

МИНИМАЛЬНЫЙ РАЗМЕР ФОКАЛЬНОГО ПЯТНА ПРИ ФОКУСИРОВКЕ ПОЛЯ В ВОЛНОВОДЕ С ПОМОЩЬЮ ВЕРТИКАЛЬНОЙ АНТЕННЫ

© 2017 г. А. Л. Вировлянский*, Ю. М. Макарова

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение “Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН”, 603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова 46

*e-mail: viro@hydro.appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 19.09.2016 г.

Рассмотрена задача об использовании вертикальной антенной решетки для фокусировки монохроматического поля в окрестность заданной точки подводного звукового канала. Обсуждается решение задачи, полученное с ограничением на начальные углы скольжения излучаемых волн. Ограничение введено для повышения устойчивости решения к влиянию случайных возмущений поля скорости звука. При этом излученное поле представляет собой волновой пучок, распространяющийся вдоль опорного луча, соединяющего центр антенны и точку фокусировки. В приближении геометрической оптики получены аналитические оценки минимально возможных размеров фокального пятна. Получен упрощенный вариант формулы для вертикального масштаба пятна, который удобен для грубых экспресс-оценок и сопоставления фокусирующих свойств волноводов с разными профилями скорости звука.

Ключевые слова: подводный звуковой канал, вертикальная антенна, фокусировка поля, волновой пучок, фокальное пятно.

DOI: 10.7868/S0320791917030121

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод обращения волнового фронта многими авторами рассматривается в качестве инструмента фокусировки монохроматического поля в заданную точку подводного звукового канала (ПЗК) [1–4]. Более общий подход сформулирован в работе В.И. Таланова [5]. С его помощью можно рассчитать амплитудно-фазовое распределение сигналов на элементах вертикальной антенной решетки для максимизации средней интенсивности поля в заданной области ПЗК.

В данной работе оба метода применены с введением дополнительного ограничения на начальные углы скольжения волн. Без этого решение обычно представляет собой суперпозицию пучков, приходящих в точку фокусировки вдоль разных лучей [6]. Даже слабые флуктуации скорости звука приводят к независимым и неконтролируемым изменениям фаз волн в пучках, что ведет к размытию фокального пятна в месте фокусировки, в котором эти пучки сходятся. Введение ограничения позволяет получить более устойчивое (по отношению к случайным возмущениям скорости звука) решение в виде одного пучка, распространяющегося вдоль некоторого опорного луча [7].

Целью работы является получение оценки минимально возможных размеров фокального пят-

на. Решение этой задачи можно найти путем небольшой модификации известных формул для масштабов фокального пятна, создаваемого антенной в свободном пространстве [4]. Однако таким образом удастся оценить размер области фокусировки лишь по порядку величины.

В данной работе предложена более точная аналитическая оценка, которая описывает сложную и немонотонную зависимость размеров фокального пятна от координат точки наблюдения, в том числе сильные вариации масштабов пятна при приближении к каустике. Этот результат получен на основе аналитического решения задачи фокусировки, которое удастся найти в приближении геометрической оптики. Основное внимание уделено анализу вертикального масштаба. Получен упрощенный вариант его оценки, позволяющий сравнивать фокусирующие свойства ПЗК с разными профилями скорости звука.

Материалы работы расположены в следующем порядке. В разд. 2 кратко изложена идея метода фокусировки Таланова, в предельном случае переходящего в традиционный метод обращения волнового фронта. Пример фокусировки поля методом обращения волнового фронта в глубоководном ПЗК приведен в разд. 3. Здесь же получено решение задачи фокусировки с введением дополнительного ограничения на углы скольжения

излучаемых волн. Аналитические оценки размеров фокального пятна получены в разд. 4, а в разд. 5 их предсказания сопоставлены с результатами прямого численного решения задачи фокусировки в плоскостойном волноводе. Итоги работы подведены в разд. 6.

2. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ О ФОКУСИРОВКЕ ПОЛЯ

Рассмотрим плоскостойкий волновод с профилем скорости звука $c(z)$, где z – вертикальная координата, равная нулю на поверхности и возрастающая с глубиной. Горизонт $z = z_d$, на котором скорость звука принимает минимальное значение, называется осью ПЗК.

Поле формируется вертикальной антенной решеткой из N акустических монополей, расположенных на глубинах z_1, \dots, z_N . Следуя работе [5], сформулируем и решим задачу об оптимальном выборе комплексных амплитуд тональных сигналов на элементах решетки (монополях) для фокусировки суммарного поля в заданный интервал глубин на заданной дистанции наблюдения.

Пользуясь методом нормальных мод [8, 9], звуковое поле на расстоянии r от антенны представим в виде

$$u(r, z) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_n \frac{\Phi_m(z_n)\Phi_m(z)}{\sqrt{k_m}} e^{ik_m r},$$

где a_n – искомые амплитуды сигналов на элементах решетки, $\Phi_m(z)$ и k_m – собственные функции и собственные числа задачи Штурма–Лиувилля, M – количество распространяющихся мод. Множитель $r^{-1/2}$, описывающий геометрическую расходимость, здесь и далее опускаем.

Введем $N \times 1$ вектор \mathbf{a} , элементами которого служат амплитуды a_n . Предполагается, что он удовлетворяет условию нормировки

$$\mathbf{a}^+ \mathbf{a} = 1, \tag{1}$$

где верхний индекс $+$ означает эрмитово сопряжение. Это условие ограничивает полную излучаемую мощность.

Средняя интенсивность поля в диапазоне глубин $z_u < z < z_d$ на дистанции наблюдения r равна

$$J = \frac{1}{z_d - z_u} \int_{z_u}^{z_d} dz |u(r, z)|^2 = \mathbf{a}^+ \mathbf{Q} \mathbf{a}, \tag{2}$$

где $\mathbf{Q} - N \times N$ эрмитова матрица с элементами

$$Q_{nn_1} = \frac{1}{z_d - z_u} \sum_{m, m_1=1}^M \frac{\Phi_m(z_n)\Phi_{m_1}(z_{n_1})}{\sqrt{k_m k_{m_1}}} \times \times e^{i(k_m - k_{m_1})r} \int_{z_u}^{z_d} dz \Phi_m(z)\Phi_{m_1}(z). \tag{3}$$

Задача максимизации средней интенсивности J сводится к выбору вектора \mathbf{a} , максимизирующего квадратичную форму в правой части (2) с ограничением (1). Решением этой классической задачи линейной алгебры является собственный вектор матрицы \mathbf{Q} , отвечающий наибольшему собственному числу [10].

При уменьшении ширины интервала $[z_u, z_d]$ до нуля мы приходим к задаче о фокусировке поля в точку. При $z_u = z_d = z$ выражение (3) переходит в

$$Q_{nn_1} = V_n^* V_{n_1}, \text{ где}$$

$$V_n = \sum_m \frac{\Phi_m(z_n)\Phi_m(z)}{\sqrt{k_m}} e^{-ik_m r}. \tag{4}$$

Таким образом, $\mathbf{Q} = \mathbf{V}\mathbf{V}^+$, где $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_N)^T$. Данная матрица имеет всего одно ненулевое собственное число, которому отвечает собственный вектор $\mathbf{a} = \mathbf{V}/|\mathbf{V}|$.

Правая часть (4) представляет собой комплексно сопряженную амплитуду поля, которую точечный источник, расположенный в точке фокусировки (r, z) , создал бы на n -м элементе антенны. Отсюда следует, что при решении задачи о фокусировке поля в заданную точку метод Таланова [5], как и должно быть, дает тот же результат, что и метод обращения волнового фронта.

3. ФОКУСИРОВКА ПОЛЯ И ФОРМИРОВАНИЕ УЗКИХ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ

Рассмотрим плоскостойкий волновод с профилем скорости звука $c(z)$, показанным в левой части рис. 1. Это так называемый профиль Манка, который часто используется для моделирования распространения звука в глубоком море [8, 11]. С использованием этой модели ПЗК будем исследовать фокусировку поля с помощью вертикальной антенной решетки длиной 200 м, работающей на частоте 500 Гц и перекрывающей интервал глубин от 0.4 до 0.6 км. Антенна имеет $N = 201$ элемент, которые расположены с шагом 1 м. В правой части рис. 1 показаны лучи, выходящие из центра антенны, то есть с глубины $z_s = 0.5$ км. Жирной линией изображен луч с начальным углом скольжения $\chi_0 = 6^\circ$. Далее этот луч мы будем называть опорным и рассматривать фокусировку в точки его траектории.

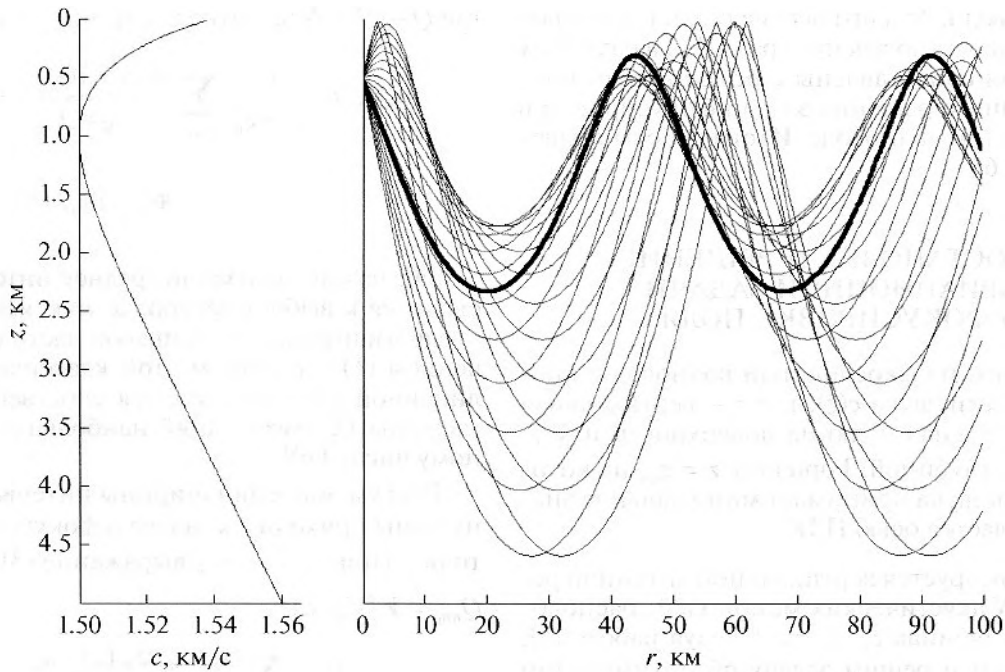


Рис. 1. Профиль Манка (слева) и лучевые траектории в волноводе с таким профилем скорости звука, выходящие из источника на глубине 500 м (справа). Жирной линией показана траектория луча с начальным углом скольжения $\chi_0 = 6^\circ$.

В верхней части рис. 2 показан результат решения задачи о фокусировке поля методом обращения волнового фронта в точку опорного луча, находящуюся на дистанции $r = 70$ км и глубине $z = 2.24$ км. Как видим, звуковое поле формируется суперпозицией двух волновых пучков, распространяющихся вдоль лучевых траекторий, соединяющих центр антенны и точку фокусировки. Одной из них является траектория опорного луча, показанная белой пунктирной линией. Такой вид решения вариационной задачи является достаточно общим [6].

Однако это решение задачи фокусировки неустойчиво по отношению к флуктуациям поля скорости звука. В присутствии относительно слабых флуктуаций, вызванных внутренними волнами, случайный набег фазы луча на дистанции порядка десятков километров на частоте 500 Гц в рассматриваемом волноводе превышает π [11]. Разные лучи, соединяющие центр антенны с точкой фокусировки, пересекают некоррелированные неоднородности, и поэтому случайные набег их фаз некоррелированы. По этой причине результат интерференции пучков, пришедших в точку фокусировки вдоль разных лучей, в присутствии флуктуаций скорости звука, вообще говоря, будет совсем не таким, как в невозмущенном волноводе. В условиях такого многолучевого распространения даже слабые флуктуации скорости звука могут заметно размыть фокальное пятно.

Более устойчивой фокусировки можно достичь путем формирования поля в виде одного пучка, распространяющегося вдоль опорного луча. Если ширина пучка меньше или порядка вертикального масштаба неоднородностей, лучи, образующие пучок, приобретают примерно одинаковые случайные набег фаз, и присутствие

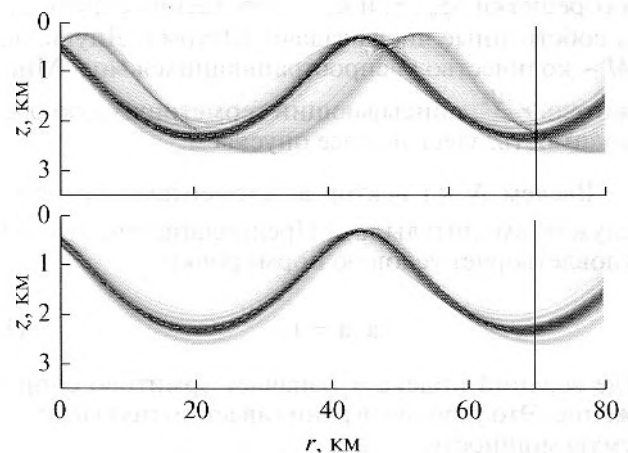


Рис. 2. Фокусировка поля в точку опорного луча на дистанции 70 км (эта дистанция выделена вертикальной линией) в волноводе с профилем Манка. Вверху: фокусировка без ограничения на углы скольжения возбуждаемых волн (многолучевое распространение). Внизу: фокусировка с ограничением на углы скольжения лучей.

неоднородностей приводит лишь к относительно малым изменениям интенсивности в вертикальном сечении пучка.

Для создания пучка процедуру, описанную в разд. 2, можно модифицировать, вводя ограничения на углы скольжения излучаемых волн, как это было сделано в работе [7]. Для того чтобы углы скольжения χ удовлетворяли условию

$$\chi_{\min} < \chi < \chi_{\max}, \quad (5)$$

при решении вариационной задачи вектор \mathbf{a} ищем в виде линейной комбинации векторов \mathbf{g}_v вида $\mathbf{g}_v = N^{-1/2}(1, e^{ikb\sin\chi_v}, e^{i2kb\sin\chi_v}, \dots, e^{i(N-1)kb\sin\chi_v})^T$, где b — расстояния между элементами антенны, v — индекс, нумерующий векторы. Элементы вектора \mathbf{g}_v представляют комплексные амплитуды поля плоской волны, распространяющейся под углом скольжения χ_v . Векторы \mathbf{g}_v ортонормированы, если углы χ_v удовлетворяют условию $Nb(\sin\chi_{v+1} - \sin\chi_v) = \lambda$, где λ — длина волны вблизи антенны. Принимая $\chi_1 = \chi_{\min}$, найдем все векторы, удовлетворяющие указанному условию, из интервала (5) и обозначим их количество v_{\max} . Решение вариационной задачи будем искать в виде $\mathbf{a} = \Gamma\boldsymbol{\alpha}$, где Γ — матрица, столбцами которой являются векторы $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{v_{\max}}$, а $\boldsymbol{\alpha}$ — новый неизвестный вектор. Теперь задача сводится к максимизации квадратичной формы $J_1 = \boldsymbol{\alpha}^+ \Gamma^+ Q \Gamma \boldsymbol{\alpha}$ с ограничением $\boldsymbol{\alpha}^+ \boldsymbol{\alpha} = 1$, которое следует из (2). Ее решением является собственный вектор матрицы $\Gamma^+ Q \Gamma$, отвечающий наибольшему собственному числу.

При фокусировке поля в точку $Q = \mathbf{V}\mathbf{V}^+$ и $J_1 = \boldsymbol{\alpha}^+ \Gamma^+ \mathbf{V}\mathbf{V}^+ \Gamma \boldsymbol{\alpha}$. Матрица $\Gamma^+ \mathbf{V}\mathbf{V}^+ \Gamma$ имеет ранг 1, и решением задачи является вектор $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{V}^+ \Gamma)^+ = \Gamma^+ \mathbf{V}$. При этом искомым вектор комплексных амплитуд поля на элементах антенны равен

$$\mathbf{a} = C \Gamma \Gamma^+ \mathbf{V}, \quad (6)$$

где C — нормирующий множитель.

В нижней части рис. 2 показан волновой пучок, полученный путем решения задачи фокусировки с ограничением на углы скольжения излучаемых волн

$$1^\circ < \chi < 11^\circ. \quad (7)$$

При этом вектор \mathbf{a} рассчитан по формуле (6). Введение ограничения позволило “вырезать” из исходного решения пучок, распространяющийся вдоль выбранного опорного луча.

4. ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ФОКУСИРОВКИ

Рассмотренные методы фокусировки фактически дают лишь численное решение задачи. В данном разделе в приближении геометрической оптики мы получим аналитическое решение той же самой задачи. Это решение, которое применимо лишь на достаточно высоких частотах, позволяет найти простые аналитические оценки размеров фокального пятна.

4.1. Описание фокусировки в приближении геометрической оптики

Рассмотрим ситуацию, когда возбуждаемое антенной поле представляет собой пучок, распространяющийся вдоль опорного луча и фокусирующийся в заданной точке траектории. Для простоты будем полагать, что излучающая антенна непрерывна и на вертикальной линии $r = 0$ она создает начальное поле $u_0(z)$. Поле в точке (r, z) равно

$$u(r, z) = \int dz_0 G(r, z, z_0) u_0(z_0), \quad (8)$$

где $G(r, z, z_0)$ — функция Грина, выражающая комплексную амплитуду поля точечного источника, расположенного в точке $(0, z_0)$. В приближении геометрической оптики вклад одного луча в функцию Грина выражается соотношением [8, 11]

$$G(r, z, z_0) = A(r, z, z_0) e^{ikS(r, z, z_0)}, \quad (9)$$

где $A(r, z, z_0)$ и $S(r, z, z_0)$ — амплитуда и эйконал луча, соединяющего точки $(0, z_0)$ и (r, z) , $k = \omega/c_a$ — волновое число, $c_a = c(z_a)$ — минимальное значение скорости звука.

Для описания лучевых траекторий воспользуемся гамильтоновым формализмом [12], в рамках которого траектория в каждой точке дистанции r характеризуется своей координатой (глубиной) z и обобщенным импульсом (далее для краткости просто импульсом) $p = n(z) \sin \chi$, где χ — угол скольжения луча, $n(z) = c_0/c(z)$ — показатель преломления. Таким образом, траектория задается функциями $z(r, z_0, p_0)$ и $p(r, z_0, p_0)$, выражающими зависимость координаты и импульса луча соответственно от дистанции r , начальной координаты z_0 и начального импульса p_0 . Эйконал луча является аналогом механического действия и удовлетворяет известным соотношениям [13]

$$\frac{\partial S(r, z, z_0)}{\partial z_0} = -p_0, \quad \frac{\partial S(r, z, z_0)}{\partial z} = p, \quad (10)$$

связывающим начальные значения импульса и координаты p_0 и z_0 с p и z — значениями этих величин на дистанции r . Из (10) следуют соотношения

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z \partial z_0} = -\frac{1}{\partial z / \partial p_0}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{\partial p / \partial z_0}{\partial z / \partial p_0}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z_0^2} = -\frac{\partial z / \partial z_0}{\partial z / \partial p_0},$$

которые понадобятся нам далее.

Нас интересует ситуация, когда антенна возбуждает волновой пучок, распространяющийся вдоль опорного луча, который соединяет центр антенны $(0, \bar{z}_0)$ и точку фокусировки (r, \bar{z}) . Полагая пучок достаточно узким, разложим эйконал S в ряд Тейлора вблизи точек $z = \bar{z}$ и $z_0 = \bar{z}_0$ и, рассматривая разности $(z - \bar{z})$ и $(z_0 - \bar{z}_0)$ как малые величины, отбросим все слагаемые выше второго порядка малости. Пользуясь (10) и (11), находим

$$S(r, z, z_0) = \bar{S} + p(z - \bar{z}) - p_0(z_0 - \bar{z}_0) - \frac{1}{\partial z / \partial p_0}(z - \bar{z})(z_0 - \bar{z}_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial p / \partial z_0}{\partial z / \partial p_0}(z - \bar{z})^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial z / \partial z_0}{\partial z / \partial p_0}(z_0 - \bar{z}_0)^2, \quad (12)$$

где $\bar{S} = S(r, \bar{z}, \bar{z}_0)$, \bar{p}_0 — начальный импульс опорного луча. В данной формуле, как и во всех последующих выражениях, значения p и производных p и z по начальным условиям взяты в конечной точке опорного луча.

Согласно (8), (9) и (12), для формирования пучка, фокусирующегося в точке (r, \bar{z}) , начальное поле следует выбрать в виде

$$u_0(z_0) = U_0(z_0) \exp \left[ik \bar{p}_0(z_0 - \bar{z}_0) - \frac{ik}{2} \frac{\partial z / \partial z_0}{\partial z / \partial p_0}(z_0 - \bar{z}_0)^2 \right], \quad (13)$$

где $U_0(z_0)$ — плавная огибающая, спадающая до нуля вне некоторой окрестности точки \bar{z}_0 , размер которой велик по сравнению с длиной волны, но мал по сравнению с расстоянием между горизонтами поворота опорного луча. При этом сигналы, излученные из всех точек (элементов антенны) внутри данного интервала, в точке фокусировки сложатся в фазе. Такой выбор начального поля несколько иным способом обоснован в работах [6, 14]. В них показано, что при

$$U_0(z_0) = \frac{1}{\sigma} \exp \left(-\frac{\pi(z_0 - \bar{z}_0)^2}{\sigma^2} \right) \quad (14)$$

излученный пучок будет иметь наименьшую среднюю по трассе ширину среди всех пучков с

начальной шириной σ , распространяющихся вдоль данного опорного луча. Подставляя (9) в (8), пользуясь (12)–(14) и полагая, что величина амплитудного множителя A мало меняется на ширине пучка, после вычисления гауссова интеграла получаем выражение для поля в окрестности точки фокусировки (r, \bar{z}) :

$$u(r, z) = A e^{i\Phi} \exp \left[-\frac{\sigma^2 k^2 (z - \bar{z})^2}{2\pi(\partial z / \partial p_0)^2} \right], \quad (15)$$

$$\text{где } \Phi = k \left[\bar{S} + p(z - \bar{z}) + \frac{1}{2} \frac{\partial p / \partial z_0}{\partial z / \partial p_0} (z - \bar{z})^2 \right].$$

