

## АКУСТИЧЕСКИЕ ПРОЯВЛЕНИЯ ГАЗОВОГО ВКЛЮЧЕНИЯ, РАСПОЛОЖЕННОГО ВБЛИЗИ МЕЖФАЗНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

© 2018 г. А. О. Максимов\*, Ю. А. Половинка

*Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН  
690041 Владивосток, ул. Балтийская 43*

*\*e-mail: maksimov@poi.dvo.ru*

Поступила в редакцию 21.03.2017 г.

Исследование является продолжением работ, использующих специфические (бисферические) координаты для описания поведения пузырьков при наличии ограничивающих поверхностей. Получены явные зависимости первых мод колебаний и рассеянного поля от размеров пузырьков, расстояния до границы и физических параметров контактирующих сред. Показано, что при приближении к границе дипольные колебания приобретают резонансный характер и становятся сопоставимыми по величине с радиальными пульсациями. Данный эффект имеет прикладное значение в современных методах ультразвуковой очистки, поскольку приводит к значительному росту микропотоков, генерируемых пузырьком.

*Ключевые слова:* пузырек, радиальные и дипольные колебания, бисферические координаты, рассеяние

**DOI:** 10.7868/S0320791918010136

### ВВЕДЕНИЕ

Настоящее исследование является непосредственным продолжением работы [1], в которой получены аналитические выражения для собственной частоты и затухания газового включения, расположенного на малом расстоянии от межфазной границы между двумя контактирующими средами. В отличие от результатов [1], которые применимы для интерпретации пассивных акустических методов диагностики пузырьков [2, 3], приложение результатов данной работы – активные акустические методы. Ее цель состоит в описании влияния границы сред с разными механическими свойствами на акустический отклик газового включения. Это необходимо для интерпретации сигналов гидролокаторов, используемых для изучения подводных газовых сипов и грязевых вулканов [4, 5], при исследованиях на Арктическом шельфе [6, 7], когда всплывающие газовые пузырьки скапливаются у нижней границы ледяного покрова.

Существуют важные приложения, связанные с описанием физических механизмов, лежащих в основе нового метода ультразвуковой очистки: активирование потоков ультразвуком (Ultrasonically Activated Stream (UAS)) [8, 9]. В этом методе ультразвук через насадку поступает в струю воды, представляющую собой хороший акустический волновод. Жидкость с помощью электролиза насыщается газовыми пузырьками. В отличие от

традиционных методов ультразвуковой очистки, в основе которых лежит явление инерционной кавитации, в этом методе очистка достигается за счет микропотоков, которые генерируются деформационными колебаниями стенки пузырька. Чисто радиальные колебания не могут вызвать акустических течений, а деформационные моды возбуждаются выше порога параметрической неустойчивости. Поскольку в настоящее время отсутствуют ответы на вопросы о том, как меняется порог параметрической неустойчивости при приближении пузырька к межфазной границе, каким образом меняется структура и интенсивность микропотоков, как ведет себя сила Бьеркнеса, которая прижимает пузырек к границе и обеспечивает эффективную очистку в кавернах и других типах неоднородностей, то шагом в решении этих проблем является описание динамики пузырька на малых расстояниях от межфазной поверхности.

### МОДЕЛЬ

Рассмотрим две жидкие среды с параметрами:  $\rho_{1,2}$  – плотность и  $c_{1,2}$  – скорость звука (здесь индекс помечает тип среды). Центр пузырька, равновесная форма которого – сфера радиуса  $R_0$ , находится на расстоянии  $h$  от границы со второй средой. Предполагается, что размер пузырька и расстояние до границы много меньше характерных длин волн  $\lambda$ , присутствующих в задаче

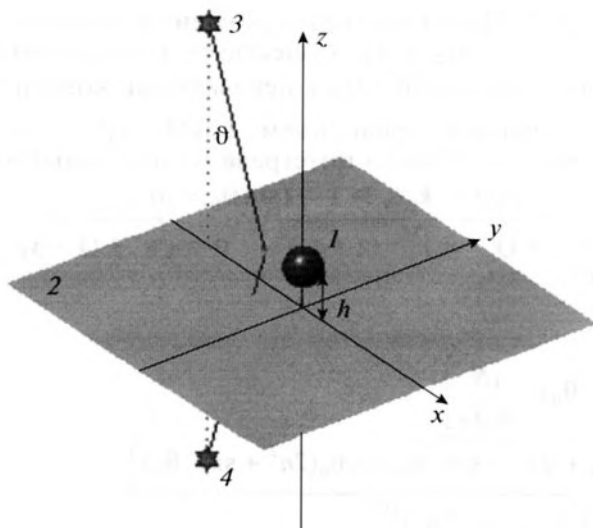


Рис. 1. Иллюстрация геометрии задачи. Газовый пузырек радиуса  $R_0$  располагается на расстоянии  $h$  над межфазной поверхностью 2, разделяющей две жидкие среды. Положение точечного источника и его зеркального изображения помечены цифрами 3 и 4 соответственно. Поле в окрестности пузырька в точке  $\mathbf{r}$  помечено звездочкой.

$\epsilon = (R_0, h)/\lambda \ll 1$ . Рисунок 1 иллюстрирует геометрию задачи.

Потенциал акустического поля в среде  $\varphi(\mathbf{r})$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца и допускает интегральное представление вида

$$\varphi(\mathbf{r}) = -QG(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \frac{1}{4\pi} \times \int_{S_0 + S_{int}} \left[ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \right] dS, \quad (1)$$

где  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  – функция Грина,  $\mathbf{r}$  описывает положение точки наблюдения,  $\mathbf{r}'$  – точки на поверхности пузырька  $S_0$  и межфазной поверхности  $S_{int}$ ,  $\partial/\partial n'$  – производная по нормали (нормаль направлена внутрь пузырька и внутрь среды (2)). В отличие от [1] в правой части уравнения (1) присутствует член с точечным источником в точке  $\mathbf{r}_0$  мощностью  $Q$ . Чтобы получить решение для плоской падающей волны, следует устремить источник в бесконечность. На межфазных поверхностях потенциал удовлетворяет граничным условиям: непрерывности смещений и равенства сил.

Учет только потенциальной составляющей скорости и игнорирование вихревой компоненты и теплообмена на межфазных поверхностях является очевидным ограничением модели. На данном этапе мы старались изучить главные, качественные особенности влияния близко расположенной границы на динамику пузырька. Учет

вязкого пограничного слоя и теплообмена – следующий шаг, требующий весьма громоздких вычислений. Возможность не учитывать вязкие и тепловые процессы связана с предполагаемой малостью вязкой и тепловой длин волн по сравнению с размерами пузырька.

