

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 539.3:534.1:534.16

НИЗКОЧАСТОТНЫЕ АСИМПТОТИКИ
КОМПЛЕКСНЫХ ДИСПЕРСИОННЫХ КРИВЫХ ДЛЯ ВОЛН ЛЭМБА
В СЛОИСТЫХ УПРУГИХ ПЛАСТИНАХ

© 2017 г. Д. Д. Захаров

Московский государственный университет путей сообщения
127994 Москва, ул. Образцова 9, стр. 9

e-mail: dd_zakh@mail.ru

Поступила в редакцию 22.12.2014 г.
После доработки 17.02.2017 г.

Предложен итерационно-асимптотический метод расчета комплексных дисперсионных кривых для изотропно-слоистых пластин. На первом этапе в явном виде выводится дисперсионное уравнение и его предельный вид в статике. Исследуются предельные переходы к совпадающим материалам или к исчезающе малым толщинам слоев. Подробно анализируется частный случай материалов с совпадающими модулями сдвига. Определяется асимптотика статических корней при большом значении модуля корня, оценивается погрешность асимптотики и предлагается итерационный метод расчета точных значений корней. Далее выводится длинноволновая асимптотика дисперсионных ветвей и доказывается, что всякая комплексная дисперсионная кривая имеет протяженный логий участок. Асимптотика тем точнее, чем ниже частота и чем выше значение номера кривой. Точные значения волновых чисел на дисперсионной кривой также находятся с помощью итерационной процедуры. Приводятся примеры расчета дисперсионных кривых.

Ключевые слова: волны Лэмба, слоистые пластины, волновые числа, комплексный спектр.

DOI: 10.7868/S032079191705015X

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что спектр волновых чисел в полуграниченных упругих волноводах, вообще говоря, комплексный и не сводится ни к какой краевой задаче с вещественным спектром [1]. Физически наличие комплексных волновых чисел объясняется конверсией P - и S -волн при их взаимодействии с границей, так что при каждой круговой частоте ω волновод конечной толщины имеет конечное число вещественных и мнимых волновых чисел $k_n(\omega)$ и счетное множество комплексных. Математически это выражается в совместном (векторном) рассмотрении решений волновых уравнений с различными скоростями распространения при связанных краевых условиях. Исключение составляют задачи для волн с SH -поляризацией в плоской геометрии и волн кручения в цилиндрических телах, а также задачи с “перекрестными” граничными условиями (типа условия проскальзывания), где P - и S -волны присутствуют, но их конверсии при данных граничных условиях не происходит, и рассмотрение можно разделить на скалярные задачи.

В настоящее время имеется ряд эффективных численных методов для построения дисперсион-

ных ветвей. К ним можно отнести метод матриц распространения [2–6], с возможной последующей дискретизацией волновода по толщине с использованием метода коллокации [7], метод конечных элементов [8] и их различные комбинации с вариационными подходами [9]. Использовались также разложения искомым собственным волнам по специальному базису [10]. Общее достоинство этих подходов – в применимости к неоднородным волноводам достаточно сложной конфигурации, возможности избежать трудоемкого аналитического исследования сложных трансцендентных дисперсионных уравнений и рассчитать все вещественные, мнимые и несколько комплексных дисперсионных кривых в разумном диапазоне частот. Общим недостатком является неполнота информации обо всем спектре $\{k_n(\omega)\}$ в силу роста размерностей и погрешности при $n \gg 1$. Тем не менее, существуют задачи, где эта информация необходима – при разложении поля в ряд по собственным функциям с использованием обобщенной ортогональности [11–13], нахождении тензора Грина [14–16], применении неотражающих граничных условий [17, 18], в задачах дифракции и выделения сингулярности [19–22] и т.д.

Для простейших волноводов в виде однородных пластин и круговых цилиндров бесконечная часть спектра удачно описана с помощью асимптотик: при $n \rightarrow +\infty$ найдены приближенные формулы для $\{k_n(0)\}$ [23–28], и поведение дисперсионных ветвей хорошо описывается первыми членами разложения $k_n(\omega)$ в ряд по частоте. Для слоисто-неоднородных упругих волноводов подобные фундаментальные результаты в литературе отсутствуют, и ниже предпринята попытка частично восполнить этот пробел.

МАТРИЦЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ И ДИСПЕРСИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим сначала общее описание поверхностных волн с PSV-поляризацией в слоистой пластине, где j -й упругий слой толщины $h_j = z_{j+1} - z_j$ занимает область $-\infty < x < +\infty$, $z_j \leq z \leq z_{j+1}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) в декартовых координатах (x, z) , имеет постоянные плотность ρ_j и коэффициенты Ламе λ_j, μ_j . Зависимость процессов от времени примем в виде $\exp(-i\omega t)$, и в очевидных случаях этот множитель и номер j опускаем. Поле перемещений $\mathbf{u} = (u_x, u_z)$ связано с тензором напряжений законом Гука

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \partial_x u_x \\ \sigma_{xz} = \mu (\partial_z u_x + \partial_x u_z) \\ \sigma_{zz} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \partial_x u_x \end{cases} \quad (1)$$

и удовлетворяет уравнениям движения и условиям непрерывности на границах раздела:

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \omega^2 \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$[\sigma_{xz}] = [\sigma_{zz}] = 0, \quad [u_x] = [u_z] = 0. \quad (3)$$

Однородные граничные условия на лицевых поверхностях могут быть заданы в виде нулевых перемещений, комбинаций из нулевых перемещений и напряжений в различных направлениях или в виде свободных границ:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zz} = 0, \quad (4)$$

что отвечает обобщенным волнам Лэмба в пластине. Как известно, спектр волновых чисел $\{k\}$

для волн вида $\mathbf{u}^{(j)} = \mathbf{v}^{(j)}(z) \exp(ikx - i\omega t)$, удовлетворяющих (1)–(4), при всякой частоте имеет конечное число вещественных и чисто мнимых значений $k(\omega)$ и счетное множество комплексных корней $\operatorname{Re}, \operatorname{Im} k(\omega) \neq 0$ соответствующего трансцендентного дисперсионного уравнения, с точкой сгущения на бесконечности.

Для получения дисперсионного уравнения введем матрицу распространения [2–6] и для одного слоя толщиной $h = z_2 - z_1$ с лицевыми поверхностями $z^+ = z_2, z^- = z_1$ получим ее в замкнутом виде. Матрица распространения $\mathbf{P}_\xi(h)$: $\xi(z_2) = \mathbf{P}_\xi(h) \times \xi(z_1)$ для псевдовектора перемещений и напряжений $\xi = (-ik^{-1}u_x, k^{-1}u_z, k^{-2}\sigma_{zz}, -ik^{-2}\sigma_{zx})^T$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\xi(h) &= \mathbf{M}_\xi \times \Lambda(h) \times \mathbf{M}_\xi^{-1}, \quad \mathbf{M}_\xi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\gamma_S & \gamma_S \\ -\gamma_P & \gamma_P & 1 & 1 \\ 2\mu\kappa & 2\mu\kappa & -2\mu\gamma_S & 2\mu\gamma_S \\ -2\mu\gamma_P & 2\mu\gamma_P & 2\mu\kappa & 2\mu\kappa \end{bmatrix}, \\ \Lambda(h) &= \operatorname{diag} [E_P^-, E_P^+, E_S^-, E_S^+], \\ \mathbf{M}_\xi^{-1} &= \begin{bmatrix} \gamma^2{}^{-1} & \gamma_1(2\gamma_P)^{-1} & -\gamma(4\mu)^{-1} & -\gamma(4\mu\gamma_P)^{-1} \\ \gamma^2{}^{-1} & -\gamma_1(2\gamma_P)^{-1} & -\gamma(4\mu)^{-1} & \gamma(4\mu\gamma_P)^{-1} \\ \gamma_1(2\gamma_S)^{-1} & \gamma^2{}^{-1} & -\gamma(4\mu\gamma_S)^{-1} & -\gamma(4\mu)^{-1} \\ -\gamma_1(2\gamma_S)^{-1} & \gamma^2{}^{-1} & \gamma(4\mu\gamma_S)^{-1} & -\gamma(4\mu)^{-1} \end{bmatrix}, \\ E_P^\pm &= e^{\mp\gamma_P kh}, \quad E_S^\pm = e^{\mp\gamma_S kh}, \quad \gamma_{P,S} = (1 - k_{P,S}^2 k^{-2})^{1/2}, \\ \gamma &= 2k^2 k_S^{-2} = 2c^{-2} c_S^2, \quad \gamma_1 = \gamma - 1, \quad k_{P,S} = \omega c_{P,S}^{-1}, \\ \rho\gamma c^2 &= \rho 2k^2 k_S^{-2} \omega^2 k^{-2} = 2\mu, \quad \rho\gamma\gamma_1 c^2 = \rho(\gamma - 1)c^2 = \\ &= 2\mu - \mu k_S^2 k^{-2} = 2\mu\kappa, \quad \kappa = 2^{-1}(2 - k_S^2 k^{-2}) = \gamma_1\gamma^{-1}, \\ -(2\rho c^2)^{-1} &= -k^2(2\rho\omega^2)^{-1} = -k^2(2\mu k_S^2)^{-1} = -\gamma(4\mu)^{-1}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $c = \omega k^{-1}$ – фазовая скорость, $c_P = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$ и $c_S = (\mu/\rho)^{1/2}$ – скорости P - и S -волн соответственно. Достоинством представления (5) является нахождение \mathbf{M}_ξ и \mathbf{M}_ξ^{-1} в замкнутом виде. Преобразуя матрицу $\Lambda(h)$ к виду

$$\Lambda(h) = e\mathbf{E}_+ + e^{-1}\mathbf{E}_- \quad (e \equiv e^{kh}),$$

$$\mathbf{E}_+ = \text{diag}\left[0 \ F_P^+ \ 0 \ F_S^+\right], \quad (6)$$

$$\mathbf{E}_- = \text{diag}\left[F_P^- \ 0 \ F_S^- \ 0\right], \quad F_{P,S}^\mp = e^{\mp(\gamma_{P,S}-1)kh},$$

матрицу распространения (5) также разложим по экспонентам $e^{\pm 1}$:

$$\mathbf{P}_\xi = e\mathbf{P}_+ + e^{-1}\mathbf{P}_-, \quad \mathbf{P}_\mp = \mathbf{M}_\xi \times \mathbf{E}_\mp \times \mathbf{M}_\xi^{-1},$$

$$\mathbf{P}_+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\gamma F_P^+ - \gamma_1 F_S^+) & \frac{1}{2}\left(-\frac{\gamma_1 F_P^+}{\gamma_P} + \gamma \gamma_S F_S^+\right) & \frac{\gamma}{4\mu}(-F_P^+ + F_S^+) & \frac{\gamma}{4\mu}\left(\frac{F_P^+}{\gamma_P} - \gamma_S F_S^+\right) \\ \frac{1}{2}\left(\gamma \gamma_P F_P^+ - \frac{\gamma_1 F_S^+}{\gamma_S}\right) & \frac{1}{2}(-\gamma_1 F_P^+ + \gamma F_S^+) & \frac{\gamma}{4\mu}\left(-\gamma_P F_P^+ + \frac{F_S^+}{\gamma_S}\right) & \frac{\gamma}{4\mu}(F_P^+ - F_S^+) \\ \mu(\kappa \gamma F_P^+ - \gamma_1 F_S^+) & \mu\left(-\frac{\kappa \gamma_1 F_P^+}{\gamma_P} + \gamma \gamma_S F_S^+\right) & \frac{\gamma}{2}(-\kappa F_P^+ + F_S^+) & \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\kappa F_P^+}{\gamma_P} - \gamma_S F_S^+\right) \\ \mu\left(\gamma \gamma_P F_P^+ - \frac{\kappa \gamma_1 F_S^+}{\gamma_S}\right) & \mu(-\gamma_1 F_P^+ + \kappa \gamma F_S^+) & \frac{\gamma}{2}\left(-\gamma_P F_P^+ + \frac{\kappa F_S^+}{\gamma_S}\right) & \frac{\gamma}{2}(F_P^+ - \kappa F_S^+) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\mathbf{P}_- = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\gamma F_P^- - \gamma_1 F_S^-) & \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_1 F_P^-}{\gamma_P} - \gamma \gamma_S F_S^-\right) & \frac{\gamma}{4\mu}(-F_P^- + F_S^-) & \frac{\gamma}{4\mu}\left(-\frac{F_P^-}{\gamma_P} + \gamma_S F_S^-\right) \\ \frac{1}{2}\left(-\gamma \gamma_P F_P^- + \frac{\gamma_1 F_S^-}{\gamma_S}\right) & \frac{1}{2}(-\gamma_1 F_P^- + \gamma F_S^-) & \frac{\gamma}{4\mu}\left(\gamma_P F_P^- - \frac{F_S^-}{\gamma_S}\right) & \frac{\gamma}{4\mu}(F_P^- - F_S^-) \\ \mu(\kappa \gamma F_P^- - \gamma_1 F_S^-) & \mu\left(\frac{\kappa \gamma_1 F_P^-}{\gamma_P} - \gamma \gamma_S F_S^-\right) & \frac{\gamma}{2}(-\kappa F_P^- + F_S^-) & \frac{\gamma}{2}\left(-\frac{\kappa F_P^-}{\gamma_P} + \gamma_S F_S^-\right) \\ \mu\left(-\gamma \gamma_P F_P^- + \frac{\kappa \gamma_1 F_S^-}{\gamma_S}\right) & \mu(-\gamma_1 F_P^- + \kappa \gamma F_S^-) & \frac{\gamma}{2}\left(\gamma_P F_P^- - \frac{\kappa F_S^-}{\gamma_S}\right) & \frac{\gamma}{2}(F_P^- - \kappa F_S^-) \end{bmatrix}.$$

Полагая $|k| \gg 1$, из выражений (5)–(7) найдем асимптотические разложения \mathbf{P}_\pm в ряд по степеням k , которые принимают вид

$$\mathbf{P}_\mp = k^1 \mathbf{P}_\mp^{(1)} + \mathbf{P}_\mp^{(0)} + k^{-1} \mathbf{P}_\mp^{(-1)} + k^{-2} \mathbf{P}_\mp^{(-2)} + \dots, \quad (8)$$

причем $\mathbf{P}_\pm^{(-s)} = O(\omega^2)$, $s \geq 1$, так что предельные выражения при $\omega \rightarrow 0$ примут вид

$$\mathbf{P}_-^* = \lim_{\omega \rightarrow 0} (k\mathbf{P}_-^{(1)} + \mathbf{P}_-^{(0)}) = \frac{kh}{2} \left(1 - \frac{c_S^2}{c_P^2}\right) \begin{bmatrix} \mathbf{J} & -\frac{1}{2\mu}\mathbf{J} \\ 2\mu\mathbf{J} & -\mathbf{J} \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{c_S^2}{2c_P^2} \begin{bmatrix} (1-\mathbf{I}) & -\frac{1}{2\mu}(1-\mathbf{I}) \\ 2\mu(1-\mathbf{I}) & -(1-\mathbf{I}) \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\frac{1}{2\mu}(1-\mathbf{I}) \\ -2\mu(1-\mathbf{I}) & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\mathbf{P}_+^* = \lim_{\omega \rightarrow 0} (k\mathbf{P}_+^{(1)} + \mathbf{P}_+^{(0)}) = \frac{kh}{2} \left(1 - \frac{c_S^2}{c_P^2}\right) \begin{bmatrix} \mathbf{J}^T & -\frac{1}{2\mu}\mathbf{J}^T \\ 2\mu\mathbf{J}^T & -\mathbf{J}^T \end{bmatrix} -$$

$$- \frac{c_S^2}{2c_P^2} \begin{bmatrix} (1-\mathbf{I}) & -\frac{1}{2\mu}(1-\mathbf{I}) \\ 2\mu(1-\mathbf{I}) & -(1-\mathbf{I}) \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \frac{1}{2\mu}(1-\mathbf{I}) \\ 2\mu(1-\mathbf{I}) & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

При рассмотрении многослойной пластины условия межфазного контакта (3) позволяют получить итоговую матрицу распространения \mathbf{P} : $\xi(z_{n+1}) = \mathbf{P} \times \xi(z_1)$ в виде

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_\xi(h_n) \times \mathbf{P}_\xi(h_{n-1}) \dots \times \mathbf{P}_\xi(h_1),$$

$$\mathbf{P}_\xi(h_j) = e_j \mathbf{P}_+^{(j)} + e_j^{-1} \mathbf{P}_-^{(j)}, \quad (11)$$

$$h_j = z_{j+1} - z_j, \quad e_j = e^{kh_j}$$

или в экспоненциальной форме с представлением компонент в замкнутом виде:

$$\mathbf{P} = \sum_{(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)} \mathbf{P}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \exp\left(k \sum_{j=1}^n \tau_j h_j\right), \quad (12)$$

$$\mathbf{P}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \prod_{j=1}^n \mathbf{P}_{\tau_{n+1-j}}^{(n+1-j)}, \quad \tau_j = \bar{\tau}_j,$$

где суммирование ведется по всем различным сочетаниям знаков $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$.

