

УДК 534.222

ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНОГО ЭЛЕМЕНТА

© 2017 г. С. Г. Михайлов^{a, b}, О. В. Руденко^{a, b, c, d, *}^aМосковский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы^bИнститут общей физики им. А.М. Прохорова РАН^cИнститут физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН^dBlekinge Institute of Technology, Karlskrona, Sweden

*e-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 30.09.2016 г.

Экспериментально исследовано поведение нелинейного элемента, представляющего собой легкую пластинку, прижатую к отверстию в полости акустического резонатора. Измерения осцилляций поля в полости и вне ее показали, что при больших амплитудах они становятся существенно негармоническими. Временные зависимости смещения пластинки при росте амплитуды возбуждающего напряжения демонстрируют постепенное изменение формы колебаний от гармонической к однополупериодной. В полости появляется постоянная составляющая — разрежение либо истечение среды через отверстие. Построена теория нелинейных колебаний пластинки с учетом ее различной упругой реакции на сжатие и разрежение с учетом монополюсного излучения пластиной малых волновых размеров или излучения ею плоской волны. Рассчитаны амплитуды гармоник. Решена нелинейная задача о воздействии на пластину низкочастотного стационарного шума. Получены выражения для корреляционной функции и средней мощности на выходе при задании на входе нормального случайного процесса.

Ключевые слова: искусственный нелинейный элемент, акустический диод, генерация гармоник, поток среды, модульная нелинейность, шум, потери средней мощности.

DOI: 10.7868/S0320791917030108

Как известно, для генерации новых частот акустического спектра среда должна быть нелинейной. Однако для реализации взаимодействий между компонентами спектра обычно требуются большие интенсивности и, соответственно, мощные источники когерентного излучения. Чтобы упростить постановку эксперимента, используют среды с высокими значениями нелинейных модулей упругости, например, жидкости с пузырьками газа и структурно-неоднородные твердые тела. Ниже рассмотрена еще одна возможность — внедрение в среду искусственных элементов с “модульной” нелинейностью. Такие элементы могут оказаться полезными при создании нелинейных экранов, описанных в работах [1–3].

Эксперимент с одиночным элементом проводился на установке, схема которой показана на рис. 1. Установка содержит электродинамический излучатель 1, герметично закрепленный на одном из торцов металлической цилиндрической трубы 2. На другом торце находится узкий патрубок, имеющий диаметр около 4 см. С внешней стороны к патрубку прилегает легкая пластинка (мембрана) 3, полностью перекрывающая его сечение. Таким образом, внутри полости 2 с помо-

щью излучателя 1 может создаваться переменное давление $p_i(t)$. Патрубок выполняет также роль механического трансформатора, позволяющего существенно увеличить скорость перемещения мембраны.

Целью эксперимента является изучение действия переменного давления на нелинейный элемент, который образован прижатой пластинкой. Из описания конструкции на рис. 1 очевидно, что под действием положительного давления пластинка может перемещаться вверх, на некоторое время приоткрывать патрубок и делать возможным продув воздуха через образовавшуюся щель. Под действием отрицательного давления пластинка будет прижиматься к патрубку и перекрывать связь внутренней полости с внешним пространством. Таким образом, действие пластинки подобно полупроводниковому диоду, пропускающему одну из двух полувольт переменного напряжения.

Контрольные микрофоны располагались как внутри трубы, так и вне ее, вблизи оси, на расстоянии около 50 см от пластинки. Кроме того, в состав установки входил U-образный водяной ма-

нометр для измерения разности давлений внутри полости и снаружи. Для возбуждения излучателя на него подавалось гармоническое напряжение различной амплитуды и частоты. Сигналы от микрофонов преобразовывались в цифровую форму и вводились в компьютер для последующей обработки.

В ходе предварительных экспериментов было установлено, что резонансная частота системы как целого составляла приблизительно 160 Гц. При резонансе наблюдался максимальный ход пластинки (около 3–4 мм) и достигалось максимальное разрежение внутри полости. Однако самые наглядные результаты получены на более низкой частоте – 70 Гц. На рис. 2 приведены совмещенные осциллограммы пульсаций давления внутри полости при различных значениях возбуждающего напряжения. При малых амплитудах напряжения закон изменения давления во времени близок к гармоническому. По мере увеличения амплитуды проявляется уплощение вершины положительной полуволны, которое объясняется открытием пластинки и свободным выходом воздуха из полости.

Форма пульсаций внешнего давления представлена на рис. 3. Ясно, что делать выводы на основании формы наблюдаемого процесса затруднительно. Поэтому полезно вспомнить, что давление p пропорционально производной по времени от объемной скорости источника V [4]: $p \sim \partial V / \partial t$.