4.2. Оценка вертикального размера фокального пятна

В ситуации, когда зависимость интенсивности поля $|u|^2$ от глубины описывается гладкой функцией, принимающей максимальное значение в точке фокусировки (r, \bar{z}) , вертикальный размер фокального пятна Δz естественно определить соотношением

$$\Delta z = \frac{1}{|u(r, \bar{z})|^2} \int_0^H dz |u(r, z)|^2, \quad (16)$$

где H — глубина волновода. Подставляя сюда (15), находим

$$\Delta z = \lambda \frac{|\partial z / \partial p_0|}{2\sigma}, \quad (17)$$

где $\lambda = 2\pi/k$ — длина волны.

Этот результат получен для начального поля, заданного соотношениями (13) и (14). Размер апертуры антенны при этом формально не ограничен. Тем не менее, естественно ожидать, что формула (17) дает правильную по порядку величины оценку минимально возможного размера фокального пятна при использовании антенны с конечной длиной порядка σ . Получение более точной оценки для антенны заданной длины требует некоторого дополнительного анализа.

Обратимся к случаю свободного пространства. Для простоты будем рассматривать малоугловое приближение, в котором функция Грина имеет вид

$$G(r, z, z_0) = \sqrt{\frac{k}{2\pi i r}} \exp \left(\frac{ik(z - z_0)^2}{2r} \right),$$

а траектория луча задается выражением $z = z_0 + p_0 r$, из которого следует, что $\partial z / \partial p_0 = r$. Для сокращения выкладок рассмотрим излуче-

ние пучка вдоль оси r , то есть положим $\tilde{p}_0 = 0$ и $\tilde{z}_0 = 0$. В этом случае (13) принимает вид

$$u_0(z) = \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ -\frac{\pi z^2}{2\sigma^2} - i \frac{kz_0^2}{2r} \right\},$$

(15) и (17) переходят в

$$u(r, z) = \exp \left[ik \frac{z^2}{r} - \frac{\sigma^2 k^2}{2\pi r^2} z^2 \right] \quad (18)$$

и

$$\Delta z = \frac{\lambda r}{2\sigma} \quad (19)$$

соответственно.

Последнее соотношение сравним с результатом расчета ширины фокального пятна в свободном пространстве при использовании антенны с конечной апертурой размера a . При этом (18) переходит в

$$\begin{aligned} u(r, z) &= e^{ikz^2/r} \int_{-a/2}^{a/2} dz_0 \exp \left(-ik \frac{zz_0}{r} \right) = \\ &= e^{ikz^2/r} \frac{\sin [kaz/(2r)]}{kaz/(2r)}. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (16), находим

$$\Delta z = \frac{\lambda r}{a} \quad (20)$$

Сравнивая (19) и (20), заключаем, что вертикальный размер фокального пятна антенны длины a равен размеру пятна антенны, создающей начальное поле, заданное (13) и (14) с $\sigma = a/2$.

Формулы для описания фокального пятна в волноводе, приведенные выше, аналогичны формулам в свободном пространстве с заменой r на $|\partial z / \partial p_0|$. Поэтому для оценки вертикального размера фокального пятна в волноводе можно использовать формулу

$$\Delta z = \frac{\lambda}{a} \left| \frac{\partial z}{\partial p_0} \right|. \quad (21)$$

Отметим, что при фиксированном z_0 имеет место равенство $\partial z / \partial p_0 = (\partial p_0 / \partial z)^{-1}$. Воспользуемся следующим из (10) равенством $\partial p_0 / \partial z = -\partial p / \partial z_0$ и отметим, что разброс импульсов лучей, соединяющих разные точки (элементы) антенны с точкой фокусировки, примерно равен $\Delta p = |\partial p / \partial z_0| a$. В малоугловом приближении $\Delta p \cong \Delta \chi$, где $\Delta \chi$ — разброс углов прихода лучей в точку фокусировки. С учетом сказанного (21) переходит в

$$\Delta z = \frac{\lambda}{\Delta \chi} \quad (22)$$

4.3. Упрощенная оценка вертикального размера фокального пятна на оси ПЗК

Оценка вертикального размера фокального пятна (21) выражается через производную $\partial z / \partial p_0$, которая является сложной функцией координат точки фокусировки. В данном разделе мы получим грубую оценку этой производной, которая, однако, позволяет судить о зависимости размера фокального пятна от дистанции вдали от каустик и удобна для сопоставления фокусирующих свойств волноводов с разными профилями скорости звука.

Начнем с очевидного равенства

$$\frac{\partial z}{\partial p_0} = -\operatorname{tg} \chi \frac{\partial r}{\partial p_0}, \quad (23)$$

где $\partial r / \partial p_0$ — производная горизонтальной координаты лучевой траектории по начальному импульсу при фиксированной глубине конечной точки траектории z . Если траектория луча имеет ровно N циклов, то $r = ND$, где D — длина цикла луча. Рассматривая D как функцию p_0 , получаем $\partial r / \partial p_0 = N \partial D / \partial p_0$. Формально заменяя N на r/D , представляем данную формулу в виде

$$\frac{\partial r}{\partial p_0} = \frac{r}{D} \frac{dD}{dp_0} \quad (24)$$

При $r \gg D$ это выражение дает правильную приближенную оценку производной $\partial r / \partial p_0$ вдали от каустик. Если центр антенны \tilde{z}_0 и точка фокусировки расположены вблизи оси ПЗК, этой оценкой можно пользоваться и на дистанциях r порядка длины цикла D . Из (21), (23) и (24) следует

$$\Delta z = \frac{\lambda |\operatorname{tg} \chi|}{a} \left| \frac{r}{D} \frac{dD}{dp_0} \right|. \quad (25)$$

На практике вместо функции $D(p_0)$ удобнее пользоваться функцией $D(\chi_a)$, выражающей зависимость длины цикла от угла χ_a , под которым луч пересекает ось ПЗК $z = z_a$, то есть горизонт, на котором величина $c(z)$ минимальна. Пользуясь законом Снеллиуса, согласно которому отношение $\cos \chi / c(z)$ сохраняется вдоль лучевой траектории, преобразуем формулу (25) к виду

$$\Delta z = \frac{\lambda r c(z) c(\tilde{z}_0)}{a c_a^2} \frac{\sin \chi \sin \chi_0}{\cos^2 \chi_a \sin \chi_a} \frac{1}{D} \left| \frac{dD}{d\chi_a} \right|, \quad (26)$$

где z — глубина точки фокусировки. Углы χ и χ_0 выражаются через χ_a с помощью закона Снеллиуса.

Если центр антенны и точка фокусировки расположены около оси ПЗК, (26) переходит в

$$\Delta z = \frac{\lambda r}{a} B(\chi_a), \quad B(\chi_a) = \frac{\sin \chi_a}{\cos^2 \chi_a} \frac{1}{D} \left| \frac{dD}{d\chi_a} \right|. \quad (27)$$

Функция $B(\chi_a)$ количественно характеризует фокусирующие свойства волновода. В качестве примера на рис. 3 представлена эта функция, рассчитанная для ПЗК с кардинально различающимися профилями скорости звука. Это ПЗК с профилем Манка, ПЗК с линейным профилем скорости звука $c(z) = c_0 + \gamma z$, $c_0 = 1.46$ км/с, $\gamma = 0.0136$ 1/с, и ПЗК с постоянной скоростью звука и отражающими границами (изоскоростной волновод). В последнем примере для описания поля можно воспользоваться методом мнимых источников, и поэтому для Δz получается такая же оценка, как и в свободном пространстве. В ПЗК с линейным профилем и в изоскоростном волноводе функция $B(\chi_a)$ вычисляется аналитически, и в обоих случаях получаем одинаковый результат $B(\chi_a) = \cos^{-3} \chi_a$. Разница заключается в том, что в волноводе с линейным профилем эта формула описывает фокусировку около поверхности воды, а в изоскоростном волноводе она применима на любых глубинах. Как видим, при одинаковых значениях несущей частоты, длины трассы и размера антенны минимальный размер фокального пятна вблизи оси ПЗК с профилем Манка будет существенно меньше, чем в двух других примерах.

4.4. Волновой параметр и горизонтальный размер фокального пятна

Обратимся к оценке горизонтального размера фокального пятна. При анализе этого вопроса ключевую роль играет волновой параметр

$$P = \frac{1}{a} \sqrt{\lambda R_c}, \tag{28}$$

где R_c – радиус кривизны линии постоянной фазы поля, которое создал бы на апертуре антенны точечный источник, помещенный в точке фокусировки. В маломугловом приближении

$$R_c = \left| \frac{\partial z / \partial p_0}{\partial z / \partial z_0} \right|.$$

Формула (28) переходит в известное выражение для волнового параметра в свободном пространстве, где $R_c = r$.

Интервал дистанций, на которых $P \ll 1$, называется ближней зоной. В этой области модуль второго слагаемого в показателе экспоненты в (13) принимает большие по сравнению с π значения. При этом фазы сигналов, излученных элементами антенны с разных глубин z_0 , в точке фокусировки (r, \bar{z}) складываются в фазе. Однако при удалении от этой точки фокусировка разрушается и амплитуда поля уменьшается.

Оценим расстояние Δr , на котором происходит разрушение фокусировки. Полагаем, что вол-

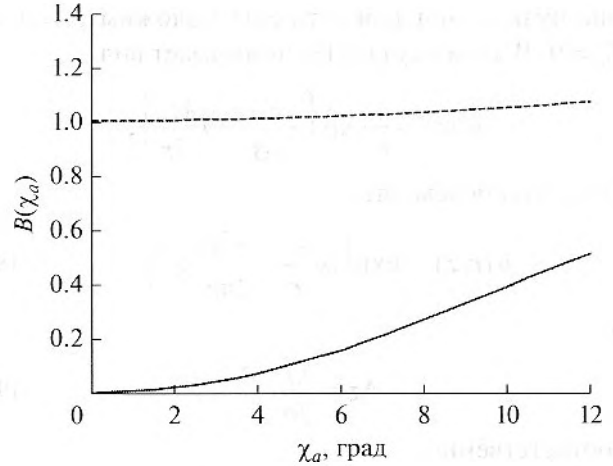


Рис. 3. Функция $B(\chi_a)$ в трех волноводах. Сплошная линия: ПЗК профилем Манка. Пунктир: одинаковый результат, который получается для ПЗК с линейным профилем скорости звука и изоскоростного ПЗК.