Дисперсионное уравнение получается приравнением к нулю определителя такого минора матрицы \mathbf{P} вида (11) или (12), чьи номера строк и столбцов соответствуют однородным граничным условиям на лицевых поверхностях. Например, условиям (4) для двух свободных поверхностей соответствует минор с номерами строк 3, 4 и номерами столбцов 1, 2. Если расположение слоев в пластине симметрично, то можно рассмотреть лишь ее верхнюю половину, заменив условия (4) на нижней лицевой поверхности условиями на срединной поверхности $z = 0$:

$$u_x = 0, \quad \sigma_{zz} = 0, \quad (13)$$

для антисимметричных волн (задача изгиба, минор с номерами столбцов 2 и 4), или условием

$$u_z = 0, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad (14)$$

для симметричных волн (растяжение–сжатие, минор с номерами столбцов 1 и 3) с соответствующими дисперсионными уравнениями вида

$$\Psi(k, \omega) = 0 \quad (15)$$

$$\left(\Psi = \Delta_{24}^{34} \equiv \det \mathbf{P} \begin{pmatrix} 34 \\ 24 \end{pmatrix} \text{ или } \Psi = \Delta_{13}^{34} \equiv \det \mathbf{P} \begin{pmatrix} 34 \\ 13 \end{pmatrix}\right).$$

Левые части уравнений (15) также могут быть найдены в замкнутом виде. Покажем, как это можно сделать, на примере трехслойной пластины с симметричным расположением внутреннего слоя $|z| \leq h_1$ (среда 1) и двух одинаковых периферийных слоев $h_1 \leq |z| \leq h_1 + h_2$ (среда 2). Получаем разложения по экспонентам:

$$\mathbf{P}_{\xi}(h_2) \mathbf{P}_{\xi}(h_1) = (e_2 \mathbf{P}_+^2 + e_2^{-1} \mathbf{P}_-^2 e_2^{-1}) \times (e_1 \mathbf{P}_+^1 + e_1^{-1} \mathbf{P}_-^1) =$$

$$= e_2 e_1 \mathbf{A} + e_2^{-1} e_1 \mathbf{B} + e_2 e_1^{-1} \mathbf{C} + e_2^{-1} e_1^{-1} \mathbf{D}, \quad (16)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}(+, +) = \mathbf{P}_+^2 \times \mathbf{P}_+^1, \quad \mathbf{B} = \mathbf{P}(+, -) =$$

$$= \mathbf{P}_-^2 \times \mathbf{P}_+^1, \quad \mathbf{C} = \mathbf{P}(-, +) = \mathbf{P}_+^2 \times \mathbf{P}_-^1, \quad (17)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}(-, -) = \mathbf{P}_-^2 \times \mathbf{P}_-^1,$$

$$\Delta_{24}^{34} = (e_1 e_2)^2 A_{24}^{34} + (e_1/e_2)^2 B_{24}^{34} + (e_2/e_1)^2 C_{24}^{34} +$$

$$+ (e_1 e_2)^{-2} D_{24}^{34} + e_1^2 H_+^1 + e_2^2 H_+^2 + e_1^{-2} H_-^1 +$$

$$+ e_2^{-2} H_-^2 + (e_1 e_2)^0 H^0, \quad (18)$$

$$\Delta_{13}^{34} = (e_1 e_2)^2 A_{13}^{34} + (e_1/e_2)^2 B_{13}^{34} + (e_2/e_1)^2 C_{13}^{34} +$$

$$+ (e_1 e_2)^{-2} D_{13}^{34} + e_1^2 G_+^1 + e_2^2 G_+^2 +$$

$$+ e_1^{-2} G_-^1 + e_2^{-2} G_-^2 + (e_1 e_2)^0 G^0, \quad (19)$$

где коэффициенты – либо соответствующие определители миноров $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ ($\Delta \leftrightarrow A, B, C, D$), либо линейные комбинации определителей таких миноров, где один столбец взят, например, из матрицы \mathbf{A} , другой из матрицы \mathbf{B} и т.д., в соответствии с равенствами (16) и (17). Такие очевидные линейные комбинации обозначены как $H^0, H_{\pm}^1, H_{\pm}^2$ или $G^0, G_{\pm}^1, G_{\pm}^2$.

Упомянем известный факт о неизменности дисперсионных уравнений в упругих волноводах на любой частоте при замене $k \leftrightarrow -k$ или замене k на комплексное сопряжение \bar{k} , т.е. все волновые числа могут быть получены симметричными отражениями из первого квадранта $\text{Re } k \geq 0, \text{Im } k \geq 0$. Для случая линейно-вязкоупругих материалов при $\omega \neq 0$ имеется лишь симметрия вида $k \leftrightarrow -k$, но симметрия по квадрантам сохраняется в статике.

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ВИД ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ (СТАТИКА)

Полагая теперь $\omega \rightarrow 0$, получим соотношения для коэффициентов в равенствах (18) и (19) для трехслойной пластины в статике:

$$A_{24}^{34} = -D_{24}^{34} = -A_{13}^{34} = D_{13}^{34} = A^0, \quad B_{24}^{34} = -C_{24}^{34} =$$

$$= -B_{13}^{34} = C_{13}^{34} = B^0, \quad H_{\pm}^1 = -G_{\pm}^1 = \pm k^2 H_2^1 \pm H_0^1,$$

$$H_{\pm}^2 = G_{\pm}^2 = k H_1^2, \quad H^0 = G^0 = k^3 H_3^0 + k H_1^0.$$

Прочие постоянные имеют вид

$$A^0 = \frac{1 - (b_2/a_2)^2}{8\mu_1} \left[2\mu_1 \mu_2 \left(1 + \frac{b_1^2 b_2^2}{a_1^2 a_2^2} \right) + \mu_1^2 \left(1 - \frac{b_1^2}{a_1^2} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(1 + \frac{b_2^2}{a_2^2} \right) + \mu_2^2 \left(1 + \frac{b_1^2}{a_1^2} \right) \left(1 - \frac{b_2^2}{a_2^2} \right) \right],$$

$$B^0 = \frac{1 - (b_2/a_2)^2}{8\mu_1} \left[2\mu_1 \mu_2 \left(-1 + \frac{b_1^2 b_2^2}{a_1^2 a_2^2} \right) + \mu_1^2 \left(1 - \frac{b_1^2}{a_1^2} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(1 + \frac{b_2^2}{a_2^2} \right) + \mu_2^2 \left(1 + \frac{b_1^2}{a_1^2} \right) \left(1 - \frac{b_2^2}{a_2^2} \right) \right],$$

$$H_2^1 = -\frac{h_2^2}{2\mu_1} (\mu_2 - \mu_1) \times$$

$$\times \left(1 - \frac{b_2^2}{a_2^2} \right)^2 \left[\frac{b_1^2}{a_1^2} (\mu_2 - \mu_1) + \mu_2 + \mu_1 \right],$$

