta) = kR \cos \theta \cos \zeta$, $\Omega(\theta) = kR \sin \theta \sin \zeta$. Далее, разложим последнюю экспоненту в (4) в ряд по функциям Бесселя (детали см. в [1]):

$$p_{n,l} = (-1)^{n_s} \frac{ik}{2\pi} \int_0^{\pi/2-i\infty} \exp[i\Omega_z(\theta)] \sin \theta \times \left[\frac{a_0 J_0(\Omega)}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} i^v a_v J_v(\Omega) \right] d\theta, \quad (5)$$

где коэффициенты a_v определяются по формуле

$$a_v = 2 \cos(v\xi) \int_0^{\pi} \left[\prod_{b=1}^{n_b} V(\varphi_b) \right] \cos(v\phi) d\phi. \quad (6)$$

КОординАТЫ ИЗОБРАЖЕНИЙ ИСТОЧНИКА

Здесь мы обсуждаем вопрос о положении изображений источника, суммируемых в основной формуле (1) предыдущего раздела. Отметим, что в оригинальной работе [1] формула, описывающая координаты изображений, содержит две опечатки, что не позволяет использовать ее без воспроизведения вывода. Введем декартовы координаты (x, y, z) таким образом, что ось y параллельна ребру клина, ось z перпендикулярна поверхности моря и направлена вниз, а источник находится в точке $(x_s, 0, z_s)$ (см. рис. 1). В вертикальной плоскости xOz мы также будем использовать полярные координаты (R, Φ) , такие что полярная ось совпадает с границей раздела вода—дно, а полюс находится в вершине клина (см. рис. 2). Таким образом, положение источника можно задать полярным радиусом R_s и углом α_s :

$$R_s = \sqrt{z_s^2 + x_s^2}, \quad (7)$$

$$\alpha_s = \alpha_w - \text{arctg}(z_s/x_s). \quad (8)$$

В каждой точке водного слоя звуковое поле формируется прямой волной, распространяющейся непосредственно от источника, и волнами, испытавшими множественные последова-

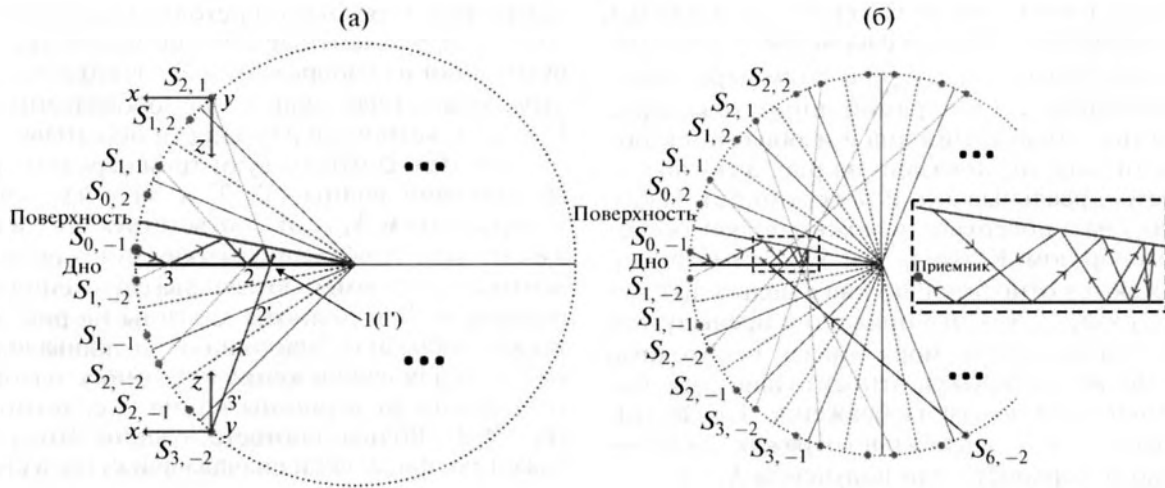


Рис. 3. Положение изображений дна и поверхности моря. Изображения поверхности отмечены пунктирными линиями, а изображения дна – сплошными. Жирные радиальные линии показывают, где находятся настоящие дно и поверхность. (а) Ломаная линия $S_{0,-1}-3-2-1$ показывает луч некоторой плоской волны, распространяющейся от источника к приемнику. Ему соответствует прямой луч $S_{3,-2}-3'-2'-1'$, идущий от изображения $S_{3,-2}$ в приемник. На рисунке также показаны локальные системы координат, связанные с изображениями, расположенными выше и ниже дна. Направление оси y при этом определяется по правилу правой руки. (б) Картина лучей для волн от изображения $S_{6,-2}$. Рядом показано их поведение вблизи ребра клина.

тельные отражения от дна и поверхности. Идея метода изображений состоит в замене поля одиночного точечного источника в волноводе с отражающими границами полем некоторой последовательности мнимых источников в безграничной однородной среде. При этом каждое изображение источника соответствует определенному числу отражений от поверхности и дна сферической волны, излученной реальным (физическим) источником звука. Это соответствие объяснено на рис. 2 и 3.

Используя обозначения из работы [1], угловые координаты $\Phi_{n_b,l}$ изображений источника $S_{n_b,l}$ можно записать как

$$\Phi_{n_b,l} = \begin{cases} -2(n_b - 1)\alpha_w - \alpha_s, & l = -2, \\ -2n_b\alpha_w + \alpha_s, & l = -1, \\ 2n_b\alpha_w + \alpha_s, & l = 1, \\ 2(n_b + 1)\alpha_w - \alpha_s, & l = 2, \end{cases} \quad (9)$$

где n_b есть количество отражений, испытанных волной из уравнения (1), соответствующей данному изображению $S_{n_b,l}$ (заметим, что каждое из отражений от дна соответствует ровно одному сомножителю $V(\phi_b)$ в уравнении (2)). Волны, соответствующие некоторому числу отражений от дна n_b , описываются четверкой изображений источника, нумеруемых индексом l . Исключение составляет лишь случай $n_b = 0$, для которого имеется два члена ряда (1) с $l = -1, 2$. Они соответствуют реальному источнику $S_{0,-1}$ и его отражению от поверхности моря $S_{0,2}$. Четверка изображений

для $n_b = 1$ получается следующим образом. Во-первых, волны от источников $S_{0,-1}$ и $S_{0,2}$ могут попадать в приемник после одного отражения от дна, из-за чего возникают изображения $S_{1,-2}$ и $S_{1,-1}$ (второй индекс принимает отрицательные значения, когда изображение находится ниже границы раздела). Соответствующие им угловые координаты получаются обращением $\Phi \rightarrow -\Phi$ полярных углов для $S_{0,-1}$ и $S_{0,2}$, например, $\Phi_{1,-2} = -\Phi_{0,-1}$. Во-вторых, волны от $S_{1,-2}$ и $S_{1,-1}$ могут вновь отразиться от поверхности, в результате чего получаются изображения $S_{1,1}$ и $S_{1,2}$. Легко видеть, что при таком отражении полярные углы преобразуются по формуле $\Phi \rightarrow 2\alpha_w - \Phi$, например, $\Phi_{1,1} = 2\alpha_w - \Phi_{1,-2}$. На этом четверка с $n_b = 1$ заканчивается, и новые пути можно получить лишь с большим количеством отражений от дна. Следующая четверка $S_{2,l}$ получается схожим образом, т.е. путем последовательного отражения $S_{1,1}$ и $S_{1,2}$ относительно дна, а затем отражения полученных образов относительно поверхности (см. рис. 2).

ПОЛОЖЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ ДНА

Здесь мы обсуждаем местоположение так называемых изображений дна, которые связаны с изображениями источника. В работе [1] выражение для их угловых координат не согласуется с формулой для звукового поля, соответствующего некоторому изображению источника (уравнение (2) настоящей работы).

Волны, которые на самом деле излучаются реальным источником $S_{0,-1}$, а затем испытывают

некоторое количество отражений от реальных дна и поверхности, можно рассматривать как излученные изображением $S_{n_b, l}$, а затем пересекающиеся при движении по прямой линии некоторое количество изображений дна и изображений поверхности, как это показано на рис. 3 (включая, разумеется, реальные дно и поверхность). Изображения дна и поверхности можно получить следующим образом. Когда $S_{0, -1}$ и $S_{0, 2}$ симметрично отображаются относительно дна с целью получения $S_{1, -2}$ и $S_{1, -1}$, как это описано в предыдущем разделе, поверхность моря также необходимо симметрично отобразить относительно дна, получив таким образом ее изображение. После этого, когда $S_{1, -2}$ и $S_{1, -1}$ зеркально отражаются относительно поверхности для получения $S_{1, 1}$ и $S_{1, 2}$, относительно нее мы также зеркально отражаем реальное дно и найденное ранее изображение поверхности, что дает нам второе изображение поверхности и первое изображение дна.

В общем случае при зеркальном отражении некоторой пары мнимых источников от дна (или поверхности) для получения следующей пары изображений все уже имеющиеся изображения дна и поверхности (включая настоящие дно и поверхность клина), находящиеся на той же стороне дна (соответственно, поверхности), что и указанная пара мнимых источников, должны быть зеркально отражены относительно дна (поверхности) для получения новых изображений. Примеры цепочек изображений дна и поверхности показаны на рис. 3.

Заметим, что при расчете поля, “порождаемого” некоторым изображением источника по формуле (2), используется локальная система координат, начало которой совпадает с данным изображением. Для мнимых источников, лежащих выше и ниже линии дна (и именуемых далее верхними и нижними изображениями соответственно), такие локальные системы координат показаны на рис. 3а. Легко видеть, что углы наклона изображений дна Θ_b относительно оси x в плоскости xOz локальной системы координат могут быть определены по формуле

$$\Theta_b = \begin{cases} 2(b-1)\alpha_w, & l < 0, \\ 2b\alpha_w, & l > 0, \end{cases} \quad 1 \leq b \leq n_b. \quad (10)$$

Заметим, что координатные системы, используемые нами для верхних изображений, несколько отличаются от описанных в работе [1]. Это различие позволяет нам существенно упростить рассмотрение вопроса о выборе ветви квадратного корня в следующем разделе, так как в нашем варианте угол Θ_b всегда положителен.

Для иллюстрации того, как изображения дна и поверхности используются при расчетах звукового поля, мы показали на рис. 3а луч, распростра-

няющийся от реального источника к приемнику, а также эквивалентный ему прямолинейный луч, исходящий из изображения источника $S_{3, -2}$. Три отражения от настоящего дна (обозначенные как 1, 2, и 3), которые в реальности испытывает волна, при этом соответствуют трем отражениям эквивалентной волны (1', 2' и 3'), “излученной” изображением $S_{3, -2}$ от соответствующих изображений дна. Аналогичным образом для эквивалентного луча заменяются и два отражения от поверхности. Для полноты картины на рис. 3б мы также изобразили “настоящий” и эквивалентный ему лучи для изображения источника, находящегося справа от вершины клина (т.е. такого, что $|\Phi| > \pi/2$). Волны, соответствующие этому изображению, физически сначала движутся в сторону вершины клина от реального источника, затем заворачивают и движутся в обратном направлении и лишь после этого попадают в приемник.

ВОПРОС О ВЫБОРЕ ВЕТВИ КВАДРАТНОГО КОРНЯ

В этом разделе мы обсуждаем вопрос о том, какую ветвь квадратного корня следует выбирать при расчете коэффициента отражения $V(\varphi_b)$ для каждого из сомножителей в формуле (2).

Перед рассмотрением вопроса о выборе ветви корня для $V(\varphi_b)$ в уравнении (2) полезно рассмотреть упрощенную задачу об отражении волн, выходящих из точечного источника, от наклонной границы раздела двух полупространств (см. схему на рис. 4). В этой задаче мы на самом деле сталкиваемся с тем же вопросом о выборе ветви квадратного корня, который возникает при каждом отражении от дна для волн, связанных с некоторым изображением источника. Заметим, что плоские волны на рис. 4, для которых волновые векторы находятся в затененных областях рисунка, распространяются не в направлении дна, а в противоположном ему. Присутствие таких волн является основной причиной сложностей при выборе ветви, возникающих в случае, когда одна из осей системы координат не совпадает с границей раздела.

Для простоты мы начинаем со случая жидкого дна, для которого коэффициент отражения имеет вид [7]

$$V(\varphi) = \frac{(\rho_2/\rho_1)\gamma_1 - \gamma_2}{(\rho_2/\rho_1)\gamma_1 + \gamma_2}. \quad (11)$$

Здесь γ_1 и γ_2 — компоненты волнового вектора падающей и преломленной волн, ортогональные к границе раздела. Они могут быть вычислены как

$$\gamma_1 = k \cos \varphi, \quad (12)$$

$$\gamma_2 = k_2 \cos \varphi_2, \quad (13)$$

где k_2 – волновое число в дне, φ_i – угол преломления. В нашем случае угол падения φ может быть определен из соотношения [1]

$$\cos \varphi = \sin \theta \sin \Theta \cos \varphi + \cos \theta \cos \Theta, \quad (14)$$

где Θ – угол наклона границы раздела в локальной системе координат. Уравнение (14) также устанавливает связь между присутствующими в (2) углами Θ_b и φ_b .

С учетом затухания в дне закон Снеллиуса может быть записан в виде

$$\frac{c_1}{c_2(1+i\eta\beta_2)} = \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_i}, \quad (15)$$

где $\eta = 1/(40\pi lge)$.

Полагая

$$\cos \varphi = a + ib \quad (16)$$

и подставляя (15) в (13), мы получаем

$$\gamma_2 = k\sqrt{U + iW}, \quad (17)$$

где U и W обозначают вещественную и мнимую части комплексного числа под квадратным корнем:

$$U = \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 (1 - \eta^2 \beta_2^2) - 1 + a^2 - b^2, \quad (18)$$

$$W = 2 \left[\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 \eta \beta_2 + ab \right]. \quad (19)$$

Заметим, что в акустике океана обыкновенно $\eta\beta_2 \ll 1$, а $c_1 < c_2$.