Выбор функции Грина, удовлетворяющей граничным условиям на поверхности, разделяющей жидкости, обращает в нуль интеграл по  $S_{int}$  [10], так что в уравнении (1) остается только интеграл по поверхности пузырька. Эта функция Грина для верхнего полупространства (среды (1)) имеет вид [1, 10]

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{ik_0}{2\pi} \int_0^{\pi/2 - i\infty} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\chi \times \exp\{i[\tilde{\alpha}(x - x') + \tilde{\beta}(y - y')]\} \times [\exp(i\gamma|z - z'|) + V(\theta)\exp(i\gamma(z + z'))], \quad (2)$$

здесь  $\tilde{\alpha} = k_0 \sin \theta \cos \chi$ ,  $\tilde{\beta} = k_0 \sin \theta \sin \chi$ ,  $\gamma = k_0 \cos \theta$ ,  $k_0 = \omega/c_1$ , где  $\omega$  – частота звука. Углы  $\theta$  и  $\chi$  определяют направление элементарной плоской волны, включая комплексные значения угла  $\theta$ . Коэффициент отражения плоской волны на границе раздела двух жидкостей  $V(\theta)$  описывается следующей формулой:

$$V(\theta) = \frac{m \cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{m \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}, \quad (3)$$

где  $m = \rho_2/\rho_1$ ,  $n = c_1/c_2$ . Отличие от соответствующего уравнения [1] состоит в наличии неоднородных членов, при вычислении которых мы воспользовались предполагаемым неравенством  $r_0 \gg (R_0, h, \lambda)$ . Звуковое поле источника в окрестности пузырька складывается из поля падающей и отраженной волны. Рисунок 1 иллюстрирует выбор декартовой системы координат, центр которой располагается на межфазной поверхности, а ось  $z$ , ортогональная этой плоскости, проходит через центр пузырька; плоскость  $xz$  располагается так, что она проходит через точечный источник и центр пузырька. Точечный источник 3, расположенный в точке  $\mathbf{r}_0$ , излучает монохроматическую волну, которая рассеивается на межфазной поверхности. Для описания рассеянной волны удобным представлением является использование зеркального источника 4. Поле в окрестности пузырька, в точке  $\mathbf{r}$ , помеченной звездочкой, находится в ближней зоне рассеивающей межфазной поверхности и обладает рядом особенностей, связанных с наличием боковой волны и других проявлений неоднородных волн.

Интересующее нас внешнее поле в окрестности пузырька с точностью до постоянного множителя описывается выражением (2). Вклад пер-

вого слагаемого в квадратных скобках дает поле падающей сферической волны:

$$G^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{\exp(ik_0 L)}{L}, \quad L = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \sqrt{x^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}, \quad (4)$$

а при вычислении второго интегрального вклада, следуя [22], можно использовать асимптотику функции Ханкеля, что допустимо при

$k_0 r_0 \gg 1$ . Метод перевала приводит к следующему результату [11]: существует единственная точка перевала  $\theta = \theta_0$ , а перевальный контур  $\gamma_1$  определяется уравнением  $\cos(\theta - \theta_0) = 1 + is^2$ ,  $-\infty < s < \infty$ . Оценка интеграла по перевальному пути при  $k_0 L_1 \gg 1$  ( $\sin \theta_0 = \rho/L_1$ ,  $L_1 = \sqrt{x^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2}$ ,  $\rho = \sqrt{x^2 + (y - y_0)^2}$ ) дает

$$G^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{\exp(ik_0 L_1)}{L_1} \left[ V(\theta_0) - \frac{iN}{k_0 L_1} \right], \quad (5)$$

$$N = \frac{m(1 - n^2) \left[ 2m(n^2 - 1) + 3m \cos^2 \theta_0 - m \cos^4 \theta_0 + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0} \cos \theta_0 (2n^2 + \sin^2 \theta_0) \right]}{\left( m \cos \theta_0 + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0} \right)^3 \left( n^2 - \sin^2 \theta_0 \right)^{3/2}}$$

В определенных областях пространства дополнительный вклад в отраженное поле дает боковая волна [11]:

$$G^l(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = 2i \sin \delta \frac{\exp[ik_0 L_1 \cos(\theta_0 - \delta)]}{m k_0 L_1^2 \left[ \sin \theta_0 \cos \delta \sin^3(\theta_0 - \delta) \right]^{1/2}}, \quad (6)$$

где  $\delta$  – критический угол полного отражения ( $\sin \delta = n$ ). Она наблюдается в области  $\theta_0 > \delta$ , если  $n < 1$ , и в области  $\theta_0 > \arcsin(1/n)$ , если  $n > 1$ .

Метод перевала справедлив, если окрестности критических точек подынтегрального выражения, существенные при интегрировании, не пересекаются. Отдельного рассмотрения требуют ситуации скользящего и нормального падения, а также поведение вблизи угла полного отражения, когда перевальная точка близка к точкам ветвления. Однако основным в выражении для отраженной волны (5) является первый член в квадратных скобках, дающий отраженную волну в приближении геометрической акустики. Он остается главной компонентой, прочие члены, связанные с присутствием боковой волны или описывающие поведение интеграла при сближении критических точек, можно рассматривать как поправки [11].

Таким образом, неоднородный член в уравнении (1) в рамках принятых допущений имеет вид

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \approx \frac{\exp(ik_0 L)}{L} + V(\theta_0) \frac{\exp(ik_0 L_1)}{L_1} + \Delta G, \quad (7)$$

где поправочный член  $\Delta G$  описывает вклад второго слагаемого в формуле (5)  $-iN \exp(ik_0 L_1)/(k_0 L_1^2)$ , присутствие боковой волны  $G^l(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$  (6) и модификацию результатов в условиях, когда перевальная

точка близка к точкам ветвления. Подробное описание этих поправок дано в [11].

## РЕШЕНИЕ

Решение уравнения (1) в пределах волновой зоны  $r, r' < \lambda$ , где среды можно считать несжимаемыми, ищется в виде ряда по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \varphi_0(\mathbf{r}) + \varepsilon \varphi_1(\mathbf{r}) + \dots, \\ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \varepsilon G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения нулевого и первого порядка, анализом которых мы ограничимся, имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_0(\mathbf{r}) &= -Q \left[ 1 + V(\theta_{in}) \right] \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left[ G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi_0(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \varphi_0(\mathbf{r}') \frac{\partial G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \right] dS, \\ \sin \theta_{in} &= \frac{y_0}{(y_0^2 + z_0^2)^{1/2}}, \quad \varphi_1(\mathbf{r}) = iQk_0 \times \\ &\times [(y \sin \theta_{in} + z \cos \theta_{in}) + V(\theta_{in}) \times \\ &\times (y \sin \theta_{in} - z \cos \theta_{in})] \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} - Q \Delta G + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left[ G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{r}')}{\partial n'} + G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi_0(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \right. \\ &\left. - \varphi_1(\mathbf{r}') \frac{\partial G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - \varphi_0(\mathbf{r}') \frac{\partial G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \right] dS. \end{aligned} \quad (9)$$

Эту систему следует дополнить кинематическим и динамическим граничными условиями на поверхности пузырька.

Динамическое граничное условие состоит в том, что давления в газе и жидкости у стенки пузырька различаются только за счет поверхностного натяже-

ния, т.е. если  $P_l = P(\mathbf{r} \in S_0, t)$ ,  $P_g = P_0(V_0/V)^\gamma$  – давления в жидкости и газе, то

$$P_l = P_g - \sigma(\nabla \cdot \mathbf{n}), \quad (10)$$

где  $\mathbf{n}$  – единичная нормаль к поверхности пузырька,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения; мы полагаем, что уравнение состояния газа в пузырьке описывается политропой с показателем  $\gamma$ ,  $V$  и  $V_0$  – мгновенное и равновесное значения объема,  $P_0$  – равновесное давление газа в пузырьке.

Кинематическое граничное условие на стенке пузырька имеет вид

$$\dot{\zeta} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_{\mathbf{r} \in S_0}, \quad (11)$$

здесь  $\zeta$  – нормальное смещение стенки пузырька,  $\mathbf{v} = \nabla \phi$ .