Для источника малого волнового размера, имеющего площадь S , который и представляет собой колеблющаяся пластинка, можно положить $V = \dot{X}S$, где \dot{X} – средняя пульсационная скорость пластинки. Отсюда следует, что давление в излучаемой волне пропорционально среднему по поверхности ускорению a излучающей поверхности, $p \sim aS$. Так как исходные соображения о функционировании нелинейного элемента были сформулированы в терминах смещения, то и анализ наблюдаемого процесса удобнее проводить в терминах среднего по поверхности пластинки смещения X , пульсационная составляющая которого может быть найдена путем двукратного интегрирования по времени. Полное смещение равно сумме $X = X_0 + X'$, где X_0 – постоянная составляющая. Величина X_0 не может быть рассчитана по данным для ускорения, но может быть оценена из условия $X \geq 0$, поскольку пластинка (если не учитывать ее возможного прогиба и конечной упругости пружин на рис. 1) в условиях описываемого эксперимента не может перемещаться ниже поверхности, на которую опирается.

На рис. 3 представлен результат расчета смещения пластинки, показывающий, что нелинейный элемент представляет собой практически

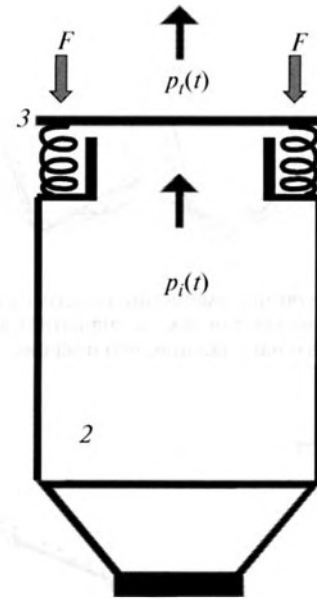


Рис. 1. Схема установки.

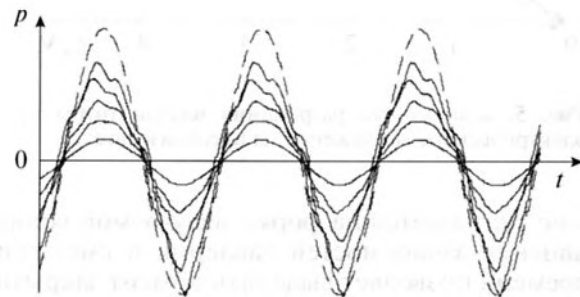


Рис. 2. Осцилляции давления внутри трубы при различных значениях амплитуды возбуждающего напряжения (1–5 В) – сплошные линии. Гармонический сигнал на частоте возбуждения показан штриховой линией.

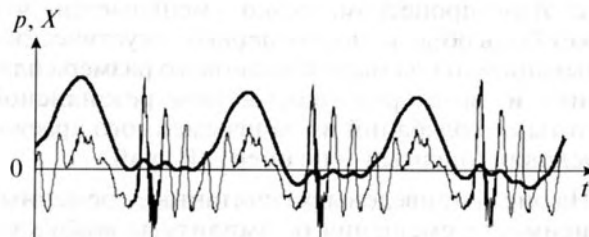


Рис. 3. Внешнее давление p (тонкая линия) и рассчитанное смещение X (утолщенная линия).

идеальный акустический диод, работающий с углом отсечки около 90° . Полученные зависимости указывают также на то, что прохождение воздуха через узкую щель, образующуюся под пластинкой в течение части периода колебаний, незначи-

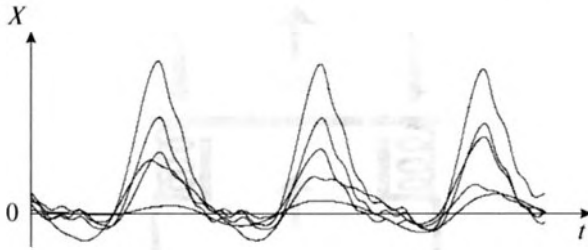


Рис. 4. Рассчитанное смещение пластины (в относительных единицах) при тех же значениях амплитуды возбуждающего напряжения, что и на рис. 2.