Расчет звукового давления, производимого некоторым изображением источника (по формуле (2)), требует правильного выбора ветви квадратного корня в (17) для γ_2 в зависимости от γ_1 и $\cos \varphi$. В данной работе мы предлагаем следующий принцип: следует выбирать знаки вещественной и мнимой частей для компоненты волнового вектора преломленной волны, ортогональной к границе раздела, такими же, как у падающей волны. Математически это означает, что γ_2 и γ_1 находятся в одном и том же квадранте комплексной плоскости, т.е. что выполняются неравенства: $\text{Re}(\gamma_1) \times \text{Re}(\gamma_2) \geq 0$ и $\text{Im}(\gamma_1) \times \text{Im}(\gamma_2) \geq 0$. Хотя формальное доказательство этого принципа, по-видимому, может быть весьма нетривиальным (и потребовать обращения к деталям вывода условий излучения Зоммерфельда [11]), его физическая суть весьма проста. В следующем разделе мы также осуществим верификацию этого принципа с помощью ряда вычислительных экспериментов.

При отсутствии потерь в дне ($\beta_2 = 0$), согласно нашему принципу, ветви квадратного корня для γ_2 выбираются следующим образом:

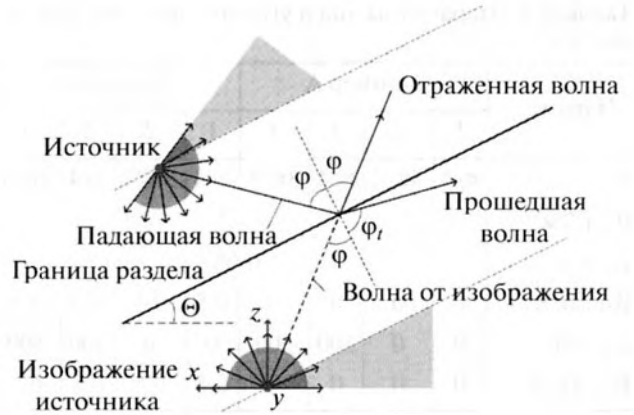


Рис. 4. Схема отражения волны, излученной точечным источником, на наклонной границе раздела двух полупространств. Маленькие стрелки изображают волновые векторы плоских волн, которые излучаются источником и распространяются в соответствующих направлениях. В частности, векторы, попавшие в затененные области, соответствуют плоским волнам, которые движутся в направлениях от границы раздела (т.е. удаляются от нее).

$$\gamma_2 \in \begin{cases} Q1e, a > 0 \\ Q2e, a < 0 \end{cases}, \theta \in T_R, \quad 0 < \Theta < \frac{\pi}{2}, \quad (20)$$

$$\gamma_2 \in \begin{cases} Q1, a > 0 \\ Q2, a < 0 \end{cases}, \theta \in T_M,$$

$$\gamma_2 \in \begin{cases} Q1e, a > 0 \\ Q2e, a < 0 \end{cases}, \theta \in T_R, \quad \frac{\pi}{2} < \Theta < \pi, \quad (21)$$

$$\gamma_2 \in \begin{cases} Q4, a > 0 \\ Q3, a < 0 \end{cases}, \theta \in T_M,$$

$$\gamma_2 \in Q1e, \theta \in T_R \cup T_M, \Theta = 0, \quad (22)$$

$$\gamma_2 \in \begin{cases} Q1e, a > 0 \\ Q2e, a < 0 \end{cases}, \theta \in T_R \cup T_M, \Theta = \frac{\pi}{2}, \quad (23)$$

где Q_i ($i = 1, 2, 3, 4$) есть i -й квадрант комплексной плоскости, а Qie представляет собой границу Q_i (например, $Q1e$ состоит из положительных частей вещественной и мнимой осей, т.е. $+real$ и $+imag$), а T_R и T_M обозначают множества $\{\theta | \theta \in (0, \pi/2)\}$ и $\{\theta | \theta \in (\pi/2, \pi/2 - i\infty)\}$ соответственно. Формула (22) описывает обычный выбор ветви в случае горизонтальной границы раздела [7].

Следует отметить, что в (20) для подмножества

$$Z1 = \{(\theta, \varphi) | \theta \in T_R, a < 0, U < 0\}$$

нашему правилу удовлетворяют как ветвь, лежащая на $+imag$, так и ветвь на $-imag$. Оказывается, однако (см. следующий раздел), что правильный ответ получается только с помощью первой из них. То же самое касается подмножества $Z1$ в условии (21).

Таблица 1. Параметры дна и угол поворота Θ в примерах А и Б

Параметр	Пример А				Пример Б			
	1	2	3	4	1	2	3	4
Θ	$\pi/4$	$3\pi/4$	$\pi/4$	$3\pi/4$	$\pi/4$	$3\pi/4$	$\pi/4$	$3\pi/4$
$\rho_2, \text{ г/см}^3$	1.25							
$c_2, \text{ м/с}$	1605							
$\beta_2, \text{ дБ/}\lambda$	0	0	0	0	0.5	0.5	0.5	0.5
$c_{2s}, \text{ м/с}$	0	0	500	500	0	0	500	500
$\beta_{2s}, \text{ дБ/}\lambda$	0	0	0	0	0.5	0.5	0.5	0.5

В случае наличия в дне затухания ($\beta_2 > 0$) наше правило приводит к следующим условиям для выбора ветви γ_2 :

$$\gamma_2 \in \left\{ \begin{array}{l} Q1, a > 0 \\ Q3, a < 0 \end{array} \right\}, \theta \in T_R$$

$$\gamma_2 \in \left\{ \begin{array}{l} Q1, a > 0 \\ Q3, W > 0 \\ Q2, W < 0 \end{array} \right\}, a < 0, \theta \in T_M, \quad 0 < \Theta < \frac{\pi}{2}, \quad (24)$$

$$\gamma_2 \in \left\{ \begin{array}{l} Q1, a > 0 \\ Q3, a < 0 \end{array} \right\}, \theta \in T_R$$

$$\gamma_2 \in \left\{ \begin{array}{l} Q1, W > 0 \\ Q4, W < 0 \end{array} \right\}, a > 0, \theta \in T_M, \quad \frac{\pi}{2} < \Theta < \pi, \quad (25)$$

$$\gamma_2 \in Q1, \theta \in T_R \cup T_M, \Theta = 0, \quad (26)$$

$$\gamma_2 \in \left\{ \begin{array}{l} Q1, a > 0 \\ Q3, a < 0 \end{array} \right\}, \theta \in T_R \cup T_M, \Theta = \frac{\pi}{2}. \quad (27)$$

Заметим, что хотя мы выбрали ветвь в квадранте Q3 для множества

$$Z2 = \{(\theta, \varphi) | \theta \in T_M, a < 0 < W\}$$

в условии (24), на самом деле ни этот вариант, ни противоположный (т.е. ветвь в Q1) не соответствуют нашему правилу. Более точно, ветвь в квадранте Q3 обеспечивает выполнение одного лишь неравенства $\text{Re}(\gamma_1) \times \text{Re}(\gamma_2) \geq 0$, в то время как ветвь в Q1 дает только $\text{Im}(\gamma_1) \times \text{Im}(\gamma_2) \geq 0$. Для этих особых случаев численный эксперимент (см. следующий раздел) показывает, что на множестве Z2 следует выбрать ветвь в квадранте Q3. Аналогичным образом, мы выбираем ветвь в Q1 в условии (25) для множества

$$Z3 = \{(\theta, \varphi) | \theta \in T_M, a > 0, W > 0\},$$

и такой выбор вновь обеспечивает нам лишь $\text{Re}(\gamma_1) \times \text{Re}(\gamma_2) \geq 0$.