Методика получения решения нулевого приближения  $\phi_0(\mathbf{r})$  описана в [1] и использует бисферические координаты  $(\xi, \vartheta, \alpha)$ , которые связаны с декартовыми координатами  $(x, y, z)$  следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= a \frac{\sin \vartheta \cos \alpha}{\operatorname{ch} \xi - \cos \vartheta}, & y &= a \frac{\sin \vartheta \sin \alpha}{\operatorname{ch} \xi - \cos \vartheta}, \\ z &= a \frac{\operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \vartheta}, & a &= R_0 \operatorname{sh} \xi_0, \\ \xi_0 &= \ln \left[ \frac{h}{R_0} + \sqrt{\left( \frac{h}{R_0} \right)^2 - 1} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Переменная  $\xi$  изменяется в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ , а углы  $\vartheta$  и  $\alpha$  – от 0 до  $\pi$  и от 0 до  $2\pi$  соответственно. Поверхность  $\xi_0$  – пузырек, а  $\xi = 0$  – граничная плоскость между жидкостями. Поскольку неоднородный член в уравнении нулевого приближения (9) не зависит от азимутального угла, то и решение ищется в виде  $\phi_0(\xi, \vartheta)$ .

Решение уравнения (9), следуя [1], может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} \phi_0(\xi, \vartheta) &= -Q[1 + V(\theta_{\text{in}})] \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} + \sqrt{\operatorname{ch} \xi - \cos \vartheta} \times \\ &\times \left\{ \phi_b^{(0)}(\omega) + Q[1 + V(\theta_{\text{in}})] \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} \right\} \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)\xi_0} \times \\ &\times \frac{\left[ (m+1)e^{(n+1/2)\xi} + (m-1)e^{-(n+1/2)\xi} \right]}{\left[ (m+1)e^{(n+1/2)\xi_0} + (m-1)e^{-(n+1/2)\xi_0} \right]} P_n(\vartheta), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $P_n(\vartheta)$  – полином Лежандра,  $\phi_b^{(0)}(\omega) \equiv \phi_0(\xi, \vartheta)|_{\xi=\xi_0}$  – значение потенциала на стенке пузырька. При вычислении  $\phi_0(\xi, \vartheta)|_{\xi=\xi_0}$  используется соотношение  $(\operatorname{ch} \xi_0 - \cos \vartheta)^{-1/2} = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)\xi_0} P_n(\vartheta)$ . Явный вид первых двух

первых членов разложения функции Грина (2) приведен в Приложении А. При нахождении решения (13) используется условие гомобаричности: давление в пузырьке меняется во времени, но остается пространственно однородным, поскольку длина волны в газе превышает размеры пузырька. Поверхность такого гомобарического пузырька будет эквипотенциальной. Область применимости этого приближения подробно обсуждается в [1, 12].

Кинематическое граничное условие (11) позволяет на основе решения (13) описать форму колебаний пузырька – изменение во времени нормального смещения:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_{(0)} &= -\frac{(\operatorname{ch} \xi_0 - \cos \vartheta)}{a} \left( \frac{\partial \phi_0(\xi, \vartheta)}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_0} = \\ &= -\left\{ \phi_b^{(0)}(\omega) + Q[1 + V(\theta_{\text{in}})] \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} \right\} \frac{1}{R_0} \times \\ &\times \left\{ 1 - (\operatorname{ch} \xi_0 - \cos \vartheta)^{3/2} \frac{2(m-1)\sqrt{2}}{\operatorname{sh} \xi_0} \times \right. \\ &\times \left. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(n+1/2)\xi_0} (n+1/2)}{\left[ (m+1)e^{(2n+1)\xi_0} + (m-1) \right]} P_n(\vartheta) \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

На равновесной поверхности пузырька  $\xi = \xi_0$  орт  $\mathbf{e}_\xi$  совпадает с нормалью, но имеет противоположное направление орту  $\mathbf{e}_r$  сферической системы координат, начало которой совпадает с центром пузырька. Разложение  $\zeta$  по сферическим гармоникам дает привычное описание в рамках амплитуд радиальных, дипольных и высших деформационных мод.

Скорость радиальных пульсаций описывается следующей формулой:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{R}_{(0)} &= \frac{1}{4\pi R_0^2} \int_{S_0} dS \dot{\zeta}_{(0)} = \frac{a^2}{2R_0^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{(\operatorname{ch} \xi_0 - \cos \vartheta)^2} \dot{\zeta}_{(0)} = \\ &= -\left\{ \phi_b^{(0)}(\omega) + Q[1 + V(\theta_{\text{in}})] \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} \right\} \frac{\tilde{\Omega}^2}{R_0}, \\ \tilde{\Omega}^2 &= 1 - 2(m-1)\operatorname{sh} \xi_0 \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(2n+1)\xi_0}}{\left[ (m+1)e^{(2n+1)\xi_0} + (m-1) \right]} = \\ &= 1 - 2(m-1)\sqrt{\left( \frac{h}{R_0} \right)^2 - 1} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[ \left( \frac{h}{R_0} \right) + \sqrt{\left( \frac{h}{R_0} \right)^2 - 1} \right]^{-(2n+1)}}{\left[ \left( \frac{h}{R_0} \right) + \sqrt{\left( \frac{h}{R_0} \right)^2 - 1} \right]^{(2n+1)\xi_0} + (m-1)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Вертикальное смещение центра пузырька на  $\Delta z_0$  приводит к радиальным смещениям  $\zeta_r = \Delta z_0 \cos \psi$ , где  $\psi$  – полярный угол в рассматри-

ваемой сферической системе координат,  $\cos \psi = (\operatorname{ch} \xi_0 \cos \vartheta - 1) / (\operatorname{ch} \xi_0 - \cos \vartheta)$ . Скорость вертикального смещения, определенная на основании формулы (14), описывается следующим выражением:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{z}_0 &= \frac{3}{2} \int_0^\pi \sin \psi d\psi \cos \psi \dot{\xi}_{(0)} = - \left\{ \varphi_b^{(0)}(\omega) + Q \times \right. \\ &\times [1 + V(\theta_{\text{in}})] \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} \left. \right\} \frac{3a}{2R_0^2} \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{(\operatorname{ch} \xi_0 - \cos \vartheta)^3} \times \\ &\times (\operatorname{ch} \xi_0 \cos \vartheta - 1) \{ \operatorname{sh} \xi_0 - 2(m-1) \times \\ &\times (\operatorname{ch} \xi_0 - \cos \vartheta)^{3/2} \times \\ &\times \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(n+1/2)\xi_0} (n+1/2)}{[(m+1)e^{(2n+1)\xi_0} + (m-1)]} \times \\ &\times P_n(\vartheta) \} = - \frac{3D}{R_0} \left\{ \varphi_b^{(0)}(\omega) + Q [1 + V(\tilde{\theta}_0)] \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} \right\}, \\ D &= 2 \operatorname{sh} \xi_0 (m-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(2n+1)\xi_0} [\operatorname{ch} \xi_0 - (2n+1) \operatorname{sh} \xi_0]}{[(m+1)e^{(2n+1)\xi_0} + (m-1)]}. \end{aligned} \quad (16)$$

Безразмерная величина

$$\Delta z_0^N = (\Delta z_0 / \Delta R_0) = (3D / \tilde{\Omega}^2) \quad (17)$$

