

УДК 534.222

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ БИСПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ¹

© 2017 г. С. Н. Гурбатов*, И. Ю. Демин**, Н. В. Прончатов-Рубцов***

*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
603950 Н. Новгород, пр. Гагарина 23*

**e-mail: gurb@rf.unn.ru*

***e-mail: demin@rf.unn.ru*

****e-mail: nikvas@rf.unn.ru*

Поступила в редакцию 16.05.2017 г.

На основе спектрального решения эволюционного уравнения Бюргерса проведено численное моделирование распространения интенсивных случайных акустических волн в недиспергирующих средах. Решена задача о восстановлении начального спектра сигнала по измеренным спектральным и биспектральным характеристикам принятого сигнала на коротких трассах.

Ключевые слова: нелинейная акустика, спектральный и биспектральный анализ, обратная задача, диагностика.

DOI: 10.7868/S0320791917060028

ВВЕДЕНИЕ

Обратные задачи нелинейной акустики возникают как при нелинейной диагностике сред, материалов, изделий, строительных конструкций, биологических и геологических структур, так и при создании приборов, обеспечивающих оптимальное воздействие акустического излучения на мишень [1, 2]. Это обуславливает их важное прикладное значение. К одной из таких задач относится определение начального спектра интенсивного акустического шумового сигнала по результатам измерения его спектральных и волновых характеристик на определенном расстоянии от излучателя [3]. Сложность аналитического решения данной задачи обусловлено тем, что в процессе распространения интенсивного акустического шума происходит нелинейное взаимодействие его спектральных компонент, и в результате спектр в данном сечении связан с исходным спектром нелинейным интегральным уравнением. Частично эту проблему можно решить, используя высшие статистические моменты шума, в том числе спектры более высокого порядка [4, 5]. Биспектры применяются и в аэроакустике при анализе реактивных шумов современных самолетов [6–9]. Так, привлечение для анализа спектров высокого

порядка (биспектров) позволило объяснить более низкое затухание реактивного шума в области высоких частот, чем это было предсказано из линейной теории распространения акустического шума. Использование биспектров позволяет не только проанализировать нелинейную эволюцию амплитудных характеристик реактивного шума и распределения их в частотной области, но и проследить за изменением фазы частотных составляющих спектра.

В настоящей работе обсуждается использование биспектров как индикатора процесса нелинейного взаимодействия. Известно, что для гауссова шума все высшие спектры, и в частности биспектр, равны нулю [9]. В среде с квадратичной нелинейностью по мере распространения волны за счет взаимодействия спектральных компонент возникает новая гармоника на суммарной частоте. Это приводит к денормализации шумового сигнала и появлению ненулевых высших спектров. При этом биспектр отражает статистическую зависимость тройки спектральных компонент, появляющейся из нелинейного взаимодействия гармоник.

В данной работе на основе уравнения Бюргерса проведено численное моделирование эволюции интенсивного акустического шума и проведен анализ возможности восстановления начального спектра сигнала по измеренным спектральным и биспектральным характеристикам принятого сигнала на коротких трассах (до образования разрывов в волне).

¹ Статья подготовлена по материалам устного доклада на Шестой всероссийской конференции “Вычислительный эксперимент в аэроакустике”, 19–24 сентября 2016 года, г. Светлогорск Калининградской области, <http://ceaa.imamod.ru>.

1. БИСПЕКТРЫ КАК ИНДИКАТОР НЕЛИНЕЙНЫХ ИСКАЖЕНИЙ АКУСТИЧЕСКИХ ШУМОВ

Распространение плоских интенсивных акустических волн описывается уравнением Бюргера, которое в безразмерных переменных имеет вид [1, 10]

$$\frac{\partial V}{\partial x} - V \frac{\partial V}{\partial t} = \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}. \tag{1}$$