Таким образом, мы дополняем приведенное выше правило следующим образом: если условия

$\text{Re}(\gamma_1) \times \text{Re}(\gamma_2) \geq 0$ и $\text{Im}(\gamma_1) \times \text{Im}(\gamma_2) \geq 0$ не могут быть удовлетворены одновременно, то нужно выбрать такую ветвь корня в γ_2 , которая обеспечит выполнение неравенства $\text{Re}(\gamma_1) \times \text{Re}(\gamma_2) \geq 0$.

Решение по методу изображений легко обобщается на случай жидкого клина, лежащего на упругом дне, с помощью прямой замены коэффициентов отражения в (2) для границы раздела жидкость–жидкость на коэффициенты, соответствующие границе жидкости и твердого тела. Эти коэффициенты могут быть найдены по формуле [7]:

$$V = \frac{\rho_2 \cos^2 2\varphi_s / \gamma_2 + \rho_2 \sin^2 2\varphi_s / \gamma_{2s} - \rho_1 / \gamma_1}{\rho_2 \cos^2 2\varphi_s / \gamma_2 + \rho_2 \sin^2 2\varphi_s / \gamma_{2s} + \rho_1 / \gamma_1}, \quad (28)$$

где γ_2 и γ_{2s} – вертикальные волновые числа P- и S-волн соответственно, а φ_s – угол преломления для S-волны. Выражение для γ_{2s} может быть получено простой заменой c_2 и β_2 в уравнениях (17)–(19) на c_{2s} и β_{2s} . Таким образом, условия для выбора ветви γ_{2s} в точности такие же, как для γ_2 и при $c_{2s} < c_1$, и при $c_{2s} > c_1$.

ПРОВЕРКА АЛГОРИТМА ВЫБОРА ВЕТВИ КОРНЯ

В этом разделе мы тестируем предложенную выше схему выбора ветви квадратного корня с помощью тестовых расчетов.

В примерах А и Б мы расширили тестовый пример, представленный на рис. 3 оригинальной работы [1], с целью проверки каждого из условий (20), (21), (24) и (25) по отдельности. Геометрия нашего вычислительного эксперимента показана на рис. 5а, в то время как на рис. 5б та же расчетная область повернута на угол Θ вокруг оси y . Заметим, что поворачивается лишь среда, но не система координат. В представленных здесь двух примерах мы проверяем, что звуковое поле в приемнике не зависит от угла между границей раздела и координатными осями. Параметры дна и угла поворота Θ для этих примеров представлены в табл. 1 для восьми тестовых случаев. Все прочие параметры задачи неизменны во всех восьми расчетах и показаны на рис. 5а.

В примере А, как показано в табл. 1, мы рассматриваем случай дна без затухания, чтобы проверить правило выбора ветви согласно (20) и (21). Отраженные поля, рассчитанные с использованием (20) и (21), показаны пунктирными линиями на рис. 6 для случаев 1–4. На том же рисунке штриховыми линиями показаны результаты аналогичного расчета, где в области Z1 ветвь квадратного корня выбирается противоположно условиям (20) и (21). Для проверки правила выбора ветви на том же рисунке сплошной линией мы показываем результат расчета поля в системе координат, одна из осей которой параллельна гра-



Рис. 5. (а) Геометрия расчетной области для построения эталонного решения. (б) Геометрия области после поворота относительно оси y .

нице раздела (т.е. $\Theta = 0$). Из рис. 6 видно, что пунктирная и сплошная линии практически совпадают во всех четырех случаях, в то время как штриховая линия заметно отличается от них. Данный численный эксперимент подтверждает правильность условий (20) и (21) как в случае жидкого дна, так и в случае дна со сдвиговой упругостью.

В примере Б (параметры для четырех случаев см. в правой части табл. 1) мы проверяем правило выбора ветви корня согласно условиям (24) и (25). Здесь мы просто добавляем затухание в дне для P - и S -волн, тогда как все прочие параметры имеют те же значения, что в примере А. Поля отраженной волны для примера Б, рассчитанные согласно условиям (24) и (25), показаны на рис. 7 пунктиром. Там же приведены и результаты расчетов, выполненные с выбором ветви вопреки условиям (24) и (25) только на множествах $Z2$ и $Z3$ (штриховые линии), а также эталонное решение, рассчитанное в системе координат, где $\Theta = 0$ (сплошные линии). Из рис. 7 видно, что результаты, рассчитанные согласно условиям (24) и (25), намного ближе к эталонному решению, чем при другом выборе ветви квадратного корня на $Z2$ и $Z3$.

В примере В мы тестируем предложенные правила выбора ветви корня в γ_2 в известном двумерном тестовом примере ASA (см. [9]), геометрия

которого соответствует рис. 1. Известно, что при рассмотрении распространения звука вдоль градиента глубины эту задачу можно считать двумерной. Параметры дна для четырех случаев в этом примере представлены в табл. 2. Предположим, что параметры водного слоя имеют следующие значения: $c_1 = 1500$ м/с, $\rho_1 = 1.0$ г/см³. Точечный источник с частотой 25 Гц расположен в точке $x = 4000$ м, $y = 0$, $z = 100$ м. Мы рассчитали относительные потери TL вдоль прямой $z = 30$ м, $y = 0$ с помощью метода изображений, а также с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Результаты расчетов представлены на рис. 8. Решение по МКЭ было получено с помощью подпрограммы для двумерного осесимметричного случая из коммерческого пакета COMSOL [8]. Условия (20)–(23) были использованы для случаев, когда в дне нет затухания (случай 1 и случай 2), а условия (24)–(27) – при его наличии (случай 3 и случай 4). Для всех четырех случаев результаты расчетов с помощью МКЭ и с использованием метода изображений находятся в полном согласии (кривые на рис. 8 практически не различимы). Этот результат еще раз подтверждает предложенное правило для выбора ветви корня в коэффициенте отражения формулы (2).

ТРЕХМЕРНАЯ СТРУКТУРА ЗВУКОВОГО ПОЛЯ В КЛИНЕ

В этом разделе мы представляем пример, в котором акустические поля вычисляются в четырех различных клиновидных волноводах с одинаковыми значениями скоростей c_2 и c_1 , но с различными значениями скорости упругих волн сдвига в дне c_{2s} . В некотором смысле эти четыре случая включают в себя все качественно различные (с точки зрения поведения звукового поля) соотношения между скоростями c_1 , c_2 и c_{2s} . До конца этого раздела мы фиксируем следующие значения параметров: $c_1 = 1500$ м/с, $c_2 = 3400$ м/с, $\rho_1 =$

Таблица 2. Параметры дна для примера В

Параметр	Пример В			
	1	2	3	4
ρ_2 , г/см ³	1.5			
c_2 , м/с	1700			
β_2 , дБ/λ	0	0	0.5	0.5
c_{2s} , м/с	0	500	0	500
β_{2s} , дБ/λ	0	0	0.5	0.5