определяет относительный вклад дипольных и радиальных колебаний в зависимости от расстояния до границы. Рисунок 2 иллюстрирует поведение функции  $\Delta z_0^N(h/R_0)$  в различных средах. Штрихпунктирная линия описывает поведение  $\Delta z_0^N$  у абсолютно жесткой границы. Сплошная кривая иллюстрирует  $\Delta z_0^N$  для пузырька, расположенного в воде у слоя осадков  $m = 1.95$ , а пунктирная — ход кривой для пузырька в слое осадков у границы с жидкостью  $m = 0.51$ . Тонкая штрихованная линия иллюстрирует аппроксимацию  $\tilde{\Omega}^2$  и  $D$  вкладом только первых членов разложения:  $\tilde{\Omega}^2 \approx 1 - (m-1)(m+1)^{-1}(R_0/2h)$ ,  $D \approx (m-1) \times (m+1)^{-1}(R_0/2h)^2$ . Чтобы не загромождать рисунок, сопоставление сделано только для одной кривой, но во всех остальных случаях поведение аналогичное. Мы не приводим случай абсолютно мягкой границы, поскольку в этом случае  $1 + V(\theta_{\text{in}}) = 0$  и  $\varphi_0(\xi, \vartheta)$  обращается в нуль. Амплитуды высших деформационных мод определяются более высокими степенями параметра  $(R_0/2h)$ , связанного с взаимодействием пузырька и его зеркального изображения, и по этой причине меньше амплитуды дипольной моды. Их проявление ограничено очень малыми расстояниями:  $h < 2R_0$ .

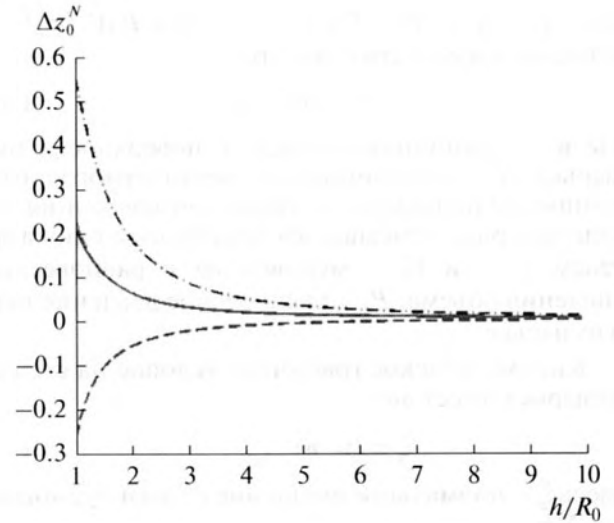


Рис. 2. Отношение дипольного смещения центра пузырька к амплитуде радиальных пульсаций  $\Delta z_0^N$ , как функция расстояния до границы  $h/R_0$ . Сплошная кривая соответствует пузырьку над слоем осадков  $m = 1.95$ . Тонкая штрихованная линия соответствует приближенному поведению этой кривой при учете только членов низшего порядка во взаимодействии пузырька и его зеркального изображения. Нижняя штрихованная кривая — пузырек в осадках  $m = 0.51$ . Жирная штрихпунктирная линия описывает поведение нормированного смещения для абсолютно жесткой границы  $m \rightarrow \infty$ .

Кинематическое граничное условие (11) позволяет установить связь между изменением объема пузырька, значением потенциала на его границе и потенциалом внешнего источника:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V_0} &= - \frac{1}{V_0} \int dS \xi = \\ &= - \frac{3\tilde{\Omega}^2}{R_0^2} \left[ \varphi_b^{(0)} + Q [1 + V(\theta_{\text{in}})] \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Выражая производную по времени от потенциала в уравнении Бернулли, получаем искомый результат:

$$\dot{\varphi}_0(\xi_0, \vartheta) = \dot{\varphi}_b^{(0)} = \frac{\gamma P_0 \Delta V}{\rho_1 V_0}. \quad (19)$$

Для используемого нами частотного описания

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + \Omega_*^2) \frac{\Delta V}{V_0} &= - \frac{3\tilde{\Omega}^2}{R_0^2} (-i\omega) Q [1 + V(\theta_{\text{in}})] \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0}, \\ \text{либо } (-\omega^2 + \Omega_*^2) \Delta R(\omega) &= - \frac{P_{\text{in}}(\omega) \tilde{\Omega}^2}{\rho_1 R_0}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь  $\Omega_*^2 = \Omega_0^2 \tilde{\Omega}^2$ ,  $\Omega_0 = (3\gamma' P_0 / \rho_1 R_0^2)^{1/2}$  — собственная частота свободного пузырька, и потенциал внешнего поля в правой части уравнения заменен давлением:  $P_{\text{in}}(\omega) = -\rho_1(-i\omega) \times \{-Q[1 + V(\theta_{\text{in}})]e^{ik_0 r_0}/r\}$ . Это аналог уравнения

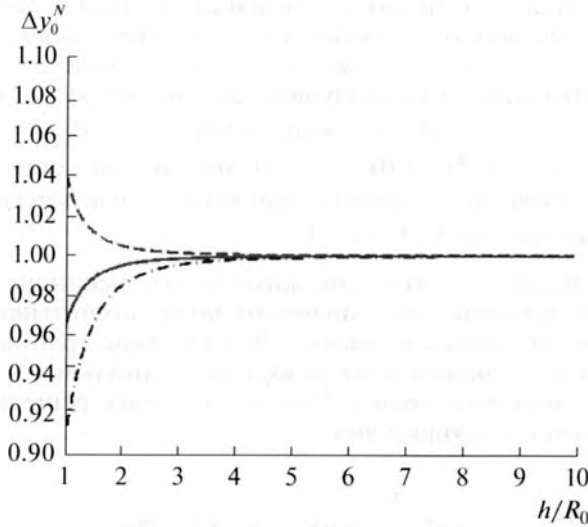


Рис. 3. Нормированная амплитуда дипольных колебаний пузырька в направлении, параллельном границе  $\Delta y_0^N$ , как функция расстояния до границы  $h/R_0$ . Сплошная кривая соответствует пузырьку над слоем осадков  $m = 1.95$ . Тонкая штрихованная линия соответствует учету низшего порядка во взаимодействии пузырька и его зеркального изображения.

Рэлея, но в форме (20) это уравнение требует уточнения для правильного описания окрестности резонанса, близости пузырька к мягкой границе и учета вклада неоднородных волн.

### ПОПРАВКИ К ОСНОВНОМУ РЕШЕНИЮ

Поправки первого приближения включают в себя три физически различных слагаемых. Во-первых, это вычисленная в [1] поправка, учитывающая радиационное затухание. С учетом неоднородного слагаемого в уравнении (1) она имеет вид

$$\varphi_1^r = \left[ \varphi_b^{(0)}(\omega) + Q[1 + V(\theta_{in})] \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} \right] (i\omega/c_1) R_0 \tilde{G}_1 \tilde{\Omega}^2. \quad (21)$$

Явный вид множителя  $\tilde{G}_1$  приведен в Приложении А. Поправка (21) не зависит от пространственных координат.

Второй тип поправок связан с наличием во втором уравнении системы (9), во внешнем поле, пространственно неоднородных членов. Для свободного пузырька их присутствие приводит к возбуждению дипольных колебаний. Рассмотрим по отдельности компоненты, связанные с неоднородностью поля вдоль границы  $iQk_0 y \sin \theta_{in} \times [1 + V(\theta_{in})] e^{ik_0 r_0}/r_0$ , и перпендикулярно ей  $iQk_0 z \cos \theta_{in} [1 - V(\theta_{in})] e^{ik_0 r_0}/r_0$ .