$$\begin{aligned}
 H_0^1 &= \frac{1}{4\mu_1} \left[-2\mu_1\mu_2 \frac{b_1^2 b_2^2}{a_1^2 a_2^2} \left(1 - \frac{b_2^2}{a_2^2} \right) + \mu_1^2 \left(1 - \frac{b_1^2}{a_1^2} \right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left(1 + \frac{b_2^4}{a_2^4} \right) - \mu_2^2 \left(1 + \frac{b_1^2}{a_1^2} \right) \left(1 - \frac{b_2^2}{a_2^2} \right)^2 \right], \\
 H_1^2 &= \frac{h_1}{2\mu_1} (\mu_2 - \mu_1) \left(1 - \frac{b_1^2}{a_1^2} \right) \left(1 - \frac{b_2^2}{a_2^2} \right) \times \\
 &\quad \times \left[-\frac{b_2^2}{a_2^2} (\mu_2 - \mu_1) + \mu_2 + \mu_1 \right], \\
 H_3^0 &= -\frac{2h_1 h_2^2}{\mu_1} (\mu_2 - \mu_1)^2 \left(1 - \frac{b_1^2}{a_1^2} \right) \left(1 - \frac{b_2^2}{a_2^2} \right)^2, \\
 H_1^0 &= -\frac{1}{\mu_1} \left[\mu_2^2 h_1 \left(1 - \frac{b_1^2}{a_1^2} \right) \left(1 - \frac{b_2^2}{a_2^2} \right)^2 + \right. \\
 &\quad + 2\mu_1 \mu_2 h_1 \left(1 - \frac{b_1^2}{a_1^2} \right) \frac{b_2^2}{a_2^2} \left(1 - \frac{b_2^2}{a_2^2} \right) + \\
 &\quad \left. + \mu_1^2 h_1 \left(1 - \frac{b_1^2}{a_1^2} \right) \left(1 + \frac{b_2^4}{a_2^4} \right) + 2\mu_1 \mu_2 h_2 \left(1 - \frac{b_2^2}{a_2^2} \right) \right],
 \end{aligned}$$

где μ_α – модули сдвига, и скорости P - и S -волн в средах $\alpha = 1, 2$ обозначены для краткости $b_\alpha = c_{S\alpha}$, $a_\alpha = c_{P\alpha}$.

Соответствующие предельные формы уравнений (15) примут вид

$$\begin{aligned}
 &A^0 \operatorname{sh} 2k(h_1 + h_2) + B^0 \operatorname{sh} 2k(h_1 - h_2) + (k^2 H_2^1 + \\
 &+ H_0^1) \operatorname{sh} 2kh_1 \pm k H_1^2 \operatorname{ch} 2kh_2 \pm \frac{1}{2} (k^3 H_3^0 + k H_1^0) = 0.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Здесь и далее верхние знаки отвечают антисимметричным волнам изгиба (18), а нижние знаки – симметричным волнам (19). Отметим также, что $A^0 > 0$, $H_3^0, H_1^0 < 0$, $\operatorname{sign} H_1^2 = -\operatorname{sign} H_2^1 = \operatorname{sign}(\mu_2 - \mu_1)$, а для прочих коэффициентов возможны сочетания знаков: $B^0 < 0$ или $B^0 > 0$, и $H_0^1 > 0$ или $H_0^1 < 0$.

Предельный переход $h_2 \rightarrow +0$ означает $H_2^1, H_3^0 \rightarrow 0$, и уравнение (20) примет вид $\mu_1 2^{-1} (1 - b_1^2 a_1^{-2}) (\operatorname{sh} 2kh_1 \mp 2kh_1) = 0$, а при $h_1 \rightarrow +0$ получим $H_1^2, H_3^0 \rightarrow 0$ и аналогичный предельный вид $\mu_2 2^{-1} (1 - b_2^2 a_2^{-2}) (\operatorname{sh} 2kh_2 \mp 2kh_2) = 0$ для уравнения (20). При полном совпадении механических параметров сред 1 и 2 уравнение (20) преобразуется к виду $\mu (1 - b^2 a^{-2}) \times [\operatorname{sh} 2k(h_1 + h_2) \mp 2k(h_1 + h_2)] = 0$. Во всех этих частных случаях уравнения (20) отличаются от

классических уравнений для одного слоя [23–28] лишь постоянным множителем.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ВИД УРАВНЕНИЙ СТАТИКИ

Перейдем теперь к безразмерным постоянным и запишем уравнения (20) относительно переменной $\zeta = 2k(h_1 + h_2)$:

$$\begin{aligned}
 &\operatorname{sh} \zeta + \frac{\tilde{B}_0}{2} \operatorname{sh} \zeta (1 - 2\beta) + \frac{\zeta^2 \tilde{h}_2^1 + \tilde{h}_0^1}{2} \operatorname{sh} \beta_1 \times \\
 &\quad \times \zeta \pm \frac{\zeta \tilde{h}_1^2}{2} \operatorname{ch} \beta \zeta \pm \frac{\zeta^3 \tilde{h}_3^0 + \zeta \tilde{h}_1^0}{2} = 0, \\
 &\quad \beta = \frac{h_2}{h_1 + h_2}, \quad \beta_1 = 1 - \beta = \frac{h_1}{h_1 + h_2}, \\
 &\quad 1 - 2\beta = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}, \quad \tilde{B}_0 = \frac{2B_0}{A_0},
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}_2^1 &= \frac{H_2^1}{2A_0(h_1 + h_2)^2}, \quad \tilde{h}_0^1 = \frac{2H_0^1}{A_0}, \quad \tilde{h}_1^2 = \frac{H_1^2}{A_0(h_1 + h_2)}, \\
 \tilde{h}_3^0 &= \frac{H_3^0}{8A_0(h_1 + h_2)^3}, \quad \tilde{h}_1^0 = \frac{H_1^0}{2A_0(h_1 + h_2)},
 \end{aligned}$$

придав затем уравнениям (21) эквивалентный экспоненциально-логарифмический вид:

$$e^\zeta = f(\zeta) \Leftrightarrow \zeta = \operatorname{Ln} f(\zeta) = ip + \ln f(\zeta) \tag{22}$$

$(p \equiv 2\pi n)$,

$$f(\zeta) = T_1 + T_2 + T_3 + T_4, \tag{23}$$

$$T_1 = \pm \zeta^3 |\tilde{h}_3^0|, \quad T_2 = -\zeta^2 \tilde{h}_2^1 \operatorname{sh} \beta_1 \zeta, \quad T_3 = \mp \zeta \tilde{h}_1^2 \operatorname{ch} \beta \zeta, \tag{24}$$

$$T_4 = \pm \zeta |\tilde{h}_1^0| + e^{-\zeta} + \tilde{B}_0 \operatorname{sh} (2\beta - 1)\zeta - \tilde{h}_0^1 \operatorname{sh} \beta_1 \zeta. \tag{25}$$

Уравнения (22) показывают естественное происхождение “ветвления” и нумерации своих корней, далее обозначаемых ζ_n по индексу n дисперсионной кривой. Заметим также, что в множестве корней уравнений (21) всегда присутствует корень $\zeta_0 = 0$.

Для определенности рассмотрим ζ_n в первой четверти комплексной плоскости. Знаки коэффициентов будем характеризовать величинами

$$\begin{aligned}
 s &= \operatorname{sign}(\tilde{h}_1^2) = \operatorname{sign}(\mu_2 - \mu_1) = -\operatorname{sign}(\tilde{h}_2^1), \\
 s_1 &= (s + 1)/2.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Полагая $|\zeta| \gg 1$ и $p \gg 1$, естественно ввести последовательность приближений итерациями

$$\zeta_n \sim \zeta_n^{(m+1)} = ip + \operatorname{Ln} f(\zeta_n^{(m)}), \quad \zeta_n^{(0)} \equiv ip = i2\pi n, \tag{27}$$