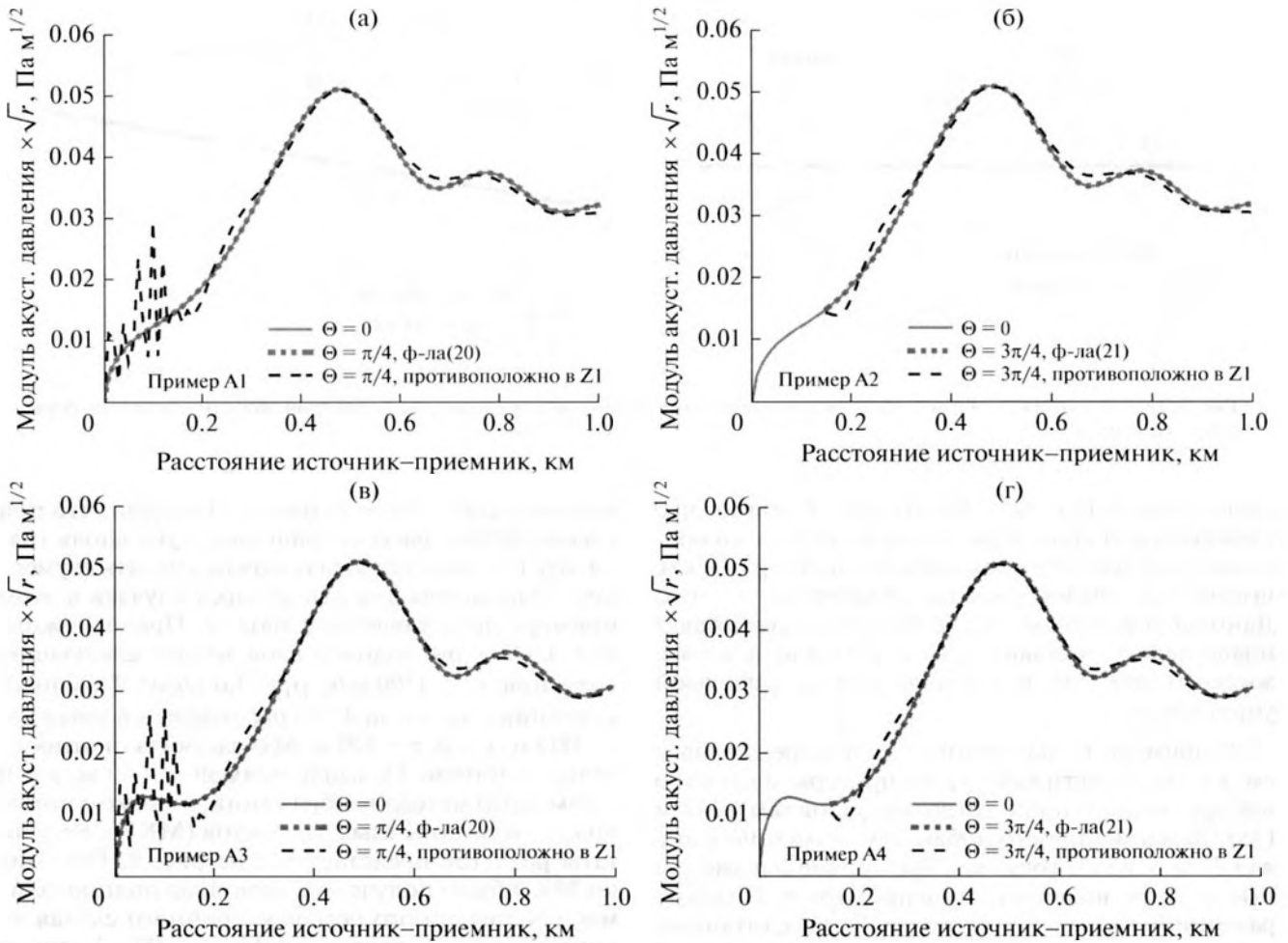


Рис. 6. Амплитуда отраженной волны как функция расстояния от источника до приемника для случаев 1–4 примера А. Пунктирные линии соответствуют выбору ветви квадратного корня согласно уравнениям (20) или (21), а штриховые линии – выбору ветви, противно уравнениям (20) или (21) только на подмножестве комплексной плоскости $Z1$. Эталонное решение, рассчитанное в системе координат, параллельной границе раздела сред, показано сплошной линией.

$= 1 \text{ г/см}^3$, $\rho_2 = 1.5 \text{ г/см}^3$, при этом затухание считаем равным нулю, т.е. $\beta_2 = \beta_{2s} = 0$. Геометрические параметры клина и положение источника совпадают с использованными в примере В (см. предыдущий раздел). Наша цель состоит в исследовании качественного изменения относительных потерь $TL(x, y)$ в клиновидном волноводе на горизонте $z = 30 \text{ м}$ при изменении величины c_{2s} от 0 до 1700 м/с (другими словами, мы исследуем характер зависимости акустического поля в клине от модуля сдвиговой упругости). Хотя глубина в клине, разумеется, не является постоянной, некоторые рассуждения о структуре поля, тем не менее, полезно провести на языке модовой теории. Ниже мы неоднократно упоминаем моды, возбуждаемые источником звука. При этом подразумеваются водные (захваченные) моды волновода сравнения, т.е. волновода типа Пекериса [10] с постоян-

ной глубиной 200 м (мы вычислили их, используя широко известную программу Kraken).

Мы начинаем со случая $c_{2s} = 0$ (случай Г1), т.е. со случая клина над жидким полупространством. В этой ситуации источник возбуждает шесть водных мод, амплитуды которых достаточно медленно убывают при удалении от него. График относительных потерь $TL(x, y)$ в плоскости $z = 30 \text{ м}$ обнаруживает обычную для горизонтальной рефракции картину звукового поля [1]. Относительные потери $TL(y)$, рассчитанные вдоль прямой $z = 30 \text{ м}$, $x = 4 \text{ км}$ для этого случая, показаны на рис. 9 сплошной линией, а контурный график $TL(x, y)$ в плоскости $z = 30 \text{ м}$ представлен на рис. 10а. Каустики, имеющие форму гипербол, формируются точками поворота горизонтальных лучей [13] (см. рис. 10а). Заметим также, что последовательность почти эквидистантных максимумов на рис. 9 в дальнем поле $y > > 20 \text{ км}$ есть результат самоинтерференции в рас-