При записи уравнения (1) использованы безразмерные переменные

$$V = \frac{p}{p_0}, \quad x = \frac{z}{l_{SH}}, \tag{2}$$

где p – акустическое давление, p_0 – акустическое давление на апертуре излучателя, z – координата вдоль акустической оси, t – время в системе координат, движущейся вместе с волной со скоростью звука c_0 , Γ – обратное акустическое число Рейнольдса (число Гольдберга), z – расстояние от излучателя, l_{SH} – расстояние, на котором образуется разрыв в плоской гармонической на входе волне, равное

$$l_{SH} = \frac{c_0^3 p_0}{\varepsilon \omega p_0} = \frac{1}{\omega V_0}. \tag{3}$$

Здесь ρ_0 – плотность среды, ε – параметр квадратичной нелинейности, ω – характерная круговая частота, c_0 – скоростью звука, V_0 – начальная амплитуда поля.

В спектральном представлении уравнение Бюргера можно записать в виде

$$\frac{\partial c(\omega, x)}{\partial x} - \frac{i\omega}{2} F((F^{-1}(c(\omega, x)))^2) = -\Gamma \omega^2 c(\omega, x). \tag{4}$$

В уравнении (4) использованы прямое и обратное фурье-преобразования:

$$c(\omega, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(x, t) e^{-i\omega t} dt = F(u), \tag{5}$$

$$V(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega, x) e^{i\omega t} dt = F^{-1}(c).$$

Спектральная форма уравнения Бюргера (4) описывает эволюцию фурье-компонент $c(\omega, x)$ интенсивных акустических волн и удобна для проведения численного моделирования распространения регулярных и шумовых интенсивных акустических сигналов. Это уравнение также может быть легко модифицировано для описания цилиндрических и сферических волн [11].

Для стационарных случайных процессов спектральная $S(\omega)$ и биспектральная $S_2(\omega_1, \omega_2)$ плот-

ности связаны со случайными дельта-коррелированными фурье-компонентами соотношениями

$$\begin{aligned} \langle c(\omega) c^*(\omega_1) \rangle &= S(\omega) \delta(\omega - \omega_1), \\ \langle c(\omega) c^*(\omega_1) c^*(\omega_2) \rangle &= S_2(\omega, \omega_1) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2). \end{aligned} \tag{6}$$

Связь с корреляционной функцией (второй кумулянтной функцией) χ_2 и третьей кумулянтной функцией χ_3 можно представить в виде [9]

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_2(0, \tau) \exp(i\omega\tau) d\tau, \\ S_2(\omega, \omega_1) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_3(0, \tau, \tau_1) \times \\ &\times \exp[i(\omega\tau + \omega_1\tau_1)] d\tau d\tau_1. \end{aligned} \tag{7}$$

Для гауссова шума все высшие спектры, и в частности биспектр, равны нулю. В среде с квадратичной нелинейностью по мере распространения волны за счет взаимодействия спектральных компонент на частотах ω_1, ω_2 возникает новая гармоника на частоте $\omega = \omega_1 + \omega_2$. При этом происходит денормализация входного гауссова процесса, и его высшие спектры уже не равны нулю. При этом из (6) видно, что биспектр отражает статистическую зависимость тройки спектральных компонент, появляющейся из нелинейного взаимодействия гармоник. Роль биспектра как индикатора описания нелинейных эффектов становится очевидной, если мы запишем уравнение для спектральной плотности $S(\omega, x)$, соответствующее спектральной форме уравнения Кармана–Ховарта [12]:

$$\frac{\partial S(\omega, x)}{\partial x} = T(\omega, x) - \Gamma \omega^2 S(\omega, x). \tag{8}$$

Здесь функция $T(\omega, x)$ описывает нелинейное перераспределение энергии по спектру и определяется через спектры более высокого порядка:

$$T(\omega, x) = \frac{i\omega}{2} (G_{2,1}(\omega, x) - G_{1,2}(\omega, x)). \tag{9}$$

В это уравнение входят высшие спектральные функции $G_{2,1}(\omega, x)$ и $G_{1,2}(\omega, x)$, связанные с биспектром соотношением

$$\begin{aligned} G_{2,1}(\omega, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_2(\omega, \Omega) d\Omega, \\ G_{1,2}(\omega, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_2(\omega - \Omega, \Omega) d\Omega. \end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, именно биспектры определяют процесс нелинейной перекачки энергии по спектру.

2. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ О ВОССТАНОВЛЕНИИ НАЧАЛЬНОГО СПЕКТРА СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БИСПЕКТРОВ

При исчезающе малой вязкости обратная задача восстановления входного поля по профилю на некотором расстоянии от входа принципиально различается на дистанциях до и после образования разрывов [1]. На начальной стадии при нулевой вязкости ($\Gamma = 0$) уравнение Бюргерса переходит в уравнение Римана (уравнение простой волны). При этом решение как прямой, так и обратной задачи удобно представить в параметрическом виде на основе решения уравнения методом характеристик [3].

Решение обратной задачи принципиально различается для регулярных и шумовых сигналов. Для регулярного сигнала можно выделить расстояние до образования разрыва, где решение для поля сводится к уравнению простой волны, а решение обратной задачи однозначно. Для случайных полей при гауссовой входной статистике разрывы начинаются при сколь угодно малых расстояниях от входа. При этом точное решение обратной задачи принципиально невозможно. Для анализа спектрального состава при ($\Gamma = 0$) удобно явное представление фурье-образа простой волны [13]:

$$c(\omega, x) = -\frac{1}{2\pi i \omega x} \times \int_{-\infty}^{\infty} \{ \exp[-i\omega x V_0(t)] - 1 \} \exp(-i\omega t) dt. \quad (11)$$

На основе этого представления, а также соотношения (6), легко получить выражения для спектров и биспектров случайной простой волны, найденные в работах [4, 14, 15]. В частности, для спектра простой волны при гауссовых начальных условиях получаем выражение

$$S(\omega, x) = \frac{e^{-\sigma^2 \omega^2 x^2}}{2\pi \omega^2 x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{B(\tau) \omega^2 x^2} - 1 \right] e^{-i\omega \tau} d\tau. \quad (12)$$

В (12) $B(\tau)$ — корреляционная функция поля скорости на входе, а $\sigma^2 = B(0)$ — дисперсия входного процесса. Это выражение описывает спектр простой волны, для которой затухание отсутствует. Тем не менее, интегрирование по всем частотам показывает, что (12) описывает уменьшение энергии простой волны [16]. В [1, 17, 18] показано, что данный эффект связан с тем, что спектральное представление многозначного решения Римана соответствует переходу от многозначного решения к однозначному, которое представляет собой суммирование ветвей многозначного решения с различными знаками и качественно имитирует затухание на разрывах. В [19] было показано,

что на начальной стадии этот эффект достаточно мал, что позволяет надеяться на решение обратной задачи.

В работе [4] аналитически получено выражение, которое связывает между собой спектральные и биспектральные характеристики, измеренные для достаточно коротких трасс (до образования разрывов в исходной волне) с начальным спектром шумового акустического сигнала:

$$S_0(\omega) = S(\omega, x) - \frac{1}{2} x T(\omega, x). \quad (13)$$

Таким образом, измеряя спектр и биспектр в сечении x и используя соотношение (13), можно восстановить вид начального спектра на входе в нелинейную среду — решить обратную задачу нелинейной акустики.

Для численного моделирования эволюции случайных интенсивных акустических волн использовано уравнение Бюргерса в спектральной форме (4). Для реализации численного моделирования на основе уравнения (4) была предложена итерационная схема с использованием быстрого преобразования Фурье, которая позволила вычислить спектр и профиль волны на любых расстояниях от источника [11]. Отметим, что данная схема решения уравнения Бюргерса удобна для численного анализа эволюции как детерминированных, так и шумовых сигналов.

Для моделирования шума $V(x, t)$ был использован генератор случайных чисел, который позволил сформировать гауссов случайный процесс с нулевым средним и единичной дисперсией. Исходный процесс задавался с шагом по времени $\Delta t = 0.001$ с и длиной реализации 2048 (т.е. 2^{11}) точек. Программы для быстрого преобразования Фурье (прямого и обратного) брались из встроенной библиотеки MATLAB, где и проводилось непосредственно численное моделирование. Для получения конкретного начального спектра использовалась цифровая фильтрация исходного случайного процесса. Для реализации спектра, на нулевой частоте равного нулю, применялся полосовой цифровой фильтр, а для получения спектра, отличного от нуля на нулевой частоте, использовался фильтр низких частот. Для сглаживания частотного спектра на границах применялось окно Хэмминга, что позволяло уменьшать боковые лепестки спектра после фильтрации. Безразмерное число Гольдберга задавалось равным 0.01, что соответствовало значениям числа Рейнольдса, равным 100. На основе полученных реализаций фурье-образов поля скорости по стандартным программам MATLAB вычислялись корреляционные функции и биспектры на различных расстояниях от входа. Усреднение для получения спектральных и биспектральных характеристик проводилось по 1000 реализациям. Далее на осно-

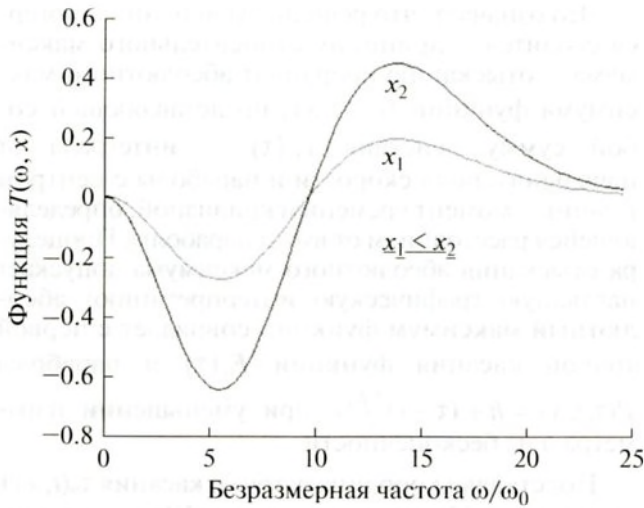


Рис. 1. Эволюция функции перераспределения энергии по спектру $T(\omega, x)$ для случая 1 – когда начальный спектр в нуле отличен от нуля.

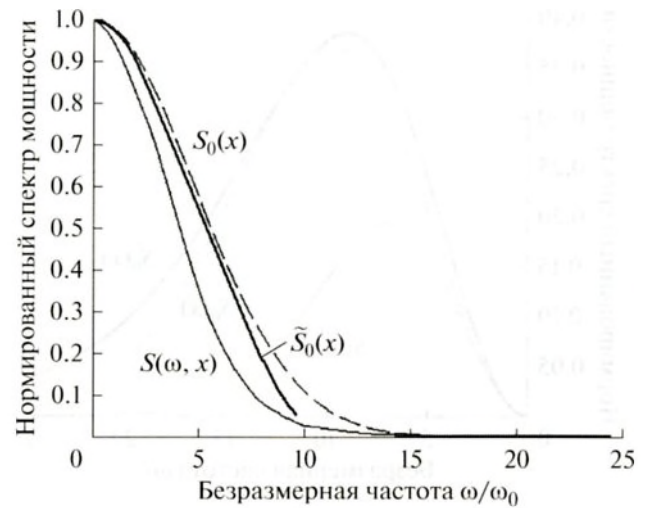


Рис. 2. Восстановленный начальный спектр интенсивного шума, когда начальный спектр в нуле отличен от нуля (случай 1).

ве выражений (9), (10) вычислялась функция $T(\omega, x)$, описывающая нелинейное перераспределение энергии по спектру, и по формуле (13) восстанавливался входной спектр.

Известно, что для акустической турбулентности спектр на нулевой частоте является инвариантом и не меняется по мере распространения. Соответственно, эволюция акустической турбулентности происходит по качественно разным законам [1]. Именно поэтому мы рассмотрим здесь два случая: 1 – когда начальный спектр в нуле отличен от нуля, т.е. спектр на входе имеет вид $S_0(\omega) \sim \exp(-\omega^2)$; 2 – когда начальный спектр в нуле равен нулю, т.е. спектр на входе имеет вид $S_0(\omega) \sim \omega^2 \exp(-\omega^2)$.

На рис. 1–4 представлены результаты численного моделирования функции $T(\omega, x)$ через спектры высшего порядка (используя выражения (9) и (10)), начальный спектр $S_0(\omega)$ (с учетом поведения спектра на нулевой частоте – случаи 1 и 2), спектр на расстоянии x от входа в нелинейную среду $S(\omega, x)$ и восстановленный начальный спектр $\tilde{S}_0(\omega)$ с учетом схемы численного решения эволюционного уравнения Бюргера (4) для двух типов начального спектра.

На рис. 1 изображена функция $T(\omega, x)$ на расстояниях меньше характерного расстояния образования разрывов в волне. Положительные значения функции соответствуют подкачке энергии в частоту ω , отрицательные – утечке энергии из частоты ω . Из графика видно, что нелинейное взаимодействие приводит к перекачке энергии в область высоких частот. Из рис. 2 видно, что практически во всей энергосодержащей

области восстановленный спектр достаточно хорошо совпадает с начальным спектром.

На рис. 3 и 4 представлены функция $T(\omega, x)$, начальный спектр $S_0(\omega)$, спектр на расстоянии x от входа в нелинейную среду $S(\omega, x)$ и восстановленный начальный спектр $\tilde{S}_0(\omega)$ для случая 2, когда начальный спектр в нуле равен нулю. При этом, как видно из рис. 4, полное затухание энергии шума уже существенно. Таким образом, формально мы находимся за пределами применимости формулы (13). Функция $T(\omega, x)$ (рис. 3) в малой области низких частот принимает поло-

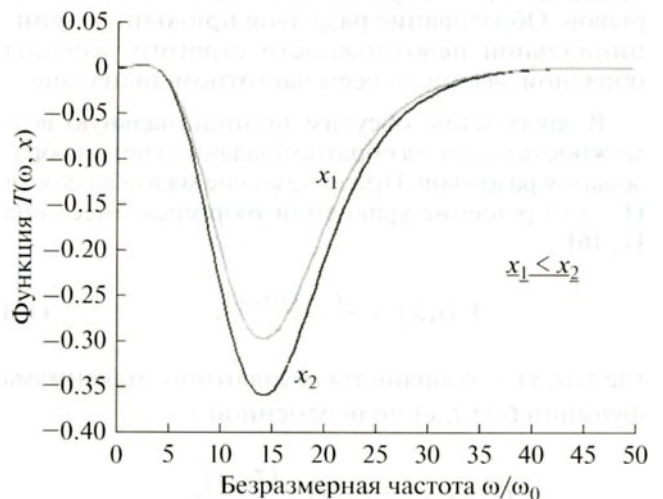


Рис. 3. Эволюция функции перераспределения энергии по спектру $T(\omega, x)$ для случая 2 – когда начальный спектр в нуле равен нулю.

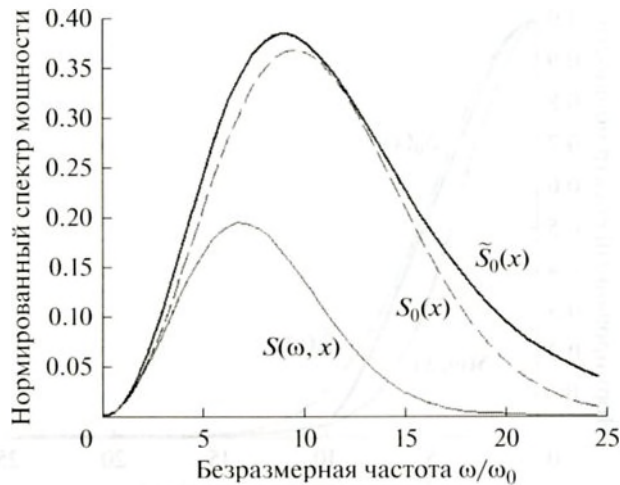


Рис. 4. Восстановленный начальный спектр интенсивного шума, когда начальный спектр в нуле равен нулю (случай 2).

жительные значения — это означает параметрическую генерацию гармоник на разностной частоте вследствие нелинейного взаимодействия высших гармоник. На данных расстояниях поглощение энергии происходит в области достаточно высоких частот, и функция $T(\omega, x)$ в области промежуточных частот практически равна нулю. Это означает, что в этом диапазоне перекачка энергии вверх по спектру преобладает над генерацией новых высокочастотных компонент. Несмотря на то, что в данном примере затухание энергии весьма существенно, восстановленный спектр достаточно хорошо воспроизводит спектр на входе. Основные отличия связаны с высокочастотной частью спектра, универсальное степенное поведение которой обусловлено образованием разрывов. Образование разрывов приводит к принципиальной невозможности строгого решения обратной задачи во всем частотном диапазоне.

В заключение обсудим принципиальную возможность решения обратной задачи с учетом образования разрывов. При исчезающе малой вязкости ($\Gamma \rightarrow 0$) решение уравнения Бюргера имеет вид [1, 16]

$$V(t, x) = -\frac{t - \tau_*(t, x)}{x}, \quad (14)$$

где $\tau_*(t, x)$ — координата абсолютного максимума функции $G(\tau, t, x)$ по переменной τ ,

$$G(\tau, t, x) = F_0(\tau) - \frac{(\tau - t)^2}{2x}, \quad (15)$$

$$F_0(t) = \int^t V(t') dt'.$$

Это означает, что решение уравнения Бюргера сводится к принципу относительного максимума — отысканию координат абсолютного максимума функции $G(\tau, t, x)$, представляющей собой сумму действия $F_0(\tau)$ — интеграла от начального поля скорости и параболы с центром в данный момент времени и кривизной, определяющейся расстоянием от входа параболы. Процедура отыскания абсолютного максимума допускает наглядную графическую интерпретацию: абсолютный максимум функции совпадает с первой точкой касания функции $F_0(\tau)$ и параболы $P(\tau, t, x) = h + (\tau - t)^2/2x$ при уменьшении параметра h из бесконечности.

Подставляя координату точки касания $\tau_*(t, x)$ в выражение (14), мы получим поле $V(t, x)$ в момент времени t на расстоянии x . При малых x и при любых временах точка касания параболы и начального действия единственна при всех t (функция $G(\tau, t, x)$ имеет единственный максимум) и, следовательно, поле $V(t, x)$ непрерывно. Это решение соответствует решению простой волны, и при этом возможно однозначное восстановление входного профиля. По мере удаления от источника (роста x) парабола становится все более пологой функцией, и при некоторых t_m парабола касается начального действия сразу в двух точках $[\tau_m, \tau_{m+1}]$. При этом весь участок входного профиля из интервала $[\tau_m, \tau_{m+1}]$ поглощается разрывом.

Таким образом, после образования разрывов принципиально невозможно решить обратную задачу на всем пространственном интервале. При этом параметры разрыва (амплитуда и скорость) несут информацию лишь об интегральных характеристиках начального поля на интервале $[\tau_m, \tau_{m+1}]$ [1]. В частности, в [20] на основе асимптотического решения (14), (15) показано, что на больших расстояниях профиль волны определяется лишь периодом входного возмущения, и для случая вырожденного параметрического взаимодействия интенсивных акустических пучков этот эффект исследован экспериментально.