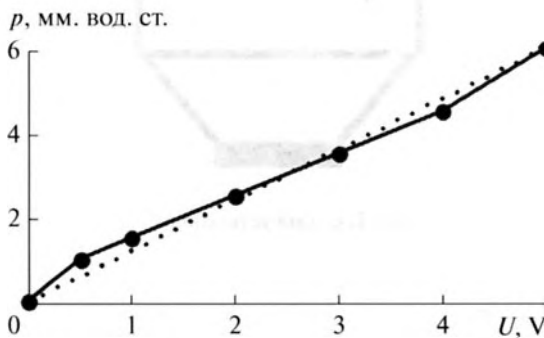


Рис. 5. Зависимость разрежения внутри трубы от электрического напряжения на преобразователе.

тельно сказывается на форме излучаемой волны. Сравнение зависимостей давления и смещения от времени позволяет выделить момент закрытия пластины и связать с ним начало значительной по амплитуде составляющей давления. Эта составляющая возбуждается ударом пластины о патрубков и представляет собой свободные затухающие изгибные колебания пластины, края которой оперты на патрубок. В момент открытия пластины амплитуда звукового давления, связанного с этим процессом, резко уменьшается, что может быть объяснено, во-первых, акустическим замыканием из-за малого волнового размера пластины и, во-вторых, изменением резонансной частоты ее колебаний из-за переменного краевого условия (опертый – не опертый край).

На рис. 4 приведены рассчитанные временные зависимости смещения от амплитуды возбуждающего напряжения, иллюстрирующие постепенное изменение формы колебаний от гармонической к однополупериодной.

Так как пластинка открыта только в течение части периода пульсации внутреннего давления, она может работать как насос, приводящий либо к прокачке воздуха из полости во внешнее пространство, либо (если внутренняя полость не имеет дополнительных щелей) к формированию внутри нее области пониженного давления. На рис. 5 при-

ведена зависимость постоянного давления (разрежения), возникающего в герметичной полости, от величины возбуждающего напряжения. Полученная зависимость близка к линейной.

Перейдем к модели, описывающей работу этого нелинейного элемента. Итак, генератор 1 создавал в полости резонатора 2 переменное давление $p_i(t)$. Когда это давление превышало величину F/S , где F – прижимающая сила, пластинка (мембрана) 3 массой m и площадью $S = \pi R^2$ приподнималась и начинала излучать прошедшую волну $p_i(t)$. Скорость колебаний имела сложную форму и содержала высшие гармоники основной частоты (рис. 3 и 4).

Составим уравнение движения пластинки с учетом как переменного давления в резонаторе, так и реакции излучаемой волны. Для простоты будем вначале считать, что излучается плоская волна, и ограничимся одномерной задачей. Пусть $X(t)$ – смещение пластинки вверх. Давление на пластинку с учетом граничного условия на ее поверхности, очевидно, равно

$$p_i - p_r = p_i - \rho c \dot{X}.$$

Следовательно, колебания должны описываться уравнением

$$\ddot{X} + \frac{\rho c S}{m} \dot{X} + \frac{k}{m} (X - \gamma |X|) = \frac{S}{m} p_i(t) - \frac{F}{m}. \quad (1)$$

Здесь k – коэффициент жесткости прижимающей пружины, γ – коэффициент нелинейности. Очевидно, мембрану легче “оторвать” от выходного торца резонатора, чем прижать к нему и продвинуть ниже опорной поверхности. Этот факт учтем в уравнении (1) введением члена с модульной нелинейностью. Упругость при положительном значении смещения $X > 0$ равна $1 - \gamma$. Она меньше, чем упругость при отрицательном значении $X < 0$, которая равна $1 + \gamma$. В дальнейшем считаем $|\gamma| < 1$. Заметим, что колебания и волны в системах с модульной нелинейностью в последнее время интенсивно исследуются [5–7].

Пусть резонатор возбуждается гармоническими колебаниями, то есть $p_i = p_0 \cos(\omega t)$. Рассмотрим колебания низкой частоты, когда движение можно считать квазистатическим и производными в (1) пренебречь. В этом простейшем случае решение имеет вид

$$\frac{k}{F} X_{\pm}(t) = \frac{\alpha \cos(\omega t) - 1}{1 \mp \gamma}. \quad (2)$$

Здесь $\alpha = Sp_0/F$, верхние знаки берутся для положительных значений $X > 0$, а нижние – для отрицательных $X < 0$. Нетрудно видеть, что решение является четной функцией времени. При $\omega t = \arccos \alpha^{-1}$ решение обращается в ноль.