получая при $m = 1$ и $m = 2$ из выражений (23)–(26) $T_\alpha^{(m)} = T_\alpha(\zeta_n^{(m-1)})$:

$$\begin{aligned} \zeta_n^{(1)} &= ip + \ln f(\zeta_n^{(0)}), \\ f(\zeta_n^{(0)}) &= \pm ip^3 |\tilde{h}_3^0| \mp ip |\tilde{h}_1^0| + 1 + \tilde{B}_0 \operatorname{sh}(i2\beta p) - \\ &- (-p^2 \tilde{h}_2^1 + \tilde{h}_0^1) \operatorname{sh}(i\beta_1 p) \mp ip \times \\ &\times \tilde{h}_1^2 \operatorname{ch}(i\beta p) \sim \mp p^3 |\tilde{h}_3^0| e^{i\pi/2}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \zeta_n^{(2)} &= ip + \ln f(\zeta_n^{(1)}), \\ f(\zeta_n^{(1)}) &= T_1^{(2)} + T_2^{(2)} + T_3^{(2)} + T_4^{(2)}, \\ T_1^{(2)} &= \mp [ip + \ln f(\zeta_n^{(1)})]^3 |\tilde{h}_3^0|, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} T_2^{(2)} &= -(ip + \ln f(\zeta_n^{(1)}))^2 \times \\ &\times \tilde{h}_2^1 \operatorname{sh}[\beta_1(ip + \ln f(\zeta_n^{(1)}))], \end{aligned} \quad (30)$$

$$T_3^{(2)} = \mp (ip + \ln f(\zeta_n^{(1)})) \tilde{h}_1^2 \operatorname{ch}\beta(ip + \ln f(\zeta_n^{(1)})), \quad (31)$$

$$\begin{aligned} T_4^{(2)} &= \mp \zeta_n^{(1)} |\tilde{h}_1^0| + e^{-\zeta_n^{(1)}} + \\ &+ \tilde{B}_0 \operatorname{sh}(2\beta - 1) \zeta_n^{(1)} - \tilde{h}_0^1 \operatorname{sh}\beta_1 \zeta_n^{(1)}. \end{aligned} \quad (32)$$

**ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ $\mu_1 = \mu_2$
И АСИМПТОТИКА СТАТИЧЕСКИХ КОРНЕЙ**

При совпадении только модулей сдвига имеем $H_2^1 = H_1^2 = H_3^0 = 0$, $B^0 = 0$, и уравнения (21) примут частный вид:

$$\operatorname{sh}\zeta + \frac{\tilde{h}_0^1}{2} \operatorname{sh}\beta_1 \zeta \pm \frac{\zeta \tilde{h}_1^0}{2} = \operatorname{sh}\zeta + \frac{\tilde{h}_0^1}{2} \operatorname{sh}\beta_1 \zeta \mp \frac{|\zeta \tilde{h}_1^0|}{2} = 0,$$

$$A^0 = \frac{\mu}{2} \left(1 - \frac{b_2^2}{a_2^2} \right),$$

$$\tilde{h}_0^1 = 2 \frac{b_2^2/a_2^2 - b_1^2/a_1^2}{1 - b_2^2/a_2^2},$$

$$\tilde{h}_1^0 = -2 \left(\beta_1 \frac{1 - b_1^2/a_1^2}{1 - b_2^2/a_2^2} + \beta \right),$$

а в уравнениях (22)–(25) следует положить $f(\zeta) = T_4 = \pm \zeta |\tilde{h}_1^0| + e^{-\zeta} - \tilde{h}_0^1 \operatorname{sh}\beta_1 \zeta$, $T_1 = T_2 = T_3 = 0$. Итерации (27)–(32) позволяют найти асимптотику корней ζ_n^{as} ($p \equiv 2\pi n \gg 1$) по главной части $\zeta_n^{(1)}$ в виде

$$\zeta_n^{as} = \ln p + \ln \left(|\tilde{h}_1^0| \right) + i(p \pm \pi/2). \quad (33)$$

Полагая в уравнении (22) $\zeta_n = ip + (\zeta_n^{as} - ip) + \ln \left[e^{-\zeta_n^{as} + ip} f(\zeta_n) \right]$ преобразуем его к виду

$$\zeta_n = \zeta_n^{as} + \ln \left[e^{-\zeta_n^{as}} f(\zeta_n) \right], \quad (34)$$

где $e^{-\zeta_n^{as}} f(\zeta_n) \sim (\pm ip |\tilde{h}_1^0|)^{-1} f(\zeta_n)$, и предложим модифицированную рекуррентную процедуру:

$$\zeta_n^{(\ell+1)} = \zeta_n^{as} + \ln \left[e^{-\zeta_n^{as}} f(\zeta_n^{(\ell)}) \right], \quad \zeta_n^{(0)} = \zeta_n^{as}. \quad (35)$$

Оценим невязку $\theta_n = \zeta_n - \zeta_n^{as}$ ($n \rightarrow +\infty$). Невязка удовлетворяет уравнению

$$\theta_n = g(\theta_n), \quad g(\theta_n) \equiv \ln e^{-\zeta_n^{as}} f(\zeta_n^{as} + \theta_n), \quad (36)$$

и при $p \rightarrow +\infty$ в предположении $|\theta_n| \ll 1$ выполняется оценка

$$\begin{aligned} &g(\theta_n) \\ &= \ln \left[1 + O(p^{-\beta} \theta_n) + O(p^{-\beta}) + O(p^{-1} \ln p) \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Из равенств (33)–(37) вытекают следующие утверждения.

Утверждение 1. Для любых $R > 0$, $0 < \varepsilon < \beta < 1$ при достаточно больших p каждый круг вида

$$|\theta_n| \leq R p^{-\varepsilon} \quad (38)$$

на комплексной плоскости отображается в себя вполне непрерывным оператором $g(\theta_n)$.

Тогда по теореме Шаудера [29] в круге (38) имеется неподвижная точка $\theta_n = g(\theta_n)$.

Утверждение 2. При достаточно большом p оператор $g(\theta_n)$ в круге (38) задает сжимающее отображение $|g(\theta_n)| \leq R_* |\theta_n|$, $0 < R_* < 1$.

Тогда в силу теоремы Банаха [29] рекуррентная процедура (35) является быстро сходящейся, причем к единственной неподвижной точке ζ_n в круге (38), а выражения (33) задают асимптотики статических корней ζ_n с погрешностью не выше, чем $O(p^{-\varepsilon})$, причем $\sup\{\varepsilon\} = \beta$.

Это вполне согласуется с классическими результатами для одного слоя [23–28].

**НИЗКОЧАСТОТНЫЕ АСИМПТОТИКИ
ДИСПЕРСИОННЫХ КРИВЫХ**

Вернемся теперь к дисперсионному уравнению (15) для общего случая. Функция $\Psi(k, \omega)$ в уравнении (15) на n -й дисперсионной ветви может быть представлена двояко, в частности как функция от квадратов

$$\Psi(k_n(\omega), \omega) \equiv \psi(k_n^2(\omega^2), \omega^2) = 0, \quad (39)$$

что позволяет компактно записать ряд Маклорена для $k_n^2(\omega^2)$ по степеням ω^2 :

$$k_n^2(\omega^2) = k_n^2(0) + \omega^2 \frac{d(k_n^2)}{d(\omega^2)} \Big|_{\omega=0} + \frac{\omega^4}{2!} \frac{d^2(k_n^2)}{d(\omega^2)^2} \Big|_{\omega=0} + \dots \quad (40)$$

$$\frac{d(k_n^2)}{d(\omega^2)} \Big|_{\omega=0} = - \frac{\partial \Psi / \partial (k_n^2)}{\partial \Psi / \partial (\omega^2)} \Big|_{\omega=0} = O(k_n^{-1}(0)), \quad (41)$$

$$k_n(\omega^2) = k_n(0) \times$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{\omega^2}{k_n^2(0)} \frac{d(k_n^2)}{d(\omega^2)} \Big|_{\omega=0} + \omega^2 \times o\left(\frac{\omega^2}{k_n^2(0)}\right) \right\}^{1/2}.$$

Оценка (41) означает, что при законе возрастания $|k_n(0)| = O(p)$ ($n \rightarrow +\infty$) с ростом n дисперсионные кривые будут начинаться со все более протяженного пологого участка. Используя (39)–(41) и ограничиваясь двумя слагаемыми, получаем для такого случая *низкочастотную длинноволновую асимптотику* k_n^{as} дисперсионной ветви:

$$k_n^{as}(\omega) = k_n(0) \times \left\{ 1 - \frac{\omega^2}{k_n^2(0)} \frac{\partial \Psi / \partial (k_n^2)}{\partial \Psi / \partial (\omega^2)} \Big|_{\omega=0} \right\}^{1/2} \sim k_n(\omega). \quad (42)$$

Отсюда следует *процедура расчета* дисперсионных кривых. При малой частоте ω асимптотика (42) выбирается в качестве начального приближения, и точное значение может быть рассчитано по итерационной формуле Ньютона:

$$k^{(\ell+1)} = k^{(\ell)} - \Psi(k^{(\ell)}, \omega) [\partial \Psi(k, \omega) / \partial k]^{-1} \Big|_{k=k^{(\ell)}}. \quad (43)$$

При больших ω начальное приближение на текущей частоте может быть получено, например, экстраполяцией полиномом Лагранжа по уже полученным точным значениям $k_n(\omega)$ для предыдущих частот.