ны распространяются под малыми углами скольжения и глубина и импульс опорного луча на дистанции $r + \Delta r$ мало отличаются от значений этих параметров на дистанции r . Вновь пользуясь (8), (9) и (12)–(14), получаем приближенное выражение для комплексной амплитуды поля в точке $(r + \Delta r, \bar{z})$ при условии, что фокусировка осуществляется в точку (r, \bar{z}) :

$$u(r + \Delta r, \bar{z}) \cong A(r + \Delta r, \bar{z}, \bar{z}_0) e^{i\psi} \times \int dz_0 \exp \left[\frac{ik}{2} Y (z_0 - \bar{z}_0)^2 - \frac{\pi (z_0 - \bar{z}_0)^2}{\sigma^2} \right],$$

где

$$Y = \left. \frac{\partial z / \partial z_0}{\partial z / \partial p_0} \right|_{r+\Delta r} - \left. \frac{\partial z / \partial z_0}{\partial z / \partial p_0} \right|_r \cong \Delta r \frac{d}{dr} \frac{\partial z / \partial z_0}{\partial z / \partial p_0}, \tag{29}$$

ψ – несущественный для дальнейшего фазовый множитель. При вычислении производной по r в правой части (29) воспользуемся маломугловым приближением, в котором

$$\frac{dz}{dr} = p, \quad \frac{d}{dr} \frac{\partial z}{\partial p_0} = \frac{\partial p}{\partial p_0}, \quad \frac{d}{dr} \frac{\partial z}{\partial z_0} = \frac{\partial p}{\partial z_0},$$

и теоремой Лиувилля $\frac{\partial p}{\partial p_0} \frac{\partial z}{\partial z_0} - \frac{\partial z}{\partial p_0} \frac{\partial p}{\partial z_0} = 1$ [13]. Получаем

$$Y \cong -\Delta r \left(\frac{\partial z}{\partial p_0} \right)^{-2}. \tag{30}$$

В точке фокусировки (при $\Delta r = 0$) Y обращается в нуль. Фокусировка разрушается при Δr , отве-

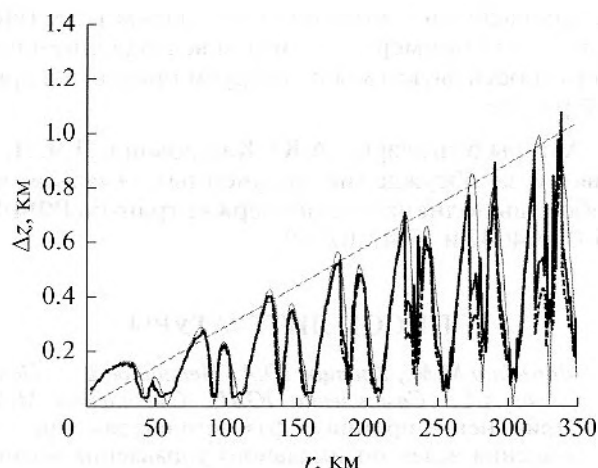


Рис. 4. Зависимость вертикального размера фокального пятна от дистанции при фокусировке поля в волноводе с профилем Манка в точки опорного луча. Тонкая сплошная линия: оценка по формуле (21). Жирная сплошная линия: размер пятна при фокусировке методом обращения волнового фронта. Жирная пунктирная линия: размер пятна при фокусировке методом Таланова в интервал глубин шириной 40 м. Тонкая пунктирная линия (наклонная прямая): аналитическая оценка по формуле (27).

чающем условии $kY\sigma^2/2 = \pi$. Пользуясь (30) и заменяя σ на $a/2$, получаем

$$\Delta r = 4\lambda \frac{|\partial z / \partial p_0|^2}{a^2}. \quad (31)$$

Найденная таким образом величина Δr является оценкой полуширины горизонтального размера фокального пятна для антенны размером a . По аналогии с тем, как формула (21) была преобразована в (22), перепишем (31) в виде

$$\Delta r = \frac{4\lambda}{(\Delta\chi)^2}.$$

В дальней зоне, то есть при условии $P \gg 1$, эйконалы всех лучей, соединяющих элементы антенны с точкой наблюдения, примерно одинаковы. Аналогичным образом дело обстоит в соседних точках. При этом второе слагаемое в показателе экспоненты в (13), которое в ближней зоне «обеспечивает» фокусировку, мало по сравнению с π . Если точка (r, \bar{z}) находится в дальней зоне, то проходящие через нее волны имеют квазиплоские фазовые фронты. Пучок не сужается около (r, \bar{z}) , и поэтому говорить о продольном (горизонтальном) масштабе фокального пятна в дальней зоне не имеет смысла. В отличие от свободного пространства, в волноводе величина P является немонотонной функцией дистанции, и при движении вдоль опорного луча дальние и ближние зоны чередуются. Окрестности каустик, на кото-

рых производная $\partial z / \partial p_0$ обращается в нуль, всегда являются ближними зонами.

5. СОПОСТАВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ ШИРИНЫ ФОКАЛЬНОГО ПЯТНА С РЕЗУЛЬТАТАМИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В этом разделе приведены результаты проверки точности аналитической оценки вертикального размера фокального пятна (21).

На рис. 4 показаны результаты расчета величины Δz в волноводе с профилем Манка. Фокусировка выполнена с ограничением начальных углов скольжения лучей внутри интервала (7). Точки фокусировки r_n , $n = 1, \dots, 348$, выбирались на траектории опорного луча с шагом по дистанции 1 км от $r_1 = 3$ км до $r_{348} = 350$ км. При $r = r_n$ поле фокусировалось на горизонте \bar{z}_n — глубине опорного луча на данной дистанции. С помощью модовой программы на каждой дистанции r_n по формуле (1) вычислялось поле $u(r_n, z)$. Расчеты показывают, что амплитуда поля внутри фокального пятна обычно не является плавной функцией глубины, и положение основного максимума несколько отличается от \bar{z}_n . Поэтому эффективную ширину пятна Δz мы находили из соотношения

$$\int_{\bar{z}_n - \Delta z / 2}^{\bar{z}_n + \Delta z / 2} dz |u(r_n, z)|^2 = 0.79 \int_0^H dz |u(r_n, z)|^2. \quad (32)$$

Множитель перед интегралом в правой части подобран таким образом, что для $u(r_n, z)$ вида $C \exp(-(z - \bar{z}_n)^2 / b^2)$, где C и b — действительные постоянные, (32) дает то же Δz , что и (16).