Разложение в четный ряд Фурье при достаточно больших амплитудах колебаний $\alpha > 1$ имеет вид

$$\frac{k}{F} X(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t). \quad (3)$$

Постоянная составляющая дается выражением

$$\frac{\pi}{2} A_0 = \frac{2\gamma}{1-\gamma^2} \sqrt{\alpha^2 - 1} - \frac{2\gamma}{1-\gamma^2} \arccos \alpha^{-1} - \frac{\pi}{1+\gamma}. \quad (4)$$

Гармоники даются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} A_n = & -\frac{2\gamma}{1-\gamma^2} \frac{1}{n} \sin \left[n \arccos \alpha^{-1} \right] + \frac{\gamma \alpha}{1-\gamma^2} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{n+1} \sin \left[(n+1) \arccos \alpha^{-1} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{n-1} \sin \left[(n-1) \arccos \alpha^{-1} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

При малых амплитудах колебаний, как трудно видеть, высшие гармоники не появляются. Есть лишь постоянная составляющая и первая гармоника:

$$A_0 = -\frac{2}{1+\gamma}, \quad A_1 = \frac{\alpha}{1+\gamma}.$$

Из полости резонатора возможно истечение газа, если имеется отверстие для компенсации вытекающего потока. Масса газа, исходящая за единицу времени, дается усредненным за период колебаний выражением:

$$\begin{aligned} \bar{Q} = \frac{2}{c} \sqrt{\pi S X(t) p_i(t)} = \frac{F^2}{(1-\gamma) \sqrt{\pi S k c}} \varphi(\alpha), \quad (6) \\ \varphi = \alpha^2 \arccos \alpha^{-1} - \sqrt{\alpha^2 - 1}. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что при смещении круглой пластины вверх образуется щель площадью $2\sqrt{\pi S X}$. Функция $\varphi(\alpha)$ является монотонно возрастающей при $\alpha \geq 1$.

Полученные выражения позволяют рассчитать постоянное давление, возникающее во внутренней полости, если она не имеет дополнительных отверстий. Для этого подставим в уравнение (1) давление в виде $p_i = p_0 \cos(\omega t) + p$, p – искомого постоянное давление. При этом выражение (6) не изменит своего вида, если сделать подстановку $F_1 = F - pS$ и $\alpha_1 = Sp_0/F_1$:

$$\bar{Q} = \frac{F_1^2}{(1-\gamma) \sqrt{\pi S k c}} \varphi(\alpha_1).$$

Приравняв затем $\bar{Q} = 0$ и решая полученное уравнение, найдем два условия, $F_1 = 0$ и $\alpha_1 = 1$, которым соответствуют два корня $p_1 = F/S$ и $p_2 = -p_0 + F/S$. Первый корень соответствует бесконечной производительности источника

давления и поэтому не реализуем. Вторым корнем, если $p_0 \gg F/S$, дает линейную связь между амплитудой пульсаций давления и его постоянным значением, что и было получено в эксперименте. При этом полное давление внутри полости за период колебаний изменяется от $F/S - 2p_0$ до F/S , принимая в последнем случае значение, равное порогу открытия пластинки. Таким образом, рассматриваемая система в квазистатическом приближении работает как однополупериодный выпрямитель с нулевым углом отсечки. В условиях эксперимента влияние инертности пластинки, по-видимому, велико и приводит к тому, что пластинка открыта на протяжении значительной части периода колебаний.

Если считать, что колеблющаяся пластинка является монополюм и излучает сферически расходящуюся волну, уравнение (1) будет таким:

$$\left(1 + \frac{\rho RS}{m}\right) \ddot{X} + \frac{k}{m} (X - \gamma|X|) = \frac{S}{m} p_i(t) - \frac{F}{m}. \quad (7)$$

Сравнивая уравнения (1) и (7), видим, что вместо диссипативного члена в (1), связанного с потерями на излучение, в уравнении (7) появилась добавка – присоединенная масса. Однако найти решения уравнений (1) и (7) с учетом производных, по-видимому, можно лишь численными методами.

Поскольку нелинейный элемент может использоваться в системах преобразования спектров шума, рассмотрим воздействие на этот элемент случайного возмущения. По-прежнему считаем низкочастотным входной сигнал, который подвергается нелинейному безынерционному преобразованию (2). Используем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} y = f(x), \quad y \equiv \frac{k}{F} X, \quad x = \alpha \xi(\omega t) - 1, \\ f(x) = \begin{cases} \beta_+ x, & x > 0, \\ \beta_- x, & x < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь, очевидно, наклон положительного участка нелинейной характеристики больше, чем отрицательного, то есть $\beta_+ > \beta_-$. Рассмотрим наиболее интересный случай, когда шум сильный, $\alpha \gg 1$, и поэтому среднее значение случайного процесса на входе нелинейного элемента равно нулю.

Статистические характеристики на выходе рассчитываются по схеме, изложенной в книге [8] (гл. 7, 7.1.1–7.1.3). Считаем $x(t)$ или $\xi(t)$ нормальным стационарным случайным процессом. При этом корреляционная функция дается формулой (7.13) [8]:

$$\begin{aligned} \langle y(t)y(t+\tau) \rangle &\equiv B(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} C_n^2 R^n(\tau), \\ R(\tau) &= \sigma^2 \langle x(t)x(t+\tau) \rangle, \\ C_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma x) H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь σ – дисперсия входного шума, $H_n(x)$ – полином Эрмита.

Расчет коэффициентов разложения (9) для нелинейного преобразования (8) дает:

$$\begin{aligned} C_0 &= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}(\beta_+ - \beta_-), \quad C_1 = \frac{\sigma}{2}(\beta_+ + \beta_-), \\ C_n &= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}(\beta_+ - \beta_-) H_{n-2}(0). \end{aligned} \quad (10)$$

Поскольку

$$H_{2n}(0) = (-1)^n (2n-1)!!, \quad H_{2n-1}(0) = 0,$$

для корреляционной функции получим

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} (\beta_+ - \beta_-)^2 \left[1 + \frac{\pi}{2} \left(\frac{\beta_+ + \beta_-}{\beta_+ - \beta_-} \right)^2 R(\tau) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} R^2(\tau) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[(2n-3)!!]^2}{(2n)!!} R^{2n}(\tau) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Видно, что в отсутствие нелинейности, при $\beta_+ = \beta_-$, из формулы (11) следует правильный предельный переход к результату решения линейной задачи: $B(\tau) = \sigma^2 \beta_+^2 R(\tau)$.

Ряд в формуле (11) удается просуммировать, и по аналогии с формулой (7.32) [8] получаем простую и важную формулу:

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} (\beta_+ - \beta_-)^2 \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{\beta_+ + \beta_-}{\beta_+ - \beta_-} \right)^2 R(\tau) + \right. \\ &\quad \left. + R(\tau) \arcsin R(\tau) + \sqrt{1 - R^2(\tau)} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Полагая здесь $\tau = 0$, найдем среднюю мощность случайного процесса на выходе нелинейного элемента:

$$B(0) = \frac{\sigma^2}{4} [(\beta_+ + \beta_-)^2 + (\beta_+ - \beta_-)^2]. \quad (13)$$

Видно, что в отсутствие нелинейности ($\beta_+ = \beta_-$) мощность на выходе равна $B(0) = \sigma^2 \beta_+^2$. Она вдвое превышает мощность на выходе идеального детектора, получаемую из формулы (13) при $\beta_- = 0$. В общем случае доля поглощенной мощности равна

$$K = 1 - \frac{\beta_+^2 + \beta_-^2}{2\beta_+^2}. \quad (14)$$

В заключение отметим, что создание нелинейных экранов или распределенных систем типа метаматериалов с аномально высокой нелинейностью [9] может иметь важное значение для многих приложений, в частности для создания устройств преобразования частоты, работающих в воздухе при малых (безопасных) интенсивностях ультразвука, и новых звукопоглощающих материалов.

Исследования авторов поддержаны грантом РФФИ № 15-02-04306 (С.Г. Михайлов) и грантом РНФ № 14-22-00042 (О.В. Руденко).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руденко О.В., Хирных К.Л. Модель резонатора Гельмгольца для поглощения интенсивного звука // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 3. С. 527–534.
2. Заикин А.А., Руденко О.В. Нелинейная модель резонатора Гельмгольца с подвижной стенкой // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 3. С. 378–382.
3. Руденко О.В. Нелинейный экран как элемент систем для звукопоглощения и преобразования частоты // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 1. С. 38–43.
4. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973.
5. Руденко О.В. Линеаризуемое уравнение для волн в диссипативных средах с модульной, квадратичной и квадратично-кубичной нелинейностями // ДАН. 2016. Т. 471. № 1. С. 23–27.
6. Назаров В.Е., Кияшко С.Б., Радостин А.В. Волновые процессы в микронеоднородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией // Изв. вузов. Радиофизика. 2016. Т. 59. № 3. С. 275–285.
7. Radostin A.V., Nazarov V.E., Kiyashko S.B. Propagation of nonlinear acoustic waves in bimodular media with linear dissipation // Wave Motion. 2013. V. 50. № 2. P. 191–196.
8. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Т. 1. М.: Сов. радио, 1966.
9. Руденко О.В. Гигантские нелинейности структурно-неоднородных сред и основы методов нелинейной акустической диагностики // Успехи физ. наук. 2006. Т. 176. № 1. С. 77–95.