

УДК 534.1:539.3:517.957

УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С УПРУГОЙ СРЕДОЙ

© 2017 г. А. В. Бочкарев*, А. И. Землянухин**, Л. И. Могилевич***

Саратовский государственный технический университет им. Ю.А. Гагарина
410054 Саратов, ул. Политехническая 77

*e-mail: ab2009sar@list.ru

**e-mail: zemlyanukhinai@sstu.ru

***e-mail: mogilevich@sgu.ru

Поступила в редакцию 18.03.2016 г.

Выведено новое обобщенное неинтегрируемое уравнение шестого порядка, моделирующее осесимметричное распространение продольных волн в неоднородной цилиндрической оболочке, взаимодействующей с нелинейно-упругой средой. Для этого уравнения построены точные солитоноподобные решения как при совместном учете геометрической и физической нелинейностей, так и при их учете по отдельности.

Ключевые слова: неоднородная цилиндрическая оболочка, уединенные волны, точные решения, нелинейные уравнения в частных производных.

DOI: 10.7868/S0320791917020022

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании волновых процессов в деформируемых системах объектом анализа чаще всего становятся эволюционные и квазигиперболические уравнения градиентного типа, в которых нелинейные, диссипативные и дисперсионные слагаемые представляются пространственными производными искомого поля смещений. В стержнях, пластинах и оболочках [1–4] низкочастотная дисперсия определяется инерцией нормального перемещения, высокочастотная – влиянием изгибающих моментов, нелинