

ОБРАБОТКА АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ.  
КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 681.88

МЕТОД МИНИМАЛЬНОГО МНОГОЧЛЕНА ДЛЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ  
СИГНАЛОВ, ПРИНИМАЕМЫХ АНТЕННОЙ РЕШЕТКОЙ

© 2018 г. В. Т. Ермолаев, А. Г. Флакман\*, А. В. Елохин, В. В. Купцов

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина 23

\*e-mail: flak2402@gmail.com

Поступила в редакцию 16.12.2016 г.

Исследована эффективность проекционного метода минимального многочлена для решения проблемы определения числа источников сигналов, воздействующих на антенную решетку (АР) произвольной конфигурации, и их угловых направлений. Метод предполагает оценку степени минимального многочлена корреляционной матрицы входного процесса в АР на основе статистически обобщенного среднеквадратического критерия. Особое внимание уделяется важному для многоэлементных АР случаю “сверхкороткой” выборки входного процесса, когда число выборок значительно меньше числа элементов АР. Показано, что в этом случае предложенный метод является более эффективным по сравнению с методами, основанными на информационном критерии АИС (Akaike’s Information Criterion) или на критерии MDL (Minimum Description Length).

*Ключевые слова:* антенная решетка, проекционные методы “сверхразрешения”, оценка числа источников сигналов, минимальный многочлен матрицы

DOI: 10.7868/S0320791918010057

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время методы оценки параметров источников сигналов с помощью антенных решеток (АР) находят широкое применение в различных областях науки и техники: гидроакустике, радиолокации, радиосвязи и др. [1–4]. Для оценки угловых координат близкорасположенных источников используются методы “сверхразрешения”. Такое название связано с тем, что с их помощью можно превзойти рэлеевский предел углового разрешения, равный ширине луча АР. Данные методы можно разделить на два класса – непараметрические и параметрические [5–7]. Для параметрических методов необходимо построить математическую сигнальную модель на основе имеющихся априорных данных. Например, часто делается предположение о малом угловом размере источников сигналов (дискретные источники), типе волнового фронта (плоский, цилиндрический, сферический), характере многолучевости и рассеяния в пространственном канале. Неизвестными являются число источников сигналов, их мощности и угловые направления, которые являются числовыми параметрами в модели. Задача параметрических методов заключается в оценке этих параметров по принятой реализации входного процесса в АР. Непараметрические методы не предполагают построение сигнальной модели, а

основаны на непосредственном анализе входного процесса АР.

Одним из популярных сверхразрешающих методов является непараметрический метод Кейпона [6, 7]. Из достаточно большого количества параметрических методов наибольшей эффективностью обладают проекционные методы, основанные на построении матричного проектора на шумовое подпространство. К ним можно отнести методы максимально правдоподобной оценки и MUSIC (Multiple Signal Classification) с его модификациями [3, 6, 7], а также проекционный метод, основанный на оценке степени и корней минимального многочлена корреляционной матрицы (КМ) входного процесса в АР, который далее будем называть методом минимального многочлена (Minimal Polynomial Method – MPM) [8, 9].

Методы максимально правдоподобной оценки и MUSIC не дают возможности оценить число источников сигналов, которое является одним из параметров математической сигнальной модели и должно быть известно или предварительно оценено. Так как функция правдоподобия не имеет экстремума по числу источников, то предлагается модифицировать эту функцию путем добавления к ней некоторой корректирующей (“штрафной”) функции. Модифицированная функция правдоподобия имеет максимум в зависимости от числа источников, положение которого и является оцен-

кой числа источников. Однако статистически строгое обоснование корректирующей функции отсутствует. Данная функция формируется обычно на основе информационного критерия AIC (Akaike's Information Criterion) или MDL [7, 10].

Проекционный метод MPM дает возможность одновременно оценить число источников и построить матричный проектор на шумовое подпространство, что позволяет определить направления прихода сигналов и их мощности. Число  $J$  источников определяется степенью  $m$  минимального многочлена КМ  $\mathbf{M}$  входного процесса ( $J = m - 1$ ). Однако на практике доступной является оценочная КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  входного процесса, полученная на основе выборки входного процесса в элементах AP. Так как выборка имеет конечную длину, то элементы КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  являются случайными величинами, а минимальный многочлен КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  состоит из  $N$  сомножителей и совпадает с характеристическим многочленом КМ  $\hat{\mathbf{M}}$ , где  $N$  – число элементов AP. Таким образом, при переходе от точной КМ  $\mathbf{M}$  к выборочной КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  степень минимального многочлена увеличивается от  $J + 1$  до  $N$  и перестает зависеть от числа источников сигналов. В [9] предложен и статистически обоснован функционал среднеквадратической ошибки (СКО) для оценки степени и корней минимального многочлена. Данный функционал дает возможность аппроксимировать минимальный многочлен точной КМ  $\mathbf{M}$  некоторым многочленом, имеющим минимальную степень и отличие от минимального многочлена, не превышающее заданное значение, которое можно определить на основе априорной информации о собственном шуме приемных устройств AP.

На практике часто используются AP с большим числом элементов, когда трудно иметь длинную выборку входного процесса с числом  $L$  выборочных векторов больше числа  $N$  элементов AP, например, из-за нестационарности сигнально-помеховой обстановки. Поэтому актуален случай короткой выборки, когда  $L < N$ . Известно [7], что адаптивные методы подавления помех обладают высокой эффективностью в этом случае. Представляет интерес анализ эффективности сверхразрешающего метода MPM в условиях короткой выборки входного процесса. Более того, для многоэлементных AP выборка может становиться “сверхкороткой”, когда длина  $L$  значительно меньше числа  $N$  ( $L \ll N$ ).

Источники сигналов могут быть как некоррелированными, так коррелированными между собой. Например, в гидроакустическом канале с многолучевым распространением сигналов один источник создает несколько волновых фронтов, приходящих к AP с различных направлений. Такую ситуацию можно рассматривать как прием

сигналов от нескольких коррелированных источников. При этом некоторые из сигнальных собственных чисел точной КМ  $\mathbf{M}$  становятся близкими к шумовому собственному числу, что затрудняет оценку числа источников, связанную с разделением собственных чисел выборочной КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  на сигнальные и шумовые.

Эффективность метода MPM для решения проблемы “сверхразрешения” анализировалась в [9] для некоррелированных источников. Показано, что этот метод обеспечивает значительно более высокое разрешение по сравнению с методом Кейпона. Однако представляет интерес сравнение его эффективности с эффективностью метода MUSIC. В [9] не рассматривался также вопрос оценки числа источников сигналов с помощью метода MPM и не анализировались случаи “сверхкороткой” выборки входного процесса и коррелированных источников. Исследованию данных проблем посвящена настоящая работа.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СИГНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ

Основная цель работы заключается в сравнении эффективности метода MPM и критериев AIC или MDL при оценивании числа источников сигналов на входе многоэлементной AP в случае “сверхкороткой” выборки входного процесса, когда число выборок значительно меньше числа элементов AP. Для этого достаточно рассмотреть относительно простую сигнальную модель, при которой считается, что на AP приходят узкополосные сигналы от  $J$  дискретных (точечных) источников. Тогда выборку вектора  $\mathbf{X}(l)$  входного процесса в  $N$ -элементной AP в  $l$ -й момент времени можно представить в виде

$$\mathbf{X}(l) = \sum_{j=1}^J a_j(l) \mathbf{S}_j + \mathbf{Z}(l), \quad (1)$$

где  $a_j(l)$  – комплексная амплитуда  $j$ -го источника в элементах AP, которую будем считать гауссовым шумовым процессом;  $\mathbf{S}_j$  – вектор амплитудно-фазового распределения сигнала  $j$ -го источника;  $\mathbf{Z}(l)$  – вектор аддитивных гауссовых шумов приемных устройств с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_0^2$ . Далее без ограничения общности будем считать  $\sigma_0^2 = 1$ . Выборочные векторы  $\mathbf{X}(l)$  берутся с временным интервалом, обратным ширине полосы приемных устройств  $\Delta t \approx (1/\Delta f)$  для обеспечения их взаимной некоррелированности.

Статистическую связь источников зададим матрицей  $\mathbf{V}$  с элементами  $\mathbf{V}_{jq} = \langle a_j(l) a_q^*(l) \rangle = \sqrt{v_j v_q} \rho_{jq}$ , где  $v_j$  – мощность сигнала  $j$ -го источника в элементах AP,  $\rho_{jq}$  – коэффициент корреляции

реляции комплексных амплитуд  $j$ -го и  $q$ -го источников,  $(\cdot)^*$  – комплексное сопряжение,  $\langle \cdot \rangle$  – статистическое среднее. В случае некоррелированных источников матрица  $\mathbf{B}$  является диагональной:  $\mathbf{B} = \text{diag}\{v_1, v_2, \dots, v_J\}$ .

Статистические свойства совокупности гауссовых комплексных величин  $\mathbf{X}(l)$  определяются КМ входного процесса  $\mathbf{M} = \langle \mathbf{X}(l)\mathbf{X}(l)^H \rangle$  ( $(\cdot)^H$  – эрмитово сопряжение), которая равна [5–7]

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} + \mathbf{S}^{(0)}\mathbf{B}\mathbf{S}^{(0)H}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная КМ некоррелированных собственных шумов,  $\mathbf{S}^{(0)} = [\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_J]$  – матрица волновых фронтов источников сигналов в элементах АР, столбцами которой являются векторы  $\mathbf{S}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, J$ ), зависящие от углового расположения соответствующих источников сигналов относительно АР. В случае некоррелированных источников КМ является суммой КМ отдельных источников, и вместо (2) будем иметь

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} + \sum_{i=1}^J v_i \mathbf{S}_i \mathbf{S}_i^H. \quad (3)$$

На практике вместо точной КМ (2) используется ее максимально правдоподобная оценка  $\hat{\mathbf{M}}$  по  $L$  выборочным векторам  $\mathbf{X}(l)$  входного процесса в элементах АР, равная [11]

$$\hat{\mathbf{M}} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{X}(l)\mathbf{X}(l)^H. \quad (4)$$

Элементы выборочной КМ являются случайными числами, и вероятность появления кратных собственных чисел пренебрежимо мала. Выборка входного процесса может быть длинной или короткой, в зависимости от соотношения между числом  $L$  выборок входного процесса и числом  $N$  элементов АР.

Конкретизируем вектор  $\mathbf{S}_j$  амплитудно-фазового распределения  $j$ -го сигнала в элементах АР. Будем считать, что источники являются точечными и расположены достаточно далеко от апертуры АР, то есть волновые фронты являются плоскими. Для АР произвольной конфигурации  $n$ -я компонента вектора  $\mathbf{S}_j$  равна  $(S_j)_n = \exp[-j(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}_n)]$ , где вектор  $\boldsymbol{\rho}_n$  задает положение  $n$ -го элемента АР в трехмерной системе координат  $(x, y, z)$ , начало которой совмещено с первым элементом,  $\mathbf{k}$  – волновой вектор, задающий направление распространения волны,  $(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}_n)$  – скалярное произведение векторов  $\mathbf{k}$  и  $\boldsymbol{\rho}_n$ . Для линейной и эквидистантной АР  $(S_j)_n = \exp[j(n-1)u_j]$ ,  $u_j = 2\pi(d/\lambda)\sin\varphi_j$ , где  $\varphi_j$  – угловая координата  $j$ -го источника, отсчитываемая от нормали к АР,  $d$  – период АР,  $\lambda$  – длина волны.

### 3. МЕТОД МИНИМАЛЬНОГО МНОГОЧЛЕНА

Точная КМ  $\mathbf{M}$  имеет собственные числа  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$  и характеристический многочлен  $\psi_N(\lambda)$  степени  $N$ . Когда число источников сигналов меньше числа элементов АР ( $J < N$ ), многочлен  $\psi_N(\lambda)$  имеет кратные корни. Тогда существует минимальный многочлен  $\psi_{J+1}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_{J+1})$ , который не имеет кратных корней, является делителем характеристического многочлена и имеет наименьшую степень  $m$  [12]. Степень многочлена  $\psi_{J+1}(\lambda)$  равна  $m = J + 1$ , т.е. определяется числом источников сигналов, а его корнями являются не равные между собой собственные числа КМ  $\mathbf{M}$  ( $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{J+1}$ ). Последнее (наименьшее) собственное число равно мощности собственного шума ( $\lambda_{J+1} = 1$ ) и называется шумовым, а остальные (сигнальные) собственные числа зависят от параметров источников сигналов.

КМ  $\mathbf{M}$  можно представить в виде суммы матриц-проекторов на сигнальное (размерность  $J$ ) и шумовое (размерность  $N - J$ ) подпространства ( $\mathbf{M} = \mathbf{P}_{\text{signal}} + \mathbf{P}_{\text{noise}}$ ). Матрицу  $\mathbf{P}_{\text{noise}}$  можно представить в виде [9]

$$\mathbf{P}_{\text{noise}} = \left[ \prod_{p=1}^J (\mathbf{M} - \lambda_p \mathbf{I}) \right] \left[ \prod_{p=1}^J (1 - \lambda_p) \right]^{-1}. \quad (5)$$

Доля выходной мощности АР, соответствующая подпространству собственного шума при сканировании лучом АР, равна  $|\mathbf{P}_{\text{noise}}\mathbf{S}(\varphi)|^2$ , где  $\mathbf{S}(\varphi)$  – вектор произвольного направления  $\varphi$  с  $n$ -й компонентой, равной  $S(\varphi)_n = \exp[j(n-1)u]$ ,  $u = 2\pi(d/\lambda)\sin\varphi$ . Сформируем обратную функцию угла  $\varphi$  вида

$$\eta_{MPM}(\varphi) = [\mathbf{S}^H(\varphi)\mathbf{P}_{\text{noise}}^H\mathbf{P}_{\text{noise}}\mathbf{S}(\varphi)]^{-1}. \quad (6)$$

Если АР согласована с  $j$ -м источником ( $\mathbf{S}(\varphi) = \mathbf{S}_j$ ), или, другими словами, максимум диаграммы направленности АР ориентирован в направлении на этот источник, то вектор  $\mathbf{S}(\varphi)$  будет принадлежать сигнальному подпространству и иметь нулевую проекцию на шумовое подпространство. Следовательно, функция  $\eta_{MPM}(\varphi)$  в точке  $\varphi = \varphi_j$  будет стремиться к бесконечности ( $\eta_{MPM}(\varphi) \rightarrow \infty$  при  $\varphi \rightarrow \varphi_j$ ). По этому пику можно найти угловую координату  $j$ -го источника. Функцию  $\eta_{MPM}(\varphi)$  можно рассматривать как пространственный спектр. Так как обычно целью применения проекционных методов является не оценка спектра, а определение угловых направлений источников сигналов, то получаемая с их помощью зависимость  $\eta_{MPM}(\varphi)$  уровня сигнала от угловой координаты называется пространственным псевдоспектром.



В случае длинной выборки входного процесса ( $L > N$ ), выборочная КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  имеет  $N$  положительных не равных друг другу собственных чисел  $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_N > 0$ . Шумовое собственное число, которое имеет кратность  $N - J$  и равно единице для точной КМ  $\mathbf{M}$ , расщепляется на  $N - J$  собственных чисел выборочной КМ  $\hat{\mathbf{M}}$ . Разброс шумовых собственных чисел возрастает с уменьшением длины выборки. Некоторые из них могут быть значительно меньше единицы. Минимальный многочлен КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  состоит из  $N$  сомножителей и совпадает с характеристическим многочленом КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  степени  $N$ . Таким образом, при переходе от точной к выборочной КМ степень минимального многочлена увеличивается от  $J + 1$  до  $N$  и, следовательно, перестает зависеть от числа  $J$  источников.

В случае короткой выборки ( $L < N$ ) КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  является вырожденной и имеет  $L$  положительных собственных чисел, а  $N - L$  собственных чисел равны нулю ( $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_L > 0, \mu_{L+1} = \mu_{L+2} = \dots = \mu_N = 0$ ). Подпространство, соответствующее нулевым собственным числам, ортогонально подпространству выборочных векторов  $\mathbf{X}(l)$ . Минимальный многочлен выборочной КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  имеет степень, равную  $L$ , которая также перестает зависеть от числа источников сигналов.

Такие различия в свойствах точной и выборочной КМ являются принципиальными для решения поставленных задач и обусловлены появлением в выборочной КМ множества шумовых собственных чисел вместо одного (расщепление шумового собственного числа). Поэтому для оценки числа и угловых координат источников сигналов нельзя использовать (5). Необходимо сначала оценить минимальный многочлен выборочной КМ  $\hat{\mathbf{M}}$ , а затем построить матрицу-проектор на шумовое подпространство.

Рассмотрим предложенный в [9] статистический среднеквадратический критерий, в соответствии с которым для выборочной КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  находится матричный многочлен  $\mathbf{I}^{(m)}(\hat{\mathbf{M}})$  наименьшей степени с евклидовой нормой, не превышающей некоторый порог  $\text{Th}$ . С помощью данного многочлена можно получить аппроксимацию минимального многочлена выборочной КМ многочленом, который имеет минимальную степень и обеспечивает отличие от характеристического многочлена, не превышающее (в среднеквадратическом смысле) заданное значение, определяемое на основе априорной информации о КМ собственного шума.

Сформируем функционал  $I^{(m)}$ , равный

$$I^{(m)} = \min_{\gamma_n} \left\| \mathbf{I}^{(m)}(\hat{\mathbf{M}}) \right\|^2, \quad (7)$$

$$\mathbf{I}^{(m)}(\hat{\mathbf{M}}) = \prod_{n=1}^m (\mathbf{I} - \gamma_n \hat{\mathbf{M}}),$$

и найдем сначала коэффициенты  $\gamma_n$ , а затем – степень минимального многочлена КМ  $\hat{\mathbf{M}}$ . Коэффициенты  $\gamma_n$  представляют собой величины, обратные собственным числам выборочной КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  ( $\mu_n = 1/\gamma_n$ ) и находятся из решения системы нелинейных уравнений

$$\gamma_n = \text{Sp} \left[ \hat{\mathbf{M}} \prod_{i=1, i \neq n}^m (\mathbf{I} - \gamma_i \hat{\mathbf{M}})^2 \right] \times \left\{ \text{Sp} \left[ \hat{\mathbf{M}}^2 \prod_{i=1, i \neq n}^m (\mathbf{I} - \gamma_i \hat{\mathbf{M}})^2 \right] \right\}^{-1}, \quad (8)$$

где  $\text{Sp}(\cdot)$  – след матрицы.

Для решения этой системы можно использовать итерационную процедуру начиная с  $m = 1$ . При этом  $m$  чисел  $\gamma_n$ , вычисленные для функционала  $I^{(m)}$ , будем считать начальными приближениями для вычисления  $(m + 1)$  чисел  $\gamma_n$  для функционала  $I^{(m+1)}$ .

При  $m = 1$  функционал  $I^{(1)} = \min_{\gamma_1} \times \text{Sp}[(\mathbf{I} - \gamma_1 \hat{\mathbf{M}})^2]$ . Отсюда имеем  $\gamma_1 = (\text{Sp} \hat{\mathbf{M}}) \times (\text{Sp} \hat{\mathbf{M}}^2)^{-1}$ . Если функционал  $I^{(1)} < \text{Th}$ , то итерационный процесс завершается, и оценка степени минимального многочлена  $\hat{m} = 1$ . Это означает, что в АР имеется только собственный шум, а оценка числа источников равна нулю ( $\hat{J} = \hat{m} - 1 = 0$ ). Если  $I^{(1)} > \text{Th}$ , продолжаем итерационный подход и задаем  $m = 2$ .

При  $m = 2$  функционал  $I^{(2)} = \min_{\gamma_1, \gamma_2} \times \text{Sp}[(\mathbf{I} - \gamma_1 \hat{\mathbf{M}})^2 (\mathbf{I} - \gamma_2 \hat{\mathbf{M}})^2]$ . Дифференцируя  $I^{(2)}$  по  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  и приравнивая производные к нулю, получим систему нелинейных уравнений:

$$\gamma_1 = \frac{\text{Sp}[(\mathbf{I} - \gamma_2 \hat{\mathbf{M}})^2 \hat{\mathbf{M}}]}{\text{Sp}[(\mathbf{I} - \gamma_2 \hat{\mathbf{M}})^2 \hat{\mathbf{M}}^2]}, \quad (9)$$

$$\gamma_2 = \frac{\text{Sp}[(\mathbf{I} - \gamma_1 \hat{\mathbf{M}})^2 \hat{\mathbf{M}}]}{\text{Sp}[(\mathbf{I} - \gamma_1 \hat{\mathbf{M}})^2 \hat{\mathbf{M}}^2]}.$$

В качестве начального значения выберем  $\gamma_1$ , полученное на первом шаге итерационной процедуры при  $m = 1$ , и подставим во вторую формулу в (9) для нахождения коэффициента  $\gamma_2$ . Затем это значение  $\gamma_2$  подставим в первую формулу (9) и найдем следующее приближение  $\gamma_1$ . Такие взаимные подстановки выполняются несколько раз, пока значения  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  не перестанут изменяться.

Затем находится функционал  $I^{(2)}$  и сравнивается с порогом  $\text{Th}$ . Если  $I^{(2)} < \text{Th}$ , итерационная процедура завершается и делается заключение, что степень минимального многочлена  $\hat{m} = 2$ , то есть имеется один источник ( $\hat{J} = \hat{m} - 1 = 1$ ). Если  $I^{(2)} > \text{Th}$ , то процедура продолжается и задается  $m = 3$ .

Данная процедура продолжается до тех пор, пока значение функционала  $I^{(m)}$  при некотором  $m = \hat{m}$  не станет меньше порога. Практика вычислений показывает, что итерационный процесс сходится достаточно быстро. Например, достаточно не более 4–5 итераций, чтобы значения  $\gamma_n$  были вычислены с точностью  $10^{-4}$  при  $m = 4$ . Полученное значение  $\hat{m}$  принимается за оценку степени минимального многочлена, а найденные числа  $\gamma_n$  дают оценки величин, обратных собственным числам выборочной КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  ( $\mu_n = 1/\gamma_n$ ). Таким образом, мы получили оценку минимального многочлена точной КМ  $\mathbf{M}$ . Оценка числа источников определяется степенью этого многочлена ( $\hat{J} = \hat{m} - 1$ ).

Порог  $\text{Th}$  можно найти на основе априорной информации о КМ собственного шума приемных устройств. Если шумы имеют единичную КМ, то априори известно, что при отсутствии источников ( $J = 0$ ) степень минимального многочлена  $m = 1$ . Обозначим функционал  $I^{(1)}$  при наличии только шума через  $I_0^{(1)}$  и порог выберем равным  $\text{Th} = \langle I_0^{(1)} \rangle + \chi \sigma_1$ , где  $\sigma_1$  – среднеквадратическое отклонение функционала  $I_0^{(1)}$ , а параметр  $\chi$  можно найти, задавая вероятность “ложной тревоги”, обусловленной влиянием шумов. Как правило, число элементов АР  $N^2 \gg 1$ . Тогда, полагая в (7)  $m = 1$ , будем иметь [8]

$$\langle I_0^{(1)} \rangle = \frac{N}{(1 + L/N)}, \quad \sigma_1^2 = \frac{2}{(1 + L/N)^2} \left(1 + \frac{2N}{L}\right). \quad (10)$$

Отметим, что порог зависит от числа  $N$  элементов АР и числа  $L$  выборок входного процесса. В случае “сверхкороткой” выборки, когда  $L \ll N$ , из (10) имеем  $\langle I_0^{(1)} \rangle \approx N$  и  $\sigma_1 \approx 2\sqrt{N/L}$ . При увеличении длины выборки ( $L \rightarrow \infty$ ) порог  $\text{Th} \rightarrow 0$ .

Теперь построим оценку матрицы-проектора на шумовое подпространство в виде

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{noise}}^{(MPM)} = \left[ \prod_{p=1}^{\hat{J}} (\mathbf{I} - \gamma_p \hat{\mathbf{M}}) \right] \left[ \prod_{p=1}^{\hat{J}} \left(1 - \frac{\gamma_p}{\gamma_{j+1}}\right) \right]^{-1}. \quad (11)$$

Выражение (11) переходит в (5) при  $L \rightarrow \infty$ , если учесть, что  $\hat{J} \rightarrow J$ ,  $\hat{\mathbf{M}} \rightarrow \mathbf{M}$ ,  $\hat{\gamma}_p \rightarrow \gamma_p$ , и выполнить несложные преобразования. Формула (6)

для пространственного псевдоспектра принимает вид

$$\eta_{MPM}(\varphi) = [\mathbf{S}^H(\varphi) (\hat{\mathbf{P}}_{\text{noise}}^{MPM})^H \hat{\mathbf{P}}_{\text{noise}}^{MPM} \mathbf{S}(\varphi)]^{-1}. \quad (12)$$

#### 4. КОРРЕЛИРОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ СИГНАЛОВ

Выражения для собственных чисел  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  точной КМ  $\mathbf{M}$  в случае двух источников разной мощности ( $v_1 \neq v_2$ ) и произвольного коэффициента корреляции  $\rho_{12} = |\rho_{12}| \exp(j\alpha_{12})$  имеют достаточно громоздкий вид [13]. В задачах “сверхразрешения” обычно рассматривают источники одинаковой мощности. Поэтому будем считать, что  $v_1 = v_2 = v$ . Тогда собственные числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  будут равны

$$\lambda_{1,2} = 1 + vN [1 + |g_{12}| |\rho_{12}| \cos \alpha_{12} \pm \sqrt{(1 + |g_{12}| |\rho_{12}| \cos \alpha_{12})^2 - (1 - |g_{12}|^2)(1 - |\rho_{12}|^2)}], \quad (13)$$

где  $g_{12} = \mathbf{S}_2^H \mathbf{S}_1 / N$  – коэффициент рассогласования волновых фронтов двух источников.

При некоррелированных источниках ( $|\rho_{12}| = 0$ ) сигнальные собственные числа  $\lambda_{1,2} = 1 + vN (1 \pm |g_{12}|)$ . Если источники полностью коррелированы ( $|\rho_{12}| = 1$ ), то из (13) будем иметь  $\lambda_1 = 1 + 2vN (1 + |g_{12}| \cos \alpha_{12})$ ,  $\lambda_2 = 1$ . Следовательно, второе сигнальное собственное число становится равным шумовому собственному числу. Из (13) также следует, что значения собственных чисел инвариантны к одновременной замене  $|g_{12}|$  на  $|\rho_{12}|$  и  $|\rho_{12}|$  на  $|g_{12}|$ . Поэтому влияние увеличения степени корреляции источников ( $|\rho_{12}|$ ) на оценку числа источников можно интерпретировать как влияние углового сближения источников ( $|g_{12}|$ ).

Для повышения эффективности рассматриваемого проекционного метода минимального многочлена можно использовать известную процедуру пространственного сглаживания КМ – SST (Spatial Smoothing Technique) [7, 10]. Существует несколько модификаций этой процедуры. Мы рассмотрим пространственное сглаживание, которое реализуется разбиением АР на  $K = N - Q + 1$  перекрывающихся подрешеток, состоящих из  $Q < N$  элементов и сдвинутых друг относительно друга на один элемент. Для каждой подрешетки оценивается КМ, и таким образом получается  $K$  матриц. Затем находится средняя КМ  $\mathbf{M}_{SST}$  размерности  $Q \times Q$ .

КМ  $\mathbf{M}_{SST}$  имеет аналогичный (2) вид, но элементы матрицы  $\mathbf{B}$  состоят из коэффициентов  $(\rho_{SST})_{jq}$  корреляции  $j$ -го и  $q$ -го источников, равных [7]

$$(\rho_{SST})_{jq} = \gamma_{jq} \rho_{jq}, \quad \gamma_{jq} = \frac{\sin[0.5K(u_j - u_q)]}{K \sin[0.5(u_j - u_q)]} \times \exp[j0.5(K-1)(u_j - u_q)]. \quad (14)$$

Отсюда следует, что  $|y_{jq}| < 1$ , то есть процедура сглаживания приводит к уменьшению коэффициента корреляции источников сигналов на выходе подрешетки.

КМ размерности  $Q \times Q$  на выходе  $i$ -й подрешетки можно представить в виде  $\mathbf{M}^{(i)} = \mathbf{I}_{(Q,N)} \mathbf{M} \mathbf{I}_{(Q,N)}^H$ , где  $\mathbf{I}_{(Q,N)} = [0_1, \dots, 0_{i-1}, \mathbf{I}_Q, 0_{i+Q}, \dots, 0_N]$  – матрица, которая имеет первые  $i-1$  и последние  $N-Q-i+1$  нулевых столбцов и единичную матрицу размерности  $Q \times Q$  посередине,  $0_l$  –  $l$ -й нулевой столбец.

Далее в (11) необходимо заменить КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  на сглаженную КМ  $\hat{\mathbf{M}}_{SST}$ , равную

$$(\mathbf{M}_{SST})_{jm} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{M}^{(i)} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{I}_{(Q,N)} \mathbf{M} \mathbf{I}_{(Q,N)}^H. \quad (15)$$

Таким образом, процедура пространственного сглаживания приводит к уменьшению коэффициентов корреляции источников на выходе подрешетки, что увеличивает эффективность сверхразрешающих методов. Однако сглаженная КМ  $\hat{\mathbf{M}}_{SST}$  имеет меньшую размерность по сравнению с КМ  $\hat{\mathbf{M}}$ , что эквивалентно уменьшению апертуры АР и приводит к уменьшению эффективности данных методов.

## 5. ОЦЕНКА ЧИСЛА ИСТОЧНИКОВ НА ОСНОВЕ КРИТЕРИЕВ AIC ИЛИ MDL

Проекционный метод МРМ дает возможность построить матрицу-проектор на шумовое подпространство и реализовать разрешение близко расположенных источников сигналов. В то же время для использования метода MUSIC необходимо предварительно сделать оценку числа источников сигналов, которая выполняется обычно на основе критериев AIC или MDL. В соответствии с этими критериями за оценку числа источников принимается положение минимума модифицированной функции правдоподобия по переменной  $J$ . При этом модифицированная функция правдоподобия имеет вид [7, 10]

$$F(J) = L(N - J) \lg \left( \frac{f_1(J)}{f_2(J)} \right) + f_3(J, L), \quad (16)$$

где функции  $f_1(J)$  и  $f_2(J)$  представляют собой соответственно арифметическое и геометрическое среднее шумовых собственных чисел выборочной КМ  $\hat{\mathbf{M}}$ , а “штрафная” функция  $f_3(J)$  в случае некоррелированных источников равна  $f_3(J) = J(2N - J)$  (критерий AIC) и  $f_3(J) = 0.5J(2N - J) \lg L$  (критерий MDL).

После оценки  $\hat{J}$  числа источников для нахождения их угловых координат с помощью метода MUSIC используется функция (6) простран-

ственного псевдоспектра, в которой используется шумовой проектор, равный

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{noise}} = \mathbf{I} - (\hat{\mathbf{U}}_1 \hat{\mathbf{U}}_1^H + \hat{\mathbf{U}}_2 \hat{\mathbf{U}}_2^H + \dots + \hat{\mathbf{U}}_J \hat{\mathbf{U}}_J^H), \quad (17)$$

где  $\hat{\mathbf{U}}_j$  – собственные векторы выборочной КМ  $\hat{\mathbf{M}}$ , соответствующие сигнальным собственным числам этой матрицы [7].

## 6. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим линейную АР с числом элементов  $N = 50$  и периодом  $d = 0.5 \lambda$ . Ширина диаграммы направленности по уровню половинной мощности составляет  $\Delta\varphi_{\text{beam}} = 2.0^\circ$ . Вектор  $\mathbf{X}(l)$  входного процесса зададим в виде (1), где случайная величина  $a_j(l)$  имеет нулевое среднее и дисперсию  $v_j$ , а мощность собственных шумов равна единице. В каждом эксперименте сформируем  $L$  выборок входного процесса с помощью (1), а число экспериментов для усреднения результатов моделирования зададим равным 500. Основное внимание будем уделять вопросу оценки числа источников сигналов в случае “сверхкороткой” выборки входного процесса ( $L \ll N$ ).

**1. Один источник сигналов.** На рис. 1 показаны гистограммы функционалов  $I^{(1)}$  и  $I^{(2)}$ . Мощность источника  $v = 5$  дБ, число выборок  $L = 5, 10$  и 20 (гистограммы 1–3 соответственно для  $I^{(2)}$ ). Правая гистограмма построена для функционала  $I^{(1)}$  и практически одинакова для всех  $L$ . Гистограммы функционала  $I^{(2)}$  смещаются влево при увеличении  $L$ . Пунктирными линиями показаны пороги  $\text{Th} = \langle I_0^{(1)} \rangle + \chi \sigma_1$  при  $\chi = 0.1$ , найденные с помощью (10). Из рис. 1 следует, что значения  $I^{(1)} > \text{Th}$ , а  $I^{(2)} < \text{Th}$  с вероятностью, близкой к единице. Поэтому вероятность правильной оценки числа источников будет также близка к единице ( $\hat{J} = 1$ ). Далее будем считать  $\chi = 0.1$ .

На рис. 2 даны сравнительные вероятности правильной оценки числа источников в зависимости от мощности  $v$  источника для метода МРМ и критериев MDL и AIC (кривые 1–3 соответственно) при длине  $L = 10$ . Видно, что в области малых  $v$  ( $v < -2$  дБ) метод МРМ обеспечивает более высокую вероятность правильной оценки числа источников.