Жирной сплошной линией показаны значения Δz при фокусировке поля обращением волнового фронта, когда вектор амплитуд поля на элементах антенны \mathbf{a} задается формулой (6). Жирная пунктирная линия соединяет оценки Δz , полученные при фокусировке поля в интервал глубин шириной 40 м с центром в точке \bar{z}_n . При этом вектор \mathbf{a} находится методом Таланова, описанным в разд. 2 и 3. Тонкая сплошная линия соединяет оценки Δz в точках r_n , рассчитанные по формуле (21). Тонкая пунктирная линия (наклонная прямая) представляет аналитическую оценку Δz по формуле (27).

Как видим, все представленные на рис. 4 оценки неплохо согласуются между собой, и (27) дает правильную оценку локальных максимумов зависимости вертикальных размеров фокального пятна от расстояния. Эти максимумы наблюдаются на тех дистанциях, на которых опорный луч пересекает ось ПЗК.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кратко суммируя сказанное, подведем итоги работы.

Рассмотрена фокусировка звукового поля в плоскостойком ПЗК с помощью вертикальной антенной решетки с использованием традиционного метода обращения волнового фронта и метода фокусировки поля в заданную область волновода, предложенного в работе [5]. Оба метода применяются с введением ограничения на начальные углы скольжения излучаемых волн [7]. При этом решение задачи представляет собой относительно узкий пучок, распространяющийся вдоль некоторого опорного луча, соединяющего центр антенны и точку фокусировки.

Основным результатом работы является аналитическая оценка вертикального масштаба фокального пятна (21). Несмотря на то, что она получена для ситуации, когда фокусировка выполняется методом обращения волнового фронта, численный пример, рассмотренный в разд. 5, показывает, что данная формула применима и в том случае, когда поле фокусируется в небольшой интервал глубин. Более того, в последнем случае фокальное пятно оказывается даже несколько более компактным и формула (21) более точно предсказывает его размер.

Анализ зависимости минимального размера фокального пятна от параметров задачи существенно упрощается путем перехода от (21) к (27). Последняя формула дает оценку Δz на оси ПЗК, где вертикальный масштаб фокального пятна максимален. Согласно (27), зависимость размера пятна от параметров волновода определяется функцией $V(\chi_a)$, которая в свою очередь определяется зависимостью длины цикла луча от угла его скольжения на оси ПЗК. Вычисление функций $V(\chi_a)$ удобно для сопоставления фокусирующих свойств ПЗК с разными профилями скорости звука. В разд. 4.3 приведен пример такого сопоставления.

Обратим внимание на тот факт, что при выводе формулы (21) фактически не используется предположение о плоскостойкости среды, и поэтому она применима в переменном по трассе волноводе.

Результаты работы получены для регулярного волновода с известными параметрами. Важный вопрос о влиянии неизбежных неточностей модели среды на применимость полученных оценок выходит за рамки этой статьи. Формула (21) дает лишь оценку снизу предельно достижимой ширины фокального пятна. Исследование дополнительного уширения пятна из-за рассогласования

между расчетной моделью и реальным ПЗК (вызванное, например, случайным возмущением поля скорости звука) мы планируем провести в другой работе.

Авторы благодарны А.Ю. Казаровой и Л.Я. Любавину за обсуждение полученных результатов. Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 15-02-04042 и 15-42-02390.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Даргейко М.М., Кравцов Ю.А., Петников В.Г., Петросян А.С., Самоilenко Ю.И., Славинский М.М. Применение принципа фазового сопряжения для решения задач оптимального управления волновыми полями в неоднородных средах // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. № 6. С. 746–752.
2. Dowling D.R., Jackson D.R. Narrow-band performance of phase-conjugate arrays in dynamic random media // J. Acoust. Soc. Am. 1992. V. 91. № 6. P. 3257–3277.
3. Зверев В.А., Коротин П.И., Стромков А.А. Численное временное обращение волн // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 1. С. 69–76.
4. Kim S., Edelmann G.F., Kuperman W.A., Hodgkiss W.S., Song H.C. Spatial resolution of time-reversal arrays in shallow water // J. Acoust. Soc. Am. 2001. V. 110. № 2. P. 820–829.
5. Таланов В.И. О синтезе антенн в многомодовых волноводах // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 7. С. 872–879.
6. Virovlyansky A.L., Kazarova A.Yu. The use of vertical antenna in underwater acoustic waveguides for forming wave beams with minimal divergence // Acta Acustica united with Acustica. 2014. V. 100. P. 235–243.
7. Артельный В.В., Артельный П.В., Вировлянский А.Л., Казарова А.Ю., Коротин П.И. Фокусировка поля в гидроакустическом волноводе в заданный интервал глубин // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 4. С. 477–483.
8. Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П. Теоретические основы акустики океана. М.: Наука, 2007. 370 с.
9. Jensen F.B., Kuperman W.A., Porter M.B., Schmidt H. Computational Ocean Acoustics. New York: Springer, 2011.
10. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
11. Flatte S.M., Dashen R., Munk W.M., Watson K.M., Zakhariassen F. Sound transmission through a fluctuating ocean. London: Cambridge U.P., 1979.
12. Makarov D., Prants S., Virovlyansky A., Zaslavsky G. Ray and wave chaos in ocean acoustics. New Jersey: World Scientific, 2010. 389 p.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.
14. Вировлянский А.Л., Нефедова Д.В. Формирование узкого волнового пучка в подводном звуковом канале с помощью вертикальной антенны // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 1. С. 63–69.