Процедура решения повторяет изложенную в [1]:  $\varphi_1(\xi, \vartheta, \alpha)$  записывается в виде ряда по собственным функциям уравнения Лапласа в бисферических координатах и подставляется в уравнение (2),

туда же подставляется функции Грина нулевого приближения (их явный вид в бисферических координатах приведен в Приложении Б). Интегралы вычисляются в явном виде, и неизвестные коэффициенты определяются приравниванием нулю коэффициентов перед различными собственными функциями по координате  $\xi$ .

Решение, индуцированное компонентой  $iQk_0 y \sin \theta_{in} [1 + V(\theta_{in})] e^{ik_0 r_0}/r_0$  внешнего поля, имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_1^{\parallel}(\xi, \vartheta, \alpha) = & i(k_0 R_0) Q \sin \theta_{in} [1 + V(\theta_{in})] \times \\ & \times \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} \left\{ \frac{\text{sh} \xi_{50} \sin \vartheta \sin \alpha}{(\text{ch} \xi - \cos \vartheta)} - (\text{ch} \xi - \cos \vartheta)^{1/2} \sin \alpha \times \right. \\ & \times 2\sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(m+1)e^{(n+1/2)\xi} + (m-1)e^{-(n+1/2)\xi}}{(m+1)e^{(n+1/2)\xi_{50}} + (m-1)e^{-(n+1/2)\xi_{50}}} \right] \times \\ & \left. \times e^{-(n+1/2)\xi_{50}} P_n^1(\vartheta) \right\}. \quad (22) \end{aligned}$$

Эта поправка не может изменить объема пузырька (ввиду присутствия синуса азимутального угла), поэтому основной компонентой является мода дипольных колебаний в направлении оси  $y$ . Определяя нормальное смещение стенки пузырька из кинематического граничного условия, по аналогии с тем, как определялось смещение центра пузырька вдоль оси  $z$ , находим:

$$\begin{aligned} \Delta y_0 = & 3ik_0 Q \sin \theta_{in} [1 + V(\theta_{in})] \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} \times \\ & \times \left[ 1 - 4 \text{sh}^3 \xi_{50} (m-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(2n+1)\xi_{50}} (n+1)n}{[(m+1)e^{(2n+1)\xi_{50}} + (m-1)]} \right]. \quad (23) \end{aligned}$$

Скорость смещения центра пузырька в отсутствие границы определяется множителем  $3ik_0 Q \sin \theta_{in} e^{ik_0 r_0}/r_0$ . Используя обозначение  $\Delta y_0^N$  для выражения в квадратных скобках в формуле (23) как величины, характеризующей изменение дипольного смещения с расстоянием до границы, проиллюстрируем его поведение численным расчетом.

На рис. 3 представлена зависимость  $\Delta y_0^N$  от расстояния до границы. Штрихпунктирная линия описывает поведение  $\Delta y_0^N$  у абсолютно жесткой границы. Сплошная кривая иллюстрирует ход  $\Delta y_0^N$  для пузырька, расположенного в воде у слоя осадков  $m = 1.95$ , а пунктирная — для пузырька в слое осадков у границы с жидкостью  $m = 0.51$ . Тонкая штрихованная линия иллюстрирует аппроксимацию суммы вкладом только первых членов разложения  $-(m-1)(m+1)^{-1} \times (R_0/2h)^3$ . Наличие вблизи пузырька более тяжелых осадков увеличивает инерционную массу и

понижает амплитуду дипольных колебаний, и наоборот, соседство с более легкой средой увеличивает амплитуду дипольных колебаний. Поскольку взаимодействие пузырька и его зеркального изображения при дипольных колебаниях определяются высокими степенями параметра  $(R_0/2h)$ , влияние межфазной поверхности ограничено малыми расстояниями.

При анализе составляющей внешнего поля, изменяющейся в направлении, перпендикулярном межфазной границе, следует разделить ее на две компоненты:

$$iQk_0 \cos \theta_{in} z [1 - V(\theta_{in})] e^{ik_0 r_0} / r_0 = iQk_0 \cos \theta_{in} \times \\ \times [1 - V(\theta_{in})] e^{ik_0 r_0} / r_0 [h + (z - h)].$$

$$\varphi_1^\perp(\xi, \vartheta) = i(k_0 R_0) Q \cos \theta_{in} [1 - V(\theta_{in})] \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} \left\{ \left[ \frac{\text{sh} \xi \text{sh} \xi_0}{(\text{ch} \xi - \cos \vartheta)} - \text{cth} \xi_0 \right] - (\text{ch} \xi - \cos \vartheta)^{1/2} \sqrt{2} \times \right. \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(m+1)e^{(n+1/2)\xi} + (m-1)e^{-(n+1/2)\xi}] [\text{sh} \xi_0 (2n+1) - \text{ch} \xi_0]}{[(m+1)e^{(n+1/2)\xi_0} + (m-1)e^{-(n+1/2)\xi_0}]} e^{-(n+1/2)\xi_0} P_n(\vartheta) \left. \right\} + \\ + \varphi_b^\perp (\text{ch} \xi - \cos \vartheta)^{1/2} \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(m+1)e^{(n+1/2)\xi} + (m-1)e^{-(n+1/2)\xi}]}{[(m+1)e^{(n+1/2)\xi_0} + (m-1)e^{-(n+1/2)\xi_0}]} e^{-(n+1/2)\xi_0} P_n(\vartheta). \quad (24)$$

Качественное отличие от решения, учитывающего неоднородность внешнего поля, параллельного границе, состоит в том, что в этом случае возбуждаются объемные колебания. Динамическое граничное условие связывает изменение потенциала на границе и объем:

$$(-i\omega)\varphi_b^\perp(\omega) = (\gamma P_0 / \rho_1) (\Delta V^\perp / V_0) = \\ = 3(\gamma P_0 / \rho_1) (\Delta R^\perp / R_0), \quad (25)$$

а из кинематического условия получается аналог уравнения Рэлея для компоненты радиального смещения  $\Delta R^\perp(\omega)$ :