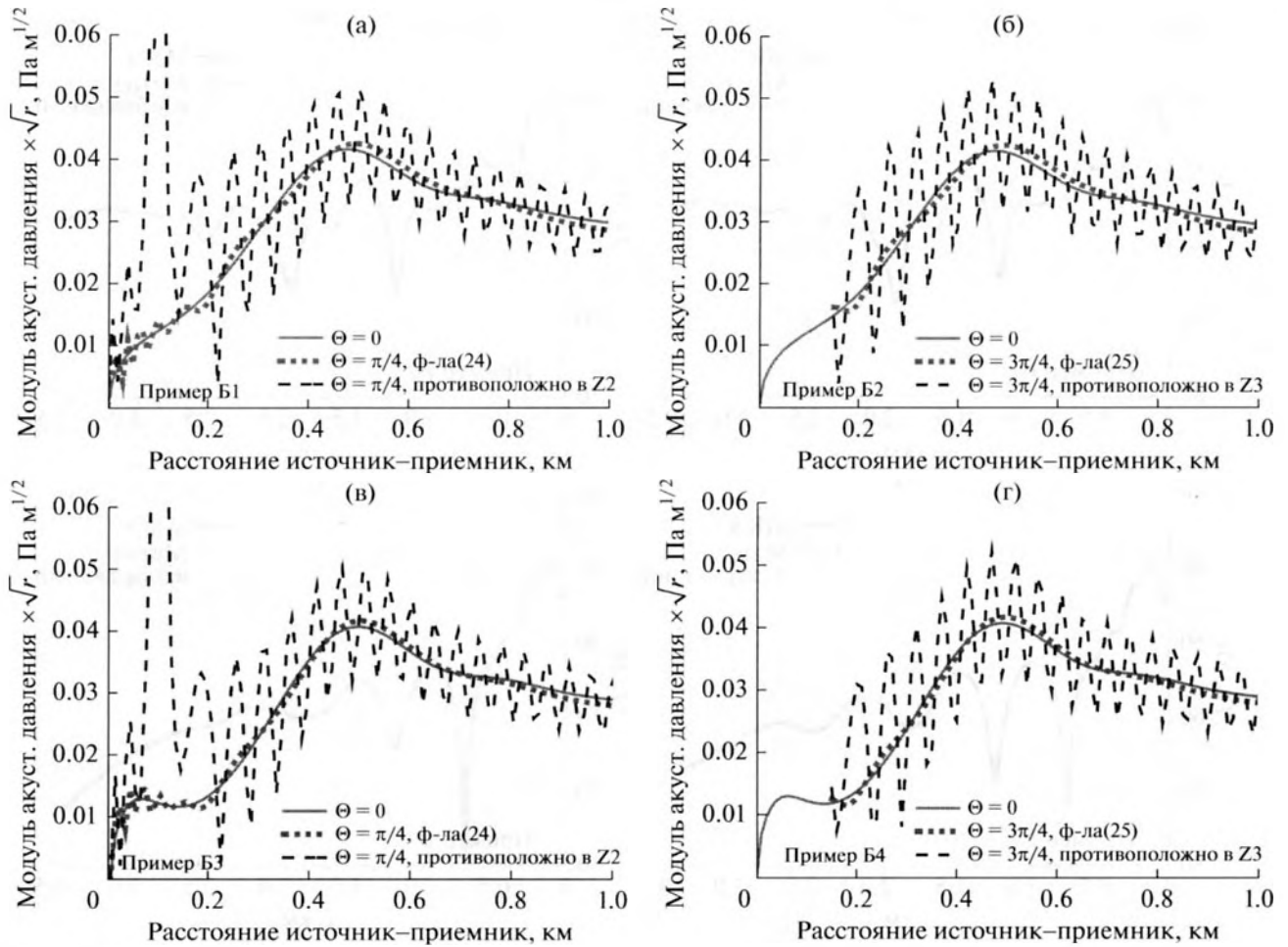


Рис. 7. Амплитуда отраженной волны как функция расстояния от источника до приемника (случаи 1–4, пример Б). Пунктирные линии соответствуют выбору ветви квадратного корня согласно уравнениям (24) или (25), а штриховые линии – выбору ветви, противно уравнениям (24) или (25) только на подмножествах комплексной плоскости Z2 или Z3. Эталонное решение, рассчитанное в системе координат, параллельной границе раздела сред, показано сплошной линией.

пределении амплитуды первой моды. Это явление возникает, когда волны, соответствующие прямым горизонтальным лучам для этой моды, интерферируют с волнами, которые соответствуют лучам, первоначально двигавшимся в сторону вершины клина, а затем рефрагированным обратно [6, 13] (на языке мнимых источников эта геометрия распространения объяснена на рис. 36).

В случае Г2 мы полагаем $c_{2s} = 500$ м/с, и, таким образом, он характеризуется неравенством $c_{2s} \ll c_1 < c_2$. Соответствующие данному случаю относительные потери $TL(y)$ вдоль прямой $z = 30$ м, $x = 4$ км (график показан шрихпунктирной линией на рис. 9) в дальнем поле на 10–15 дБ выше, чем в предыдущем случае $c_{2s} = 0$. Заметим еще, что положения интерференционных максимумов (см. рис. 9) и каустик горизонтальных лучей (см. рис. 10б) почти такие же, как в случае жидкого дна. Таким образом, мы заключаем, что для не-

больших значений c_{2s} (даже на низких частотах) интерференционную картину звукового поля можно изучать в рамках модели жидкого дна. Присутствие сдвиговой упругости в этом случае проявляется лишь в более быстром убывании амплитуды звукового поля по мере увеличения расстояния от источника в связи с потерями, вызванными переходом энергии акустических волн в воде в энергию сдвиговых волн в дне. Несмотря на то, что в этом случае затухание в дне отсутствует, волновые числа водных мод непременно имеют ненулевую мнимую часть.

Рассмотрим теперь случай Г3, для которого $c_{2s} = 1000$ м/с, т.е. $c_{2s} < c_1 < c_2$ (c_1 все еще превосходит c_{2s} , однако эти величины имеют один порядок). Относительные потери для направления поперек клина на этот раз показаны пунктирной линией на рис. 9, а контурный график $TL(x, y)$ в плоскости $z = 30$ м представлен на рис. 10в. В этом