Остается дополнить представление о низкочастотном спектре построением фундаментальных мод. Как было показано в [31–33], даже в случае анизотропных материалов с несимметричной укладкой упругих слоев по толщине можно построить асимптотически точные длинноволновые низкочастотные уравнения движения и соответствующие дисперсионные соотношения – квадратичного порядка для изгиба и линейными для продольных мод. В случае изотропных мате-

риалов с коэффициентами Пуассона ν_j в слоях они примут следующий простой вид

$$\omega^2 \left[\sum_j \rho_j (z_{j+1} - z_j) \right] = \quad (44)$$

$$= 2 \left[\sum_j \frac{\mu_j (z_{j+1} - z_j)}{1 - \nu_j} \right] k^2 \text{ (продольная мода),}$$

$$\omega^2 \left[\sum_j \rho_j (z_{j+1} - z_j) \right] = \quad (45)$$

$$= 2 \left[\sum_j \frac{\mu_j (z_{j+1}^3 - z_j^3)}{1 - \nu_j} \right] k^4 \text{ (изгибная мода),}$$

и при несимметричной укладке слоев к (44), (45) следует добавить условие фиксированного расположения начала отсчета по толщине [32, 33]:

$$\sum_j \frac{\mu_j (z_{j+1}^2 - z_j^2)}{1 - \nu_j} = 0. \quad (46)$$

Для расчета точных значений асимптотики (44), (45) могут использоваться вместе с уточняющей итерационной процедурой (43), с последующим применением экстраполяции начального приближения полиномом Лагранжа на больших частотах.

ЧИСЛЕННОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРИ $\mu_1 = \mu_2$

Для численного расчета выбиралось значение $\beta = 3/4$ ($3h_1 = h_2$) и параметры сред $\rho_1 = 2700 \text{ кг/м}^3$, $\rho_2 = 2170$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.26790 \times 10^{11} \text{ н/м}^2$ с коэффициентами Пуассона $\nu_1 = 0.37$ и $\nu_2 = 0.27$.

Для *статической* задачи корни ζ_n рассчитывались по формулам (35) с прекращением итераций при одновременном выполнении неравенств $|\zeta_n^{(\ell+1)} - \zeta_n^{(\ell)}| \leq 10^{-10}$ и $|\Delta_{24}^{34}(\zeta_n^{(\ell)})| \leq 10^{-12}$ (или $|\Delta_{13}^{34}(\zeta_n^{(\ell)})| \leq 10^{-12}$) соответственно.

Точные значения вещественной и мнимой части ζ_n для антисимметричных волн (A) и симметричных волн (S) показаны квадратами и кружками на рис. 1а, 1б по разные стороны от оси n при $n = 1, 2, \dots, 50$. Сплошными кривыми показаны асимптотики (33).

Как легко видеть, асимптотики (33) хорошо согласуются с полученными численными значениями. Необходимое количество итераций (35) не превышало нескольких десятков. Относительная погрешность асимптотик показана на рис. 2, и для первых корней ее значения превышают 5%. Затем относительная и абсолютная погрешности

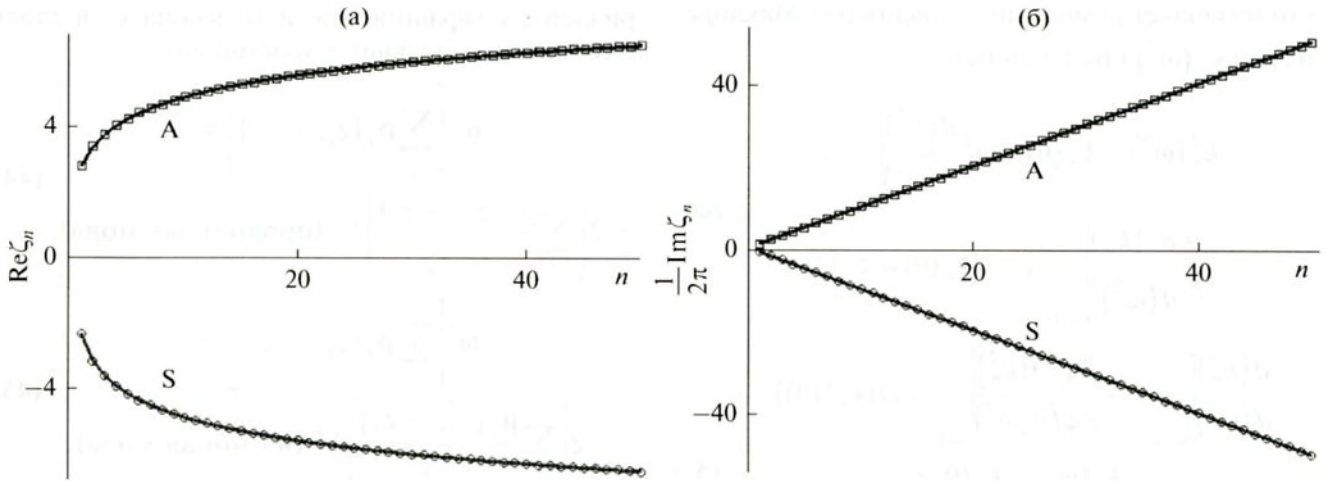


Рис. 1. Вещественная (а) и мнимая (б) части корней ζ_n и их асимптотики (сплошные кривые) изгибных (А) и симметричных (S) мод при $\beta = 3/4$ и одинаковых модулях сдвига для $n = 1, 2, \dots, 50$.

быстро убывают до сотых долей процента начиная с $n \geq 3$, и чем больше номер моды n , тем точнее аппроксимации (33).

Дополнительный контроль числа корней проводился с использованием принципа аргумента. На комплексной плоскости выбирался контур Γ в виде сторон квадрата $[0, p + \pi] \times [0i, (p + \pi)i]$, ($p = 2\pi n$) с вырезом в виде четверти окружности малого радиуса r_0 в левом нижнем углу для обхода всегда существующего корня $\zeta_0 = 0$. Пример контура Γ приведен на рис. 3, точные значения корней показаны квадратиками. Согласно нашему рассмотрению, внутри такого контура Γ находится ровно n корней изгибных (и продольных) мод. Тогда при положительном обходе контура Γ для

приращения аргумента должно выполняться равенство

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg [e^{\zeta} - f(\zeta)] = n. \quad (47)$$

Равенство (47) проверялось для изгибных и продольных мод при обходе контура Γ из исходной точки $r_0 + i0$ при различных значениях $n = 1 \dots 50$, $r_0 = 10^{-3} \dots 10^{-2}$ и давало полное совпадение.

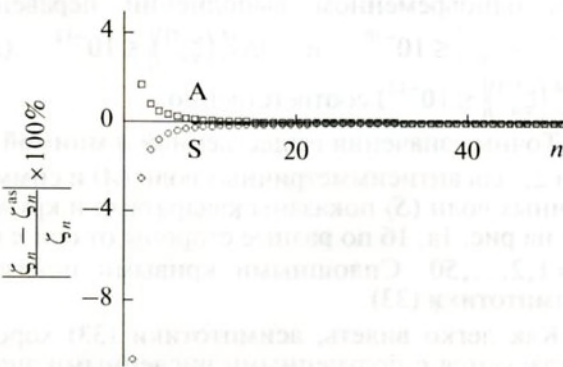


Рис. 2. Относительные погрешности асимптотик корней ζ_n для изгибных (А) и симметричных (S) мод при $\beta = 3/4$ и одинаковых модулях сдвига для $n = 1, 2, \dots, 50$.

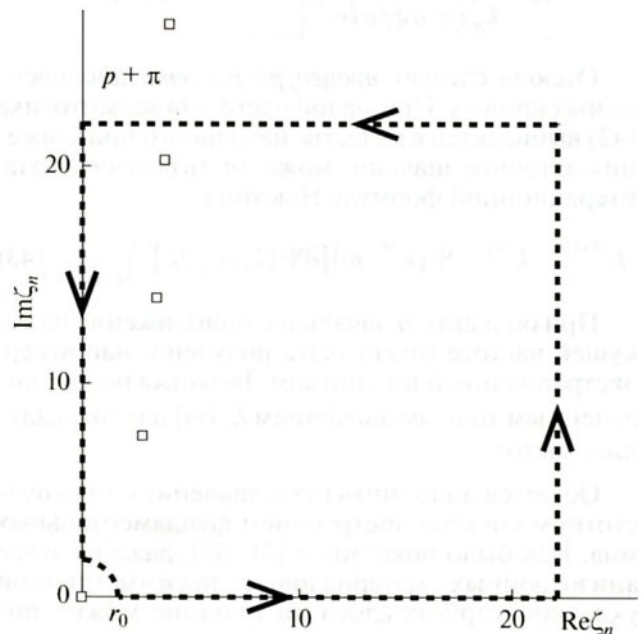


Рис. 3. Пример расположения контура и нескольких первых корней $\{\zeta_n\}$ для изгибных мод при $\beta = 3/4$ и одинаковых модулях сдвига для $p = 2\pi m$ ($m = 3$).

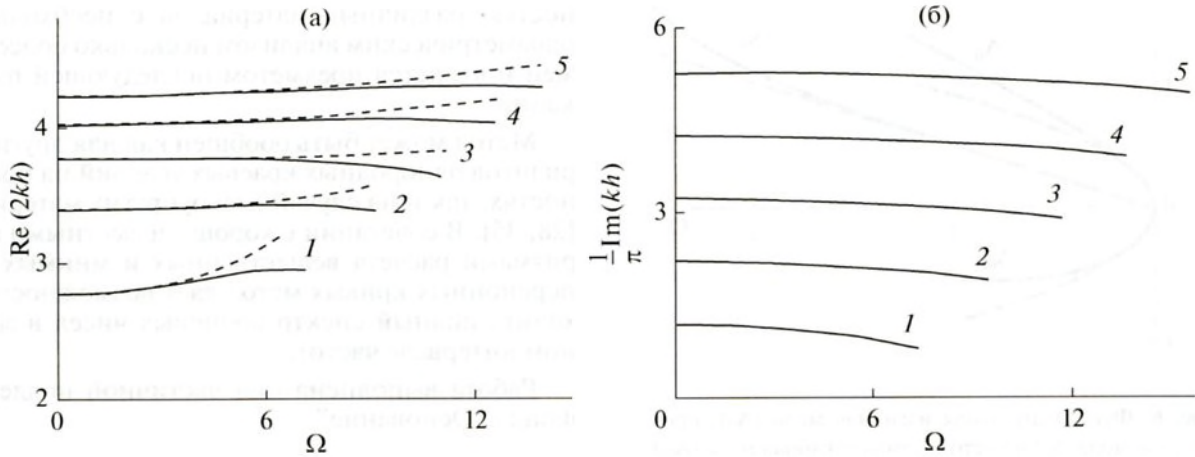


Рис. 4. Вещественная (а) и мнимая (б) части волновых чисел kh (сплошные линии) и их асимптотики (пунктир) для $\beta = 3/4$ при одинаковых модулях сдвига как функции Ω для изгибных мод при $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

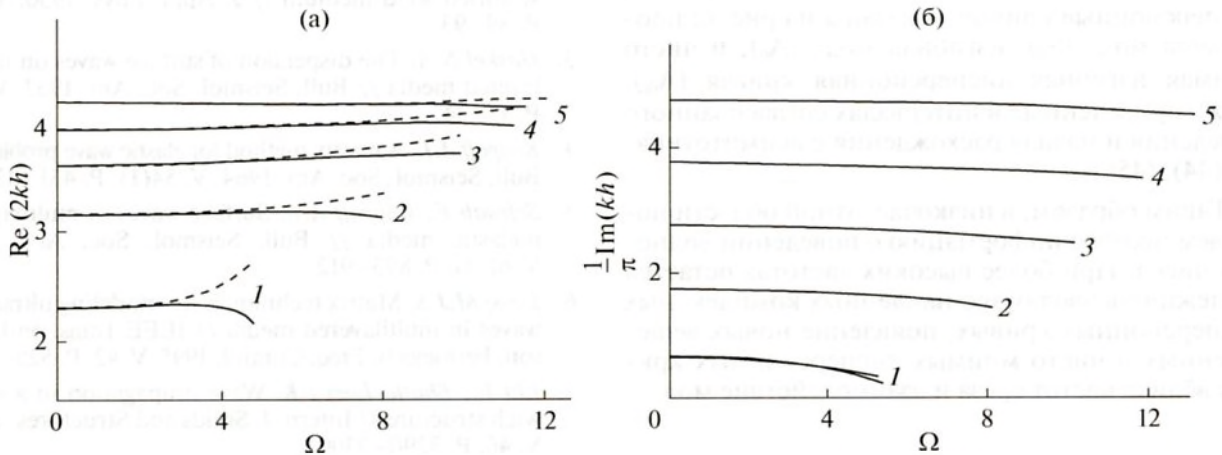


Рис. 5. Вещественная (а) и мнимая (б) части волновых чисел kh (сплошные линии) и их асимптотики (пунктир) для $\beta = 3/4$ при одинаковых модулях сдвига как функции Ω для симметричных мод при $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

В динамической задаче с теми же параметрами слоев и критериями точности рассчитывались безразмерные волновые числа $2k_n(\Omega)h$ в зависимости от безразмерной частоты $\Omega = 2\omega h/c_{S_1}$ (h – полутолщина пластины) с использованием длинноволновых асимптотик (42) и статических значений $k_n(0) = \zeta_n/2$. При больших значениях Ω начальное значение $k^{(0)}$ в итерационной формуле (43) аппроксимировалось трехточечным полиномом Лагранжа по рассчитанным значениям для предыдущих частот. Шаг по частоте не превышал 0.1.

При $\mu_1 = \mu_2$ и $\beta = 3/4$ полученные дисперсионные кривые изгибных мод для $n = 1, 2, 3, 4, 5$ приведены на рис. 4а, 4б. Кривые для симметричных мод показаны на рис. 5а, 5б. Рассчитанные кри-

вые представлены сплошными линиями вместе со своими асимптотиками (42), показанными пунктиром. Каждая кривая приведена в том интервале, где ясно видно как согласование с асимптотикой, так и начало расхождения.

Во всех случаях с ростом номера n интервал согласования с асимптотиками растет (поэтому результаты для $n > 5$ опущены). Для уточнения начальных приближений $k^{(0)}$ волновых чисел всюду в расчете было достаточно 3–5 итераций. Отметим также, что $\text{Im}(k_n(\omega))$ более точно аппроксимируется асимптотикой (42), и там, где вещественные части начинают существенно различаться, мнимые части практически совпадают с асимптотикой.

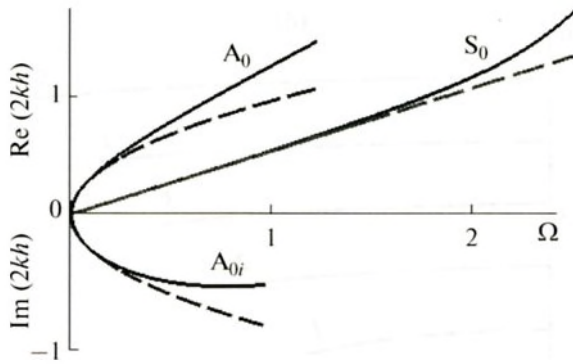


Рис. 6. Фундаментальная изгибная мода (A_0), продольная мода (S_0) и чисто мнимая изгибная мода (A_{0i}) в интервалах согласования с асимптотиками (показаны пунктиром) для $\beta = 3/4$ при одинаковых модулях сдвига.

Рассчитанные вещественные и чисто мнимые дисперсионные кривые показаны на рис. 6: продольная мода (S_0), изгибная мода (A_0), и чисто мнимая изгибная дисперсионная кривая (A_{0i}), также приведенные в интервалах согласованного поведения и начала расхождения с асимптотиками (44), (45).