В заключение отметим, что из приведенного выше рассмотрения видно, что использование биспектров позволяет восстановить информацию о начальном спектре интенсивных шумовых волн на начальной стадии распространения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 14-12-00882.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике. М.: Физматлит, 2008. 496 с. Gurbatov S.N., Rudenko O.V., Saichev A.I.

- hev A.I. Waves and Structures in Nonlinear Nondispersive Media: General Theory and Applications to Nonlinear Acoustics. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. Kg (Germany), 2011.
2. Руденко О.В., Гурбатов С.Н. Обратная задача нелинейной акустики: синтез интенсивных сигналов для усиления теплового и радиационного воздействия ультразвука // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 4. С. 412–423.
 3. Гурбатов С.Н., Руденко О.В. Об обратных задачах нелинейной акустики и акустической турбулентности // Изв. вузов. Радиофизика. 2015. Т. 58. № 7. С. 515–529.
 4. Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Прончатов-Рубцов Н.В. Эволюция биспектров случайных волн в нелинейных средах // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 6. С. 691–697.
 5. Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Прончатов-Рубцов Н.В. Об использовании спектров высших порядков в задаче диагностики интенсивных акустических шумов // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 5. С. 944–946.
 6. Gee K.L., Atchley A.A., Falco L.E., Gabrielson T.B., Sparrow V.W. Bispectral analysis of high-amplitude jet noise // AIAA. 2005. Paper № AIAA-2005-2937.
 7. Gee K.L., Atchley A.A., Falco L.E., Shepherd M.R., Ukeiley L.S., Jansen B.J., Seiner J.M. Bicoherence analysis of model-scale jet noise // J. Acoust. Soc. Am. 2010. V. 128. P. EL211–EL216.
 8. Reichman B.O., Gee K.L., Neilsen T.B., Miller K.G. Quantitative analysis of a frequency-domain nonlinearity indicator // J. Acoust. Soc. Am. 2016. V. 139. P. 2505–2513.
 9. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ негауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978. 376 с.
 10. Руденко О.В., Гурбатов С.Н., Хедберг К.М. Нелинейная акустика в задачах и примерах. М.: Физматлит, 2007. 176 с. Rudenko O.V., Gurbatov S.N., Hedberg C.M. Nonlinear Acoustics through Problems and Examples. Trafford, 2010.
 11. Гурбатов С.Н., Демин И.Ю., Черепенников В.В., Энфлю Б.О. Поведение интенсивных акустических шумов на больших расстояниях // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 1. С. 55–72.
 12. Мошин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Часть 2. 1967. 720 с.
 13. Пелиновский Е.Н. Спектральный анализ простых волн // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 19. № 3. С. 373–383.
 14. Руденко О.В., Чиркин А.С. О нелинейной трансформации спектров случайных волновых полей // ДАН СССР. 1974. Т. 214. № 5. С. 1045–1048.
 15. Саичев А.И. Спектры некоторых случайных волн, распространяющихся в нелинейных средах // Изв. вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17. № 7. С. 1025–1034.
 16. Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука, 1991.
 17. Fournier J.D., Frisch U. L'équation de Burgers déterministe et statistique // Journal de Mécanique Théorique et Appliquée (France) 1983. V. 2. № 5. P. 699–750.
 18. Gurbatov S.N., Saichev A.I. Inertial nonlinearity and chaotic motion of particle fluxes // Chaos 1993. V. 3. № 3. P. 333–358.
 19. Gurbatov S.N., Rudenko O.V. Nonlinear decay of random waves described by an integrodifferential equation // Phys. Rev. E 2014. V. 90. № 3. P. 032924.
 20. Гурбатов С.Н., Дерябин М.С., Касьянов Д.А., Куркин В.В. Вырожденное параметрическое взаимодействие интенсивных акустических пучков // Изв. вузов. Радиофизика. 2016. Т. 59. № 10. С. 887–899.