$$\Delta \dot{z}_0^\perp = \frac{3}{2} \int_0^\pi \sin \psi d\psi \cos \psi \dot{\zeta}^\perp = ik_0 Q \cos \theta_{in} [1 - V(\theta_{in})] \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} \frac{3 \text{sh}^2 \xi_0}{2} \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{(\text{ch} \xi_0 - \cos \vartheta)^2} \times \\ \times \left( -\text{ch} \xi_0 + \frac{\text{sh}^2 \xi_0}{(\text{ch} \xi_0 - \cos \vartheta)} \right) \left[ 3 \left( -\text{ch} \xi_0 + \frac{\text{sh}^2 \xi_0}{(\text{ch} \xi_0 - \cos \vartheta)} \right) - \frac{(\text{ch} \xi_0 - \cos \vartheta)^{3/2}}{\text{sh} \xi_0} 2(m-1)\sqrt{2} \times \right. \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(n+1/2)\xi_0} (n+1/2) [(2n+1) \text{sh} \xi_0 - \text{ch} \xi_0]}{[(m+1)e^{(2n+1)\xi_0} + (m-1)]} P_n(\vartheta) - \frac{\varphi_b^\perp 3 \text{sh}^2 \xi_0}{R_0} \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{(\text{ch} \xi_0 - \cos \vartheta)^2} \times \\ \left. \times \left( -\text{ch} \xi_0 + \frac{\text{sh}^2 \xi_0}{(\text{ch} \xi_0 - \cos \vartheta)} \right) \left[ 1 - \frac{(\text{ch} \xi_0 - \cos \vartheta)^{3/2}}{\text{sh} \xi_0} 2(m-1)\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(n+1/2)\xi_0} (n+1/2) P_n(\vartheta)}{[(m+1)e^{(2n+1)\xi_0} + (m-1)]} \right] \right] = \\ = 3ik_0 Q \cos \theta_{in} [1 - V(\theta_{in})] \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} \left[ 1 - 2(m-1) \text{sh} \xi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(2n+1)\xi_0} [(2n+1) \text{sh} \xi_0 - \text{ch} \xi_0]^2}{[(m+1)e^{(2n+1)\xi_0} + (m-1)]} \right] - i \frac{3\Omega_0^2 D \Delta R^\perp}{\omega}. \quad (27)$$

Вклад от первого слагаемого является пространственно однородным, и соответствующее решение, по существу, ничем не отличается от полученного в предыдущем разделе. Все различие состоит в замене множителя  $[1 + V(\theta_{in})]$  на  $-ik_0 h \cos \theta_{in} [1 - V(\theta_{in})]$ . Учет этой малой поправки позволяет получить описание вблизи мягкой границы, где  $V(\theta_{in}) \approx -1$ .

Вклад второго слагаемого связан с неоднородной компонентой внешнего поля, отсчитываемой от центра пузырька. В отсутствие границы эта компонента поля возбуждает дипольные колебания вдоль оси  $z$ . Соответствующее решение имеет следующий вид:

$$(-\omega^2 + \Omega_*^2) \Delta R^\perp(\omega) = \\ = (-i\omega)(ik_0) D Q \cos \theta_{in} [1 - V(\theta_{in})] \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0}. \quad (26)$$

Асимптотика  $D \xrightarrow{h/R_0 \rightarrow \infty} 2[(m-1)/(m+1)] \times (R_0/2h)^2$  характеризует невысокую эффективность этого механизма возбуждения радиальных пульсаций.

Возбуждение дипольной составляющей описывается следующим выражением:

Скорость смещения центра пузырька в отсутствие границы определяется множителем  $3ik_0Q \cos \theta_{in} (e^{ik_0r_0}/r_0)$ . Разложение выражения (27) по степеням  $R_0/2h$  начинается с относительно высоких степеней, поэтому влияние границы проявляется только на небольших расстояниях.

Последняя поправка, связанная с учетом  $\Delta G$ , имеет вид решения нулевого приближения, в котором  $Q[1 + V(\theta_{in})]e^{ik_0r_0}/r_0$  заменено на  $\Delta G$ .

Пользуясь линейностью задачи, мы можем записать уравнение, описывающие радиальные колебания, в следующем виде:

$$\begin{aligned} & (-\omega^2 + \Omega_*^2 - i(R_0 \omega/c)\tilde{G}_1\Omega_*^2)\Delta R(\omega) = (-i\omega)\frac{Q}{R_0} \times \\ & \times \left\{ \tilde{\Omega}^2 [-(1 + V(\theta_{in})) + (ik_0h)\cos\theta_{in}(1 - V(\theta_{in}))] + \right. \\ & \left. + D[(ik_0R_0)\cos\theta_{in}(1 - V(\theta_{in}))] \right\} (e^{ik_0r_0}/r_0) - \\ & - (-i\omega)\frac{\tilde{\Omega}^2}{R_0}\Delta G. \end{aligned}$$

После того как определены граничные значения потенциала  $\varphi_b$  и нормальной производной  $\xi$  на поверхности пузырька, можно вычислить рассеянное поле.

### РАССЕЯННОЕ ПОЛЕ

При нахождении рассеянного поля в точке  $\mathbf{r}$ , находящейся в дальней зоне, используем уравнение (1). Вклад источника описывается формулами (4) и (5). Асимптотика функции Грина, записанная в бисферических координатах, имеет вид

$$\begin{aligned} G(\xi, \vartheta, \alpha | \xi', \vartheta', \alpha') & \approx \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\text{ch}\xi - \cos\vartheta}{\text{ch}\xi + \cos\vartheta}} \times \\ & \times \exp\left(ik_0a \sqrt{\frac{\text{ch}\xi + \cos\vartheta}{\text{ch}\xi - \cos\vartheta}}\right) \times \\ & \times \left\{ 1 - ik_0a \frac{\sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\alpha - \alpha') + \text{sh}\xi \text{sh}\xi_0}{(\text{ch}^2\xi - \cos^2\vartheta)^{1/2} (\text{ch}\xi_0 - \cos\vartheta')} + \right. \\ & \left. + V(\theta_{out}) \right\} \\ & \times \left[ 1 - ik_0a \frac{\sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\alpha - \alpha') - \text{sh}\xi \text{sh}\xi_0}{(\text{ch}^2\xi - \cos^2\vartheta)^{1/2} (\text{ch}\xi_0 - \cos\vartheta')} \right], \end{aligned} \quad (28)$$

здесь  $\cos\theta_{out} = \text{sh}\xi(\text{ch}^2\xi - \cos^2\vartheta)^{-1/2}$ . Отметим, что множитель перед выражением в фигурных скобках в формуле (28) имеет тривиальный вид в сферических координатах:  $\exp(ik_0r)/r$ . Нормальная производная от (28), проинтегрированная по поверхности пузырька (значение потенциала на границе  $\varphi_b(\omega) \equiv \varphi(\xi, \vartheta)|_{\xi=\xi_0}$  постоянно), обращается

в нуль. По этой причине рассеянное поле будет определяться интегралом от нормального смещения:

$$\begin{aligned} \varphi_{sc} & = \frac{e^{ik_0r} R_0^2 \text{sh}^2\xi_0}{r} \int_0^{2\pi} d\alpha' \int_0^\pi \frac{\sin\vartheta' d\vartheta'}{(\text{ch}\xi_0 - \cos\vartheta')^2} \times \\ & \times \left\{ [1 + V(\theta_{out})] \left[ 1 - i \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \frac{(k_0a)\sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\alpha - \alpha')}{(\text{ch}^2\xi - \cos^2\vartheta)^{1/2} (\text{ch}\xi_0 - \cos\vartheta')} \right] \xi_0 - \right. \\ & \left. - i[1 - V(\theta_{out})] \frac{(k_0a)\text{sh}\xi_0 \text{sh}\xi}{(\text{ch}^2\xi - \cos^2\vartheta)^{1/2} (\text{ch}\xi_0 - \cos\vartheta')} \right\} \times \\ & \times \left\{ \xi_0 + [1 + V(\theta_{out})] \xi_1 \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Вычисление интегралов приводит к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \varphi_{sc}^{(0)} & = - \left\{ \varphi_b^{(0)} + Q[1 + V(\theta_{in})] \frac{e^{ik_0r_0}}{r_0} \right\} \times \\ & \times \frac{e^{ik_0r} R_0 \tilde{\Omega}^2 [1 + V(\theta_{out})]}{r} = \frac{e^{ik_0r}}{r} [1 + V(\theta_{out})] R_0^2 \Delta \dot{R}_{(0)}, \\ \varphi_{sc}^{(1b)} & = \frac{e^{ik_0r}}{r} [1 - V(\theta_{out})] \cos\theta_{out} R_0^2 \Delta \dot{R}_{(0)} \times \\ & \times \left\{ -i(k_0h) - i(k_0R_0) \left[ D/\tilde{\Omega}^2 \right] \right\}, \\ & (-\omega^2 + \Omega_*^2 - i(R_0 \omega/c)\tilde{G}_1\Omega_*^2)\Delta R_{(0)} = \\ & = -(-i\omega)\frac{Q\tilde{\Omega}^2}{R_0} [1 + V(\theta_{in})] (e^{ik_0r_0}/r_0), \\ \varphi_{sc}^{(\perp a)} & = \frac{e^{ik_0r}}{r} [1 + V(\theta_{out})] R_0^2 \Delta \dot{R}^{(\perp a)}, \\ \varphi_{sc}^{(\perp b)} & = \frac{e^{ik_0r}}{r} [1 + V(\theta_{out})] R_0^2 \Delta \dot{R}^{(\perp b)}, \\ & (-\omega^2 + \Omega_*^2 - i(R_0 \omega/c)\tilde{G}_1\Omega_*^2)\Delta R^{(\perp a)} = \\ & = (-i\omega)(ik_0h)\frac{Q\tilde{\Omega}^2}{R_0} \cos\theta_{in} [1 - V(\theta_{in})] (e^{ik_0r_0}/r_0), \\ & (-\omega^2 + \Omega_*^2 - i(R_0 \omega/c)\tilde{G}_1\Omega_*^2)\Delta R^{(\perp b)} = \\ & = (-i\omega)(ik_0)QD \cos\theta_{in} [1 - V(\theta_{in})] (e^{ik_0r_0}/r_0). \end{aligned} \quad (30)$$

Вклад от второго слагаемого в первой строчке (29)

$\varphi_{sc}^{(1a)}$  равен нулю, для вклада от первого слагаемого во второй строчке (29) введено обозначение  $\varphi_{sc}^{(1b)}$ , а вклад последнего слагаемого представлен в виде суммы  $\varphi_{sc}^{(1c)} = \varphi_{sc}^{(\perp a)} + \varphi_{sc}^{(\perp b)}$ . Данную систему можно записать в более симметричном виде:



$$\begin{aligned} \varphi_{sc} = & \frac{e^{ik_0 r} R_0}{r} \frac{\omega^2}{\left[-\omega^2 + \Omega_*^2 - i(R_0 \omega/c) \tilde{G}_1 \Omega_*^2\right]} \times \\ & \times \left\{ [1 + V(\theta_{out})] \tilde{\Omega}^2 [1 + V(\theta_{in})] - [1 - V(\theta_{out})] \times \right. \\ & \times \cos \theta_{out} \left[ i(k_0 h) \tilde{\Omega}^2 + i(k_0 R_0) D \right] [1 + V(\theta_{in})] - \\ & - [1 + V(\theta_{out})] \left[ i(k_0 h) \tilde{\Omega}^2 + i(k_0 R_0) D \right] \times \\ & \left. \times \cos \theta_{in} [1 - V(\theta_{in})] \right\} Q \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0}. \end{aligned} \quad (31)$$

Выражение (31) учитывает вклад монополюной и дипольной составляющих. Отметим, что рассеяние носит анизотропный характер (даже для монополюной составляющей) за счет тех каналов, в которых происходит взаимодействие с межфазной поверхностью – слагаемые, пропорциональные  $V(\theta_{out})$ ,  $V(\theta_{in})$ . Мы не приводим вклад в рассеянное поле от поправки  $\Delta G$  и не учитываем поправки при вычислении асимптотики функции Грина. Это будет сделано в отдельной публикации при описании рассеяния импульсов на пузырьке, расположенном вблизи межфазной поверхности. Именно в этом случае становятся существенными поправки в окрестности критических углов: полного внутреннего отражения, угла Брюстера, скользящего направления.

### ОБСУЖДЕНИЕ

Сопоставление с результатами недавних исследований поведения пузырька вблизи границы [13], основанных на модели, заменяющей межфазную поверхность зеркальным пузырьком и использующей феноменологический параметр для описания его связи с исходным включением, демонстрирует достоинства предлагаемого подхода. Все результаты, включая рассеянное поле, не содержат феноменологических параметров, а используют материальные параметры контактирующих сред. Формула (31) предсказывает гораздо более широкий спектр эффектов, нежели выражение (63) в работе [13]. Это, в первую очередь, включает анизотропию рассеяния, характер изменения величины рассеяния при приближении пузырька к границе раздела с более тяжелой или легкой жидкостью.

В работе анализировалось рассеяние на одиночном включении. Обобщение на случай ансамбля пузырьков достаточно просто осуществить для разряженного газа включений, когда можно использовать приближение однократного рассеяния. Нарушение пространственной изотропии вблизи границы затрудняет применение приближения самосогласованного поля для достаточно плотных скоплений пузырьков.

Для интерпретации физических механизмов, лежащих в основе современных методов ультра-

звуковой очистки (UAS), важными представляются результаты, описываемые формулами (16), (17) и иллюстрируемые рис. 2. Весьма значительная амплитуда дипольных колебаний означает, что микропотоки, генерируемые стенкой пузырька вблизи границы [14], будут на порядки превосходить течения в окрестности свободного пузырька, индуцированные действием монополюных и дипольных колебаний [15, 16].

Хотя все приведенные выше результаты относились к поведению пузырька у плоской границы раздела, внутренняя (конформная) симметрия задачи, определяющая эффективность использования бисферических координат, позволяет найти аналитическое решение и вблизи сферической поверхности, а по существу – в окрестности омбилик достаточно плавной неровной поверхности. Такая возможность продемонстрирована на простейшем примере – связанных колебаниях пары пузырьков [17].

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные исследования позволили описать особенности динамики пузырька вблизи межфазной поверхности и определить поведение рассеянного поля в дальней зоне. Получены аналитические формулы, определяющие зависимость амплитуды радиальных и дипольных колебаний от размеров пузырька, расстояния до границы и физических параметров сред. Показано, что использование приближенной модели, учитывающей только вклад низшего члена разложения во взаимодействии пузырька и его зеркального изображения, обеспечивает хорошую аппроксимацию точного решения. Найдено, что при приближении к границе дипольные колебания становятся сопоставимыми по амплитуде с радиальными. Следствием данного обстоятельства является значительный рост микропотоков, генерируемых пузырьком.

Работа выполнена при поддержке ДВО РАН (проект Дальний Восток № 15-1-1-021) и ТОИ ДВО РАН (проект № 117030110034-7).