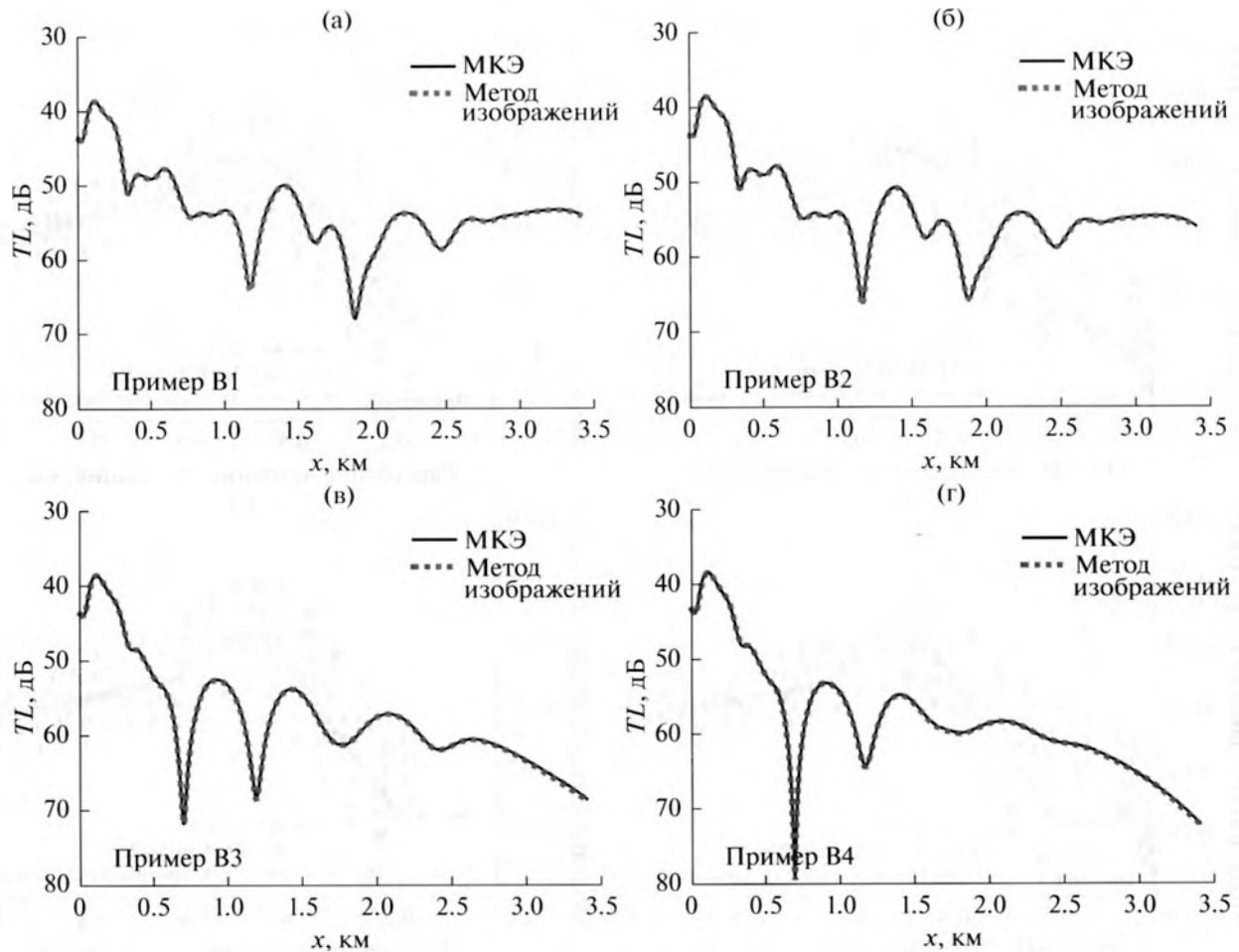


Рис. 8. Графики относительных потерь, рассчитанных вдоль линии $z = 30$ м, $y = 0$ с использованием метода изображений (штрихпунктирная линия) и метода конечных элементов (сплошная линия). Пример В, случаи 1–4.

случае мнимые части волновых чисел мод, возбужденных источником, приблизительно в 10 раз больше, чем соответствующие величины для случая Г2. Таким образом, амплитуда звукового поля убывает приблизительно в 10 раз быстрее (в дБ на 1 км дистанции распространения), чем для $c_{2s} = 500$ м/с. Очевидно, причиной этого является существенно более высокий уровень потерь энергии звуковых колебаний на возбуждение S-волн в дне.

В завершение этого примера положим $c_{2s} = 1700$ м/с, т.е. рассмотрим случай $c_1 < c_{2s} < c_2$ (случай Г4). Относительные потери при распространении в направлении поперек наклона дна для этого случая показаны штриховой линией на рис. 9, а контурный график горизонтального среза $TL(x, y)$ в плоскости $z = 30$ м показан на рис. 10г. Уровень звукового поля вдали от источника здесь сопоставим с наблюдаемым в случае Г1, однако интерференционная картина в горизонтальной плоскости отличается от последнего радикально. Во-первых, в данном случае источник возбуждает всего четыре моды, волновые числа

которых не имеют мнимой части при условии, что β_2 и β_{2s} равны нулю. Три волновых числа при этом с высокой степенью точности совпадают с волновыми числами, вычисленными для случая жидкого дна, скорость звука в котором равна $c_2 = 1700$ м/с. Четвертое волновое число соответствует волне Шолте и имеет существенно

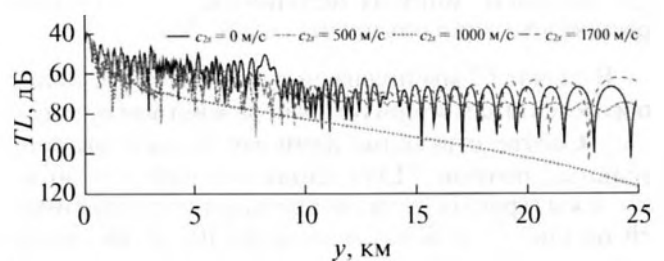


Рис. 9. Графики относительных потерь $TL(y)$ на глубине $z = 30$ м в направлении вдоль ребра (ось y) клина при скорости волн сдвига в дне, равной $c_{2s} = 0, 500, 1000$ и 1700 м/с (см. обозначения на рисунке).

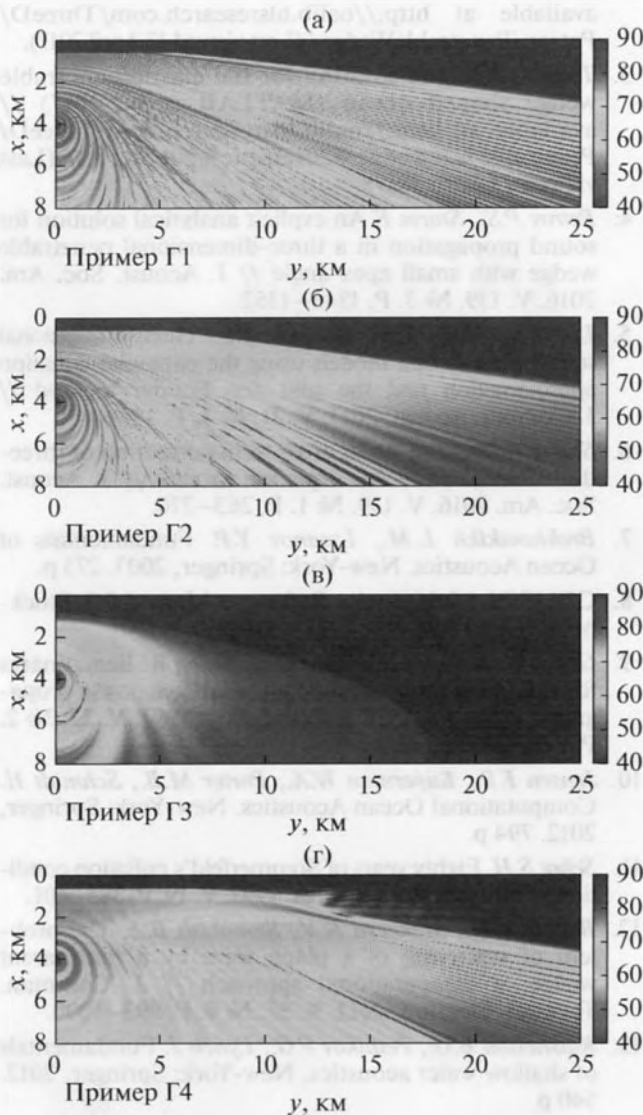


Рис. 10. Горизонтальный разрез поля относительных потерь на глубине $z = 30$ м для клиновидных волноводов, где скорость волн сдвига в дне (а) $c_{2s} = 0$, (б) 500, (в) 1000 и (г) 1700 м/с. Пример Г.

большую вещественную часть, чем остальные три. Волна Шолте, однако, не может быть эффективно возбуждена источником, находящимся вдали от дна, и потому интерференционная картина на рис. 10г получается в результате интерференции полей трех “водных” мод. Заметим, что каустики горизонтальных лучей в этом случае имеют более сложную геометрию, чем для Г1, и мы планируем изучить ее в ходе дальнейшей работы. Заметим также, что и в этом случае на расстояниях более 20 км от источника картина поля определяется самоинтерференцией первой моды, и его уровень даже превосходит наблюдаемый в случае Г1 на больших расстояниях от источника (см. рис. 9).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этом исследовании мы вновь обратились к решению задачи о распространении звука в клиновидном волноводе, предложенному Дином и Бакингом и основанному на применении метода изображений. Мы постарались прояснить некоторые части их работы [1] и представили небольшие исправления для полученных в ней формул. Более точно, были получены правильные формулы для угловых координат изображенного источника и дна. Нами также разобран вопрос о выборе ветви квадратного корня в коэффициенте отражения, который неизбежно возникает при вычислении решения [1] (этот вопрос не обсуждается в оригинальной работе). Методика выбора ветви корня была проверена в ходе модельных расчетов.