Таким образом, в низкочастотной области получаем полную информацию о поведении волновых чисел. При более высоких частотах остается отслеживать эволюцию найденных комплексных дисперсионных кривых, появление новых вещественных и чисто мнимых дисперсионных кривых вблизи частот среза и взаимодействие мод.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен итерационно-асимптотический метод расчета комплексных дисперсионных кривых для собственных волн в упругих слоистых пластинах со свободными лицевыми поверхностями. Какие-либо осредненные модели, специфичные для тонких слоев [34, 35], не используются, равно как и ВКБ-аппроксимации, используемые, например, при расчете СН-спектров на низких и высоких частотах [36]. Метод позволяет находить в замкнутом виде дисперсионное уравнение и его предельный вид в статике, исследовать структурные свойства. Предлагается асимптотический подход для нахождения статических корней при больших номерах кривых и точные значения этих корней, длинноволновые асимптотики дисперсионных кривых, позволяющие затем построить точные кривые. “Ключом” здесь является асимптотика статических корней.

Приведены подробные численные результаты для случая трехслойной пластины с одинаковыми модулями сдвига материалов слоев. Случай пол-

ностью различных материалов с необходимым параметрическим анализом несколько более сложен и является предметом последующей публикации.

Метод может быть обобщен как для других вариантов однородных краевых условий на поверхностях, так и на случай вязкоупругих материалов [28, 35]. В сочетании с хорошо известными алгоритмами расчета вещественных и мнимых дисперсионных кривых метод дает возможность находить полный спектр волновых чисел в заданном интервале частот.

Работа выполнена при частичной поддержке фонда “Основание”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Achenbach J.D.* Wave propagation in elastic solids. Amsterdam: North Holland, 1973. 425 p.
2. *Thomson W.T.* Transmission of elastic waves through a stratified solid medium // *J. Appl. Phys.* 1950. V. 21. P. 89–93.
3. *Haskel N.A.* The dispersion of surface waves on multilayered media // *Bull. Seismol. Soc. Am.* 1953. V. 43. P. 17–34.
4. *Knopoff A.L.* A matrix method for elastic wave problem // *Bull. Seismol. Soc. Am.* 1964. V. 54(1). P. 431–438.
5. *Schwab F., Knopoff A.L.* Surface waves in multilayered inelastic media // *Bull. Seismol. Soc. Am.* 1971. V. 61(4). P. 893–912.
6. *Lowe M.J.S.* Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media // *IEEE Trans. on Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* 1995. V. 42. P. 525–541.
7. *Liu L., Bhattacharya K.* Wave propagation in a sandwich structure // *Intern. J. Solids and Structures.* 2009. V. 46. P. 3290–3300.
8. *Mazzotti M., Marzani A., Bartoli I., Viola E.* Guided waves dispersion analysis for prestressed viscoelastic waveguides by means of the SAFE method // *Intern. J. Solids and Structures.* 2012. V. 49. P. 2359–2372.
9. *Miyamoto T., Yasura K.* Numerical analysis on isotropic elastic waveguides by mode-matching method // *IEEE Trans. of Sonics Ultrason.* 1977. SU-24. P. 359–375.
10. *Pagneux V., Maurel A.* Determination of Lamb mode eigenvalues // *J. Acoust. Soc. Am.* 2001. V. 110(3). P. 1307–1314.
11. *Бобровницкий Ю.И.* Соотношения ортогональности для волн Лэмба // *Акуст. журн.* 1972. Т. 18. № 4. С. 513–515.
12. *Fraser W.B.* Orthogonality relations for Rayleigh–Lamb modes of vibration of a plate // *J. Acoust. Soc. Am.* 1976. V. 59. P. 215–216.
13. *Захаров Д.Д.* Соотношения обобщенной ортогональности для собственных функций в пространственных задачах динамики упругого слоя // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1988. № 6. С. 62–68.
14. *Achenbach J.D., Xu Y.* Use of elastodynamic reciprocity to analyze point-load generated axisymmetric waves in a plate // *Wave Motion.* 1998. V. 30. P. 57–67.

15. *Achenbach J.D., Xu Y.* Wave motion in an isotropic elastic layer generated by time-harmonic load of arbitrary direction // *J. Acoust. Soc. Am.* 1999. V. 106. P. 83–90.
16. *Zakharov D.D.* Orthogonality of 3D guided waves in viscoelastic laminates and far field evaluation to a local acoustic source // *Intern. J. Solids and Struct.* 2008. V. 45(6). P. 1788–1803.
17. *Baronian V., Bonnet-Ben Dhia A.-S., Lunéville E.* Transparent boundary conditions for the harmonic diffraction problem in an elastic waveguide // *J. Comp. Applied Math.* 2010. V. 234(1). P. 1945–1952.
18. *Захаров Д.Д.* Условия Дирихле–Неймана и ортогональность трехмерных собственных волн в слоистых твердых телах // *ЖВММФ.* 2010. 50(9). С. 1598–1612.
19. *Gregory R.D., Gladwell I.* Reflection of a symmetric Rayleigh–Lamb wave at the fixed or free edge of a plate // *J. of Elasticity.* 1983. V. 13. P. 185–206.
20. *Меркулов Л.Г., Рохлин С.И.* Дифракция волн Лэмба в пластине на полубесконечном разрезе // *Дефектоскопия.* 1969. № 4. С. 24–36.
21. *Меркулов Л.Г., Рохлин С.И.* Прохождение волн Лэмба через участок с расслоением // *Дефектоскопия.* 1979. № 3. С. 19–22.
22. *Пельц С.П., Шухман В.М.* Рассеяние волны Рэлея на упругой полуполосе, сцепленной на торце с упругой полуплоскостью // *ДАН СССР.* 1987. Т. 292. № 2. С. 299–303.
23. *Dougall J.* An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic plate // *Trans. of Roy. Soc. Edinburgh.* 1904. V. 41. P. 129–228.
24. *Mindlin R.D. (Onoe M., Medick M.A.)* Mathematical theory of vibrations of elastic plates. In: *Proc. 11th Annual Symp. on Frequency Control, Fort Monmouth, Army Signal Engineering Laboratories (USA).* 1957. P. 1–40.
25. *Меркулов Л.Г., Рохлин С.И., Зобнин О.П.* Расчет спектра волновых чисел для волн Лэмба в пластине // *Дефектоскопия.* 1970. № 4. С. 12–17.
26. *Меркулов Л.Г., Фирсов И.П.* Спектр возбуждения волн Лэмба в пластине // *Дефектоскопия.* 1972. № 5. С. 115–118.
27. *Златин А.Н.* О корнях некоторых трансцендентных уравнений, встречающихся в теории упругости // *Прикл. мех.* 1980. Т. 16. № 12. С. 69–74.
28. *Zakharov D.D., Castaings M., Singh D.* Numerical and asymptotic approach for evaluating complex wavenumbers of guided modes in viscoelastic plates // *J. Acoust. Soc. Am.* 2011. V. 130(2). P. 764–771.
29. *Dunford N., Schwartz J.T.* *Linear Operators: General theory.* N.Y.: Wiley – Interscience Publishers, 1958. 2592 p.
30. *Rokhlin S.I., Wang L.* Modeling of wave propagation in layered piezoelectric media by a recursive asymptotic method // *IEEE Trans. of Sonics Ultrason.* 2004. V. 51(9). P. 1060–1071.
31. *Захаров Д.Д.* Асимптотический анализ трехмерных динамических уравнений упругости для тонкой слоистой анизотропной пластины произвольной структуры // *ПММ.* 1992. Т. 59. № 5. С. 637–644.
32. *Zakharov D.D.* Asymptotic integration of 3D dynamic equations for thin multilayered anisotropic plates // *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris II.* 1992. V. 315(8). P. 915–920.
33. *Zakharov D.D., Becker W.* 2-D Problems of thin asymmetric laminates // *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik.* 2000. V. 51(4). P. 49–66.
34. *Zakharov D.D.* High-order approximate low frequency theory of elastic anisotropic lining and coating // *J. Acoust. Soc. Am.* 2011. V. 119(4). P. 1961–1970.
35. *Manconi E., Sorokin S.* On the effect of damping on dispersion curves in plates // *Intern. J. of Solids and Structures.* 2013. V. 50(6). P. 1966–1973.
36. *Shuvalov A.L., Poncet O., Kiselev A.P.* Shear horizontal waves in transversely inhomogeneous plates // *Wave Motion.* 2008. V. 45(5) P. 605–615.