### ПРИЛОЖЕНИЕ А

#### АСИМПТОТИКА ФУНКЦИИ ГРИНА

Первые два члена асимптотического разложения интегрального представления для функции Грина (2) получены в работе [1]. Для справочных целей эти результаты приведены в данном приложении. Вклад первого слагаемого во второй строчке уравнения (2) приводит к функции Грина для свободного пространства, и первые члены асимптотического разложения вычисляются просто:

$$G_+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp(ik_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + ik_0.$$

Вычисления вклада от второго слагаемого, для обозначения которого мы будем использовать символ  $G_-(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , приводит к следующему выражению [1]:

$$G_-(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \approx \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' + 2z'\mathbf{e}_z|} \frac{m-1}{m+1} + ik_0 \left[ \frac{m^2 + 1 - 2mn}{m^2 - 1} + 2m^2 C(n, M) \right],$$

$$C(n, m) = \begin{cases} -\frac{(n^2 - 1)^{1/2}}{(m^2 - 1)^{3/2}} \ln \left[ \frac{1 - \sqrt{\frac{(n-1)(m-1)}{(n+1)(m+1)}}}{1 + \sqrt{\frac{(n-1)(m-1)}{(n+1)(m+1)}}} \right], & n > 1, m > 1; \\ -\frac{2(n^2 - 1)^{1/2}}{(1 - m^2)^{3/2}} \operatorname{arctg} \left[ \frac{\sqrt{\frac{(n-1)(1-m)}{(n+1)(m+1)}}}{\sqrt{\frac{(n-1)(m-1)}{(n+1)(m+1)}}} \right], & n > 1, m < 1; \\ -\frac{2(1 - n^2)^{1/2}}{(m^2 - 1)^{3/2}} \operatorname{arctg} \left[ \frac{\sqrt{\frac{(1-n)(m-1)}{(n+1)(m+1)}}}{\sqrt{\frac{(1-n)(1-m)}{(n+1)(m+1)}}} \right], & n < 1, m > 1; \\ -\frac{(1 - n^2)^{1/2}}{(1 - m^2)^{3/2}} \ln \left[ \frac{1 - \sqrt{\frac{(1-n)(1-m)}{(n+1)(m+1)}}}{1 + \sqrt{\frac{(1-n)(1-m)}{(n+1)(m+1)}}} \right], & n < 1, m < 1. \end{cases}$$

Таким образом, функции Грина нулевого и первого приближений имеют следующий вид:

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' + 2z'\mathbf{e}_z|} \frac{m-1}{m+1},$$

$$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = (i\omega/c)\tilde{G}_1, \quad \tilde{G}_1 = 2m \left[ \frac{(m-n)}{m^2 - 1} + mC(n, m) \right].$$

Примечательно, что поправка первого порядка является постоянной, не зависящей от пространственных координат. В выражении для поправки нулевого порядка  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор в направлении оси  $z$ .

$$G_0^-(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' + 2z'\mathbf{e}_z|} \frac{m-1}{m+1} =$$

$$= G_+(\xi, \vartheta, \alpha | \xi', \vartheta', \alpha') \frac{m-1}{m+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{\operatorname{ch}\xi - \cos\vartheta\sqrt{\operatorname{ch}\xi' - \cos\vartheta'}}}{a} \frac{m-1}{m+1} \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l \frac{(l-|s|)!}{(l+|s|)!} e^{is(\alpha-\alpha')} P_l^{(|s|)}(\vartheta) P_l^{(|s|)}(\vartheta') e^{-(n+1/2)[\xi-\xi']},$$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Максимов А.О., Половинка Ю.А. Пульсации газового включения вблизи межфазной поверхности // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 1. С. 30–37.
2. Leighton T.G. The Acoustic Bubble. London: Academic Press, 1994. 613 p.
3. Максимов А.О. Спектр шума “газового факела” // Акуст. журн. 2005. Т. 50. № 4. С. 435–442.
4. Greinert J., Nutzelt B. Hydroacoustic experiments to establish a method for the determination of methane bubble fluxes at cold seeps // Geo-Mar. Lett. 2004. V. 24. № 1. P. 75–85.
5. Саломатин А.С., Юсупов В.И., Верещагина О.Ф., Черных Д.В. Акустическая оценка концентрации метана в водной толще в областях его пузырьковой разгрузки // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 6. С. 638–644.
6. Shakhova N., Semiletov I., Leifer I., Sergienko V., Salyuk A., Kosmach D., Chernykh D., Stubbs C., Nicolsky D., Tumskoy V., Gustafsson Ö. Ebullition and storm-induced methane release from the East Siberian Arctic

### ПРИЛОЖЕНИЕ Б

#### ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ГРИНА В БИСФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Функции Грина уравнения Лапласа исходного и зеркального источников имеют следующее представление в бисферической системе координат:

$$G_+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = G_+(\xi, \vartheta, \alpha | \xi', \vartheta', \alpha') =$$

$$= \frac{\sqrt{\operatorname{ch}\xi - \cos\vartheta\sqrt{\operatorname{ch}\xi' - \cos\vartheta'}}}{a} \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l \frac{(l-|s|)!}{(l+|s|)!} e^{is(\alpha-\alpha')} P_l^{(|s|)}(\vartheta) P_l^{(|s|)}(\vartheta') e^{-(n+1/2)[\xi-\xi']},$$

- Shelf // *Nature Geoscience*. 2014. V. 7. № 1. С. 64–70. doi 10.1038/ngeo2007
7. Григорьева Н.С., Куприянов М.С., Михайлова Д.А., Островский Д.Б. Рассеяние звуковых волн на сферическом рассеивателе, находящемся вблизи ледовой поверхности // *Акуст. журн.* 2016. Т. 62. № 1. С. 10–23.
  8. Birkin P.R., Offin D.G., Leighton T.G. An activated fluid stream – New techniques for cold water cleaning // *Ultrason. Sonochem.* 2016. V. 29. P. 612–618. doi 10.1016/j.ultsonch.2015.10.001
  9. Birkin P.R., Offin D.G., Vian C.J.B., Howlin R.P., Dawson J.I., Secker T.J., Herve R.C., Stoodley P., Orffo R.O.C., Keevil C.W., Leighton T.G. Cold water cleaning of brain proteins, biofilm and bone-harvesting an ultrasonically activated stream // *Phys. Chem. Chem. Phys.* 2015. V. 17. P. 20574–20579. doi 10.1039/C5CP02406D
  10. Шендеров Е.Л. Дифракция звука на упругой импедансной сфере, расположенной вблизи импедансной или упругой границы полупространства // *Акуст. журн.* 2002. Т. 48. № 5. С. 684–694.
  11. Бреховских Л.М., Годиш О.А. *Акустика слоистых сред*. М.: Наука, 1989. 416 с.
  12. Maksimov A.O., Burov B.A., Salomatov A.S., Chernykh D.V. Sounds of marine seeps: A study of bubble activity near a rigid boundary // *J. Acoust. Soc. Am.* 2014. V. 136. № 3. P. 1065–1076.
  13. Doinikov A.A., Bouakaz A. Interaction of an ultrasound-activated contrast microbubble with a wall at arbitrary separation distances // *Phys. Med. Biol.* 2015. V. 60. P. 7909–7925.
  14. Doinikov A.A., Bouakaz A. Effect of a distant rigid wall on microstreaming generated by an acoustically driven gas bubble // *J. Fluid Mech.* 2014. V. 742. P. 425–445.
  15. Longuet-Higgins M.S. Viscous streaming from an oscillating spherical bubble // *Proc. Roy. Soc. Lond.* 1998. V. 454. P. 725–742.
  16. Maksimov A.O. Viscous streaming from surface waves on the wall of acoustically-driven gas bubbles // *Eur. J. Mech. B/Fluids*. 2007. V. 26. № 1. P. 28–42.
  17. Maksimov A.O., Yusupov V.I. Coupled oscillations of a pair of closely spaced bubbles // *Eur. J. Mech. B/Fluids*. 2016. V. 60. № 6. P. 164–174.