Кроме того, в работе исследована качественная трансформация картины звукового поля в условиях сильной горизонтальной рефракции в клине при различных соотношениях между скоростями упругих волн сжатия и сдвига в дне и скоростью звука в водном слое. Показано, что в случае $c_{2s} < c_1$ (наиболее типичная ситуация для задач подводной акустики) наличие сдвиговой упругости в дне приводит лишь к более быстрому убыванию интенсивности акустического поля по мере удаления от источника в связи с трансформацией энергии звуковых колебаний в воде в энергию волн сдвига (*S*-волн) в донных породах (при этом интерференционные максимумы звукового поля расположены практически там же, где они находятся в случае жидкого дна). Интерференционная картина, однако, разительно меняется, когда мы переходим в область $c_{2s} > c_1$, и характер этих изменений, по-видимому, заслуживает дополнительного изучения. В частности, было бы интересно проверить, что в точности происходит при приближении скорости сдвиговых волн к скорости звука в воде, т.е. при $c_{2s} \rightarrow c_1 \pm 0$. Для малых наклонов дна (т.е. при условии, что угол раскрытия клина мал) этот вопрос может быть исследован в адиабатическом приближении с использованием подхода, описанного в работах [4, 16].

Необходимо отметить, однако, что метод изображений может использоваться только в случае постоянной скорости звука в водном слое, в задаче, где единственной причиной возникновения горизонтальной рефракции является наклон дна. Данный эффект, однако, может быть также обусловлен влиянием неоднородностей водного слоя (например, внутренних волн [15], синоптических вихрей или струй течений [10]). Эти неоднородности могут не только быть самостоятельной причиной возникновения горизонтальной рефракции, но и кардинальным образом менять интерференционную картину поля в горизонтальной плоскости, обусловленную неоднород-

ностями дна. Так, например, наличие выраженного термоклина в водном слое может усиливать эффект горизонтальной рефракции на наклонном дне [16]. Причиной этого является концентрация акустической энергии в придонном волноводе. К сожалению, все эти эффекты оказываются за рамками возможностей метода изображений. Для их учета могут быть использованы, например, методы, предложенные в [4, 14].

Задача о распространении звука в клиновидном волноводе активно используется в качестве основного “трехмерного” тестового примера в течение уже почти двадцати лет (например, программа, использованная для расчетов в [16], тестировалась именно на этом примере). По-видимому, она будет играть эту роль и в дальнейшем. В этой связи мы полагаем, что наше исследование будет полезным для всех, кому необходима программная реализация решения [1] для проведения вычислений. Отметим, что мы разместили использованный при подготовке статьи программный комплекс в сети Интернет [2, 3] (в свободном доступе).

Работа J.T. и S.P. была поддержана Национальным фондом естественных наук КНР (грант № 11234002). П.П. и С.К. получили поддержку в рамках программы ТОИ ДВО РАН “Нелинейные динамические процессы в океане и атмосфере” (№ 0201363045). Работа П.П. также была поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) № 16-05-01074_a и грантом Президента РФ МК-2262.2017.5.

Авторы также благодарят профессоров Yiwan Huang и Shi'e Yang и аспиранта Chuanxiu Xu Харбинского инженерного университета за ценные обсуждения, а также профессора Гранта Дина (автора работы [1]) за поддержку идеи данного исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Deane G.B., Buckingham M.J. An analysis of the three-dimensional sound field in a penetrable wedge with a stratified fluid or elastic basement // *J. Acoust. Soc. Am.* 1993. V. 93. № 3. P. 1319–1328.
2. Petrov P.S. The 3D penetrable wedge solution of G. Deane and M. Buckingham (MATLAB code, 2015) // available at <http://oalib.hlsresearch.com/ThreeD/Petrov/PenetrableWedge/> (Last viewed 13 April 2017).
3. Tang J. Analytic solution for the elastic penetrable wedge shaped ocean (MATLAB code, 2017) // available at [http://oalib.hlsresearch.com/ThreeD/Penetrable%20wedge%20\(elastic%20bottom\)/](http://oalib.hlsresearch.com/ThreeD/Penetrable%20wedge%20(elastic%20bottom)/) (Last viewed 13 April 2017).
4. Petrov P.S., Sturm F. An explicit analytical solution for sound propagation in a three-dimensional penetrable wedge with small apex angle // *J. Acoust. Soc. Am.* 2016. V. 139. № 3. P. 1343–1352.
5. Lin Y.T., Duda T.F., Newhall A.E. Three-dimensional sound propagation models using the parabolic-equation approximation and the split-step Fourier method // *J. Comput. Acoust.* 2013. V. 21. № 1. P. 1250018.
6. Sturm F. Leading-order cross term correction of three-dimensional parabolic equation models // *J. Acoust. Soc. Am.* 2016. V. 139. № 1. P. 263–270.
7. Brekhovskikh L.M., Lysanov Y.P. *Fundamentals of Ocean Acoustics*. New-York: Springer, 2003. 273 p.
8. COMSOL Multiphysics Reference Manual 5.2. Stockholm: COMSOL AB, 2015. 1335 p.
9. Goh J.T., Schmidt H., Gerstoft P., Seong W. Benchmarks for validating range-dependent seismo-acoustic propagation codes // *IEEE J. Ocean Eng.* 1997. V. 22. № 2. P. 226–236.
10. Jensen F.B., Kuperman W.A., Porter M.B., Schmidt H. *Computational Ocean Acoustics*. New-York: Springer, 2012. 794 p.
11. Schot S.H. Eighty years of Sommerfeld's radiation condition // *Historia Mathematica*. 1992. V. 19. P. 385–401.
12. Babich V.M., Mokeeva N.V., Samokish B.A. The problem of scattering of a plane wave by a transparent wedge: a computational approach // *J. Commun. Technol. Electron.* 2012. V. 57. № 9. P. 993–1000.
13. Katsnelson B.G., Petnikov V.G., Lynch J. *Fundamentals of shallow water acoustics*. New-York: Springer, 2012. 540 p.
14. Petrov P.S., Prants S.V., Petrova T.N. Analytical lie-algebraic solution of a 3D sound propagation problem in the ocean // *Phys. Lett. A*. 2017. V. 381. № 23. P. 1921–1925.
15. Badiey M., Katsnelson B.G., Lin Y.T., Lynch J.F. Acoustic multipath arrivals in the horizontal plane due to approaching nonlinear internal waves // *J. Acoust. Soc. Am.* 2011. V. 129. № 4. P. EL141–EL147.
16. Рутенко А.Н., Козицкий С.Б., Манульчев Д.С. Влияние наклонного дна на распространение звука // *Акуст. журн.* 2015. Т. 61. № 1. С. 76–89.