На рис. 3 приведена СКО оценки угловой координаты источника сигнала в зависимости от мощности  $v$  для методов МРМ и MUSIC (кривые 1 и 2 соответственно) при длине входного процесса  $L = 10$ . Кривые построены в области, в которой вероятность правильной оценки превышает 80%. Учитывались только те эксперименты, в которых обеспечивалась правильная оценка числа источников ( $\hat{J} = 1$ ). Видно, что оба метода обеспечивают практически одинаковую СКО. Кривая 3 дает



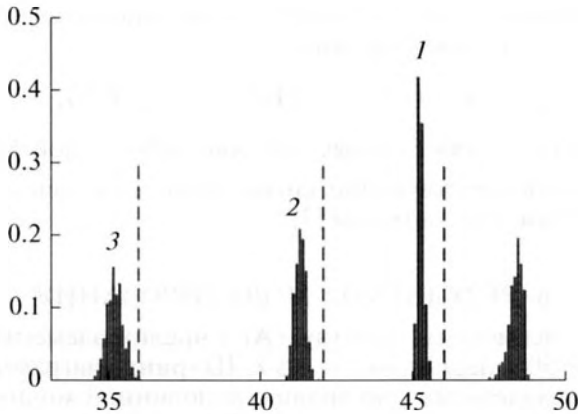


Рис. 1. Гистограммы функционалов  $I^{(1)}$  и  $I^{(2)}$ .

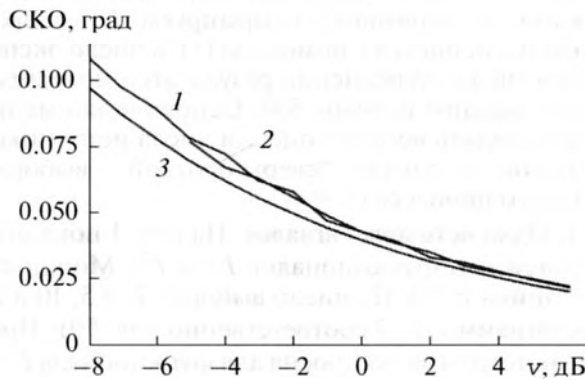


Рис. 3. SKO оценки угловой координаты источника.

потенциальную SKO (границы Крамера–Рао), которая составляет  $\sqrt{0.2\Delta\phi_{\text{beam}}}/\sqrt{\nu_1 NL}$  [5, 6]. Из рисунка следует, что полученные результаты близки к потенциально достижимым.

**2. Два некоррелированных источника.** Обозначим через  $\Delta$  нормированное угловое расстояние между источниками ( $\Delta = \Delta\phi/\Delta\phi_{\text{beam}}$ ) и будем располагать эти источники симметрично относительно нормали к АР ( $\phi_1 = -\phi_2$ ). Мощность источников  $\nu = 5$  дБ, число выборок  $L = 10$ . На рис. 4 показаны гистограммы для функционалов  $I^{(1)}$ ,  $I^{(2)}$  и  $I^{(3)}$  (гистограммы 1–3 соответственно). Пунктирной линией показан найденный с помощью (10) порог  $\text{Th} = \langle I_0^{(1)} \rangle + 0.1\sigma_1$ . Из рис. 4 следует, что значения  $I^{(1)} > \text{Th}$ ,  $I^{(2)} > \text{Th}$ , а  $I^{(3)} < \text{Th}$  с вероятностью, близкой к единице. Поэтому вероятность правильной оценки числа источников будет также близка к единице ( $\hat{J} = 2$ ). На рис. 5 приведены вероятности правильной оценки числа источников в зависимости от их мощности при длине входного процесса  $L = 10$ , полученные с помощью метода MPM и критериев MDL и AIC (кри-

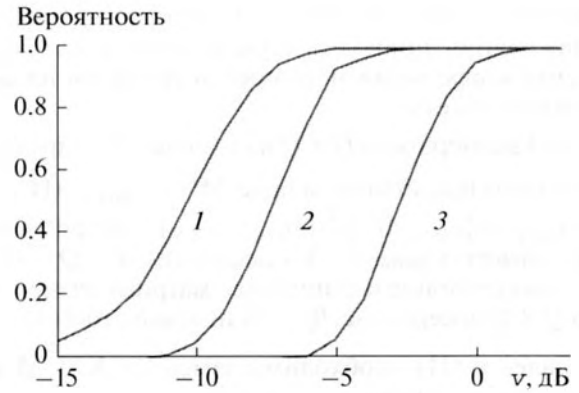


Рис. 2. Вероятность правильной оценки числа источников для разных методов.

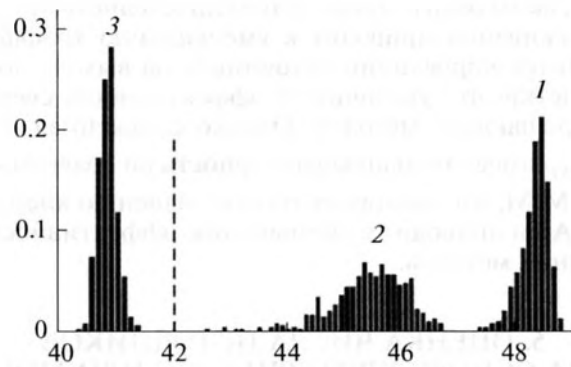


Рис. 4. Гистограммы функционалов  $I^{(1)}$ ,  $I^{(2)}$  и  $I^{(3)}$ .

вые 1–3 соответственно). Параметр  $\Delta$  равен 0.25 (сплошные кривые) и 0.5 (пунктирные кривые). Видно, что метод MPM и критерий MDL имеют примерно одинаковую эффективность, превышающую эффективность критерия AIC.

**3. Два коррелированных источника.** Оценим число источников с помощью метода MPM. На рис. 6 приведены вероятности правильной оценки числа источников в зависимости от их мощности  $\nu$  для разных модулей коэффициентов корреляции источников  $|\rho_{1,2}| = 0, 0.7, 0.9$  и  $0.95$  (кривые 1–4 соответственно) при длине входного процесса  $L = 10$ . Сплошные кривые получены с помощью процедуры пространственного сглаживания, а пунктирные – без нее. Фаза коэффициента корреляции задавалась постоянной в каждом эксперименте и равномерно распределенной в интервале  $[0, 2\pi]$  для разных экспериментов. Нормированное угловое расстояние между источниками  $\Delta = 1.0$ , а размер подрешетки при процедуре пространственного сглаживания  $K = 30$ . При выборе порога учитывалось дополнительное усреднение собственного шума в соответствии с (15). Видно, что процедура пространственного сгла-

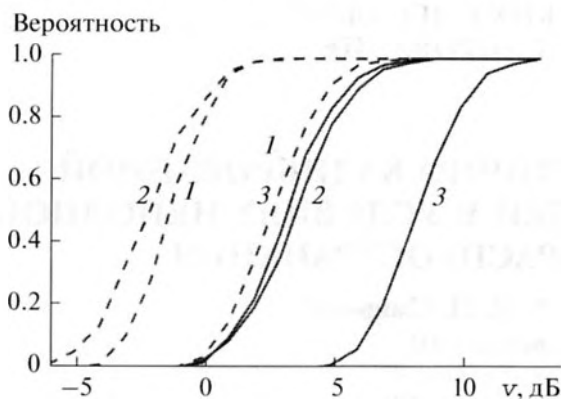


Рис. 5. Вероятность правильной оценки числа источников разными методами.

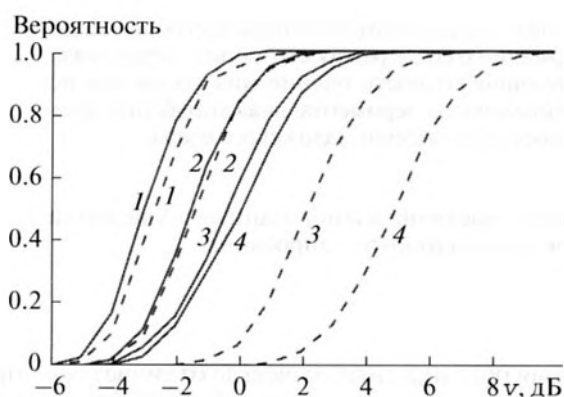


Рис. 6. Вероятность правильной оценки числа источников методом МРМ.

живания эффективна для высоких коэффициентов корреляции ( $|\rho_{1,2}| > 0.7$ ), когда преобладает эффект уменьшения коэффициента корреляции. При меньших коэффициентах корреляции уменьшение размерности сглаженной КМ является определяющим и приводит к снижению эффективности процедуры сглаживания.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована эффективность проекционного метода МРМ для решения проблемы определения числа источников сигналов, воздействующих на АР произвольной конфигурации. Метод основан на оценке степени минимального многочлена выборочной КМ входного процесса в АР с помощью статистически обоснованного среднеквадратического критерия. Рассмотрены случаи некоррелированных и коррелированных источни-

ков. Приведены результаты моделирования для случая “сверхкороткой” выборки входного процесса, когда число выборок значительно меньше числа элементов АР. Показано, что предложенный метод является более эффективным по сравнению с методами, основанными на критериях АИС и MDL. При коррелированных источниках использование метода МРМ с процедурой пространственного сглаживания увеличивает вероятность правильной оценки числа источников при высоких коэффициентах корреляции ( $>0.7$ ).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мальшикин Г.С., Сидельников Г.Б.* Оптимальные и адаптивные методы обработки гидроакустических сигналов (обзор) // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 5. С. 526–545.
2. *Сазонтов А.Г., Малеханов А.И.* Согласованная пространственная обработка сигналов в подводных звуковых каналах (обзор) // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 2. С. 233–253.
3. *Ратынский М.В.* Адаптация и сверхразрешение в антенных решетках. М.: Радио и связь, 2004. 199 с.
4. *Ермолаев В.Т., Флакман А.Г.* Теоретические основы обработки сигналов в беспроводных системах связи. Нижний Новгород: ННГУ, 2011. 368 с.
5. *Караваев В.В., Сазонов В.В.* Статистическая теория пассивной локации. М.: Радио и связь, 1987. 240 с.
6. *Турчин В.И.* Введение в современную теорию оценки параметров сигналов. Н. Новгород: ИПФ РАН, 2005. 116 с.
7. *Godara L.C.* Smart antennas. CRC Press, 2004.
8. *Ермолаев В.Т.* Оценивание параметров минимального многочлена сигнальной корреляционной матрицы многоканальной адаптивной приемной системы // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. 38. № 8. С. 841–859.
9. *Ермолаев В.Т., Флакман А.Г., Анурин А.А.* Оценивание параметров сигналов, принимаемых антенной решеткой // Изв. вузов. Радиофизика. 1996. Т. 39 № 9. С. 1144–1160.
10. *Wax M., Kailath T.* Detection of signals by information theoretic criteria // IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Process. 1985. V. 33. P. 387–392.
11. *Монзинго Р.А., Миллер Т.У.* Адаптивные антенные решетки: Введение в теорию. М.: Радио и связь, 1986. 448 с.
12. *Гаитмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.
13. *Гершман А.Б., Ермолаев В.Т.* Анализ собственных чисел корреляционной матрицы входных колебаний адаптивной антенной решетки и возможности углового сверхразрешения в условиях коррелированных внешних источников // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 10. С. 1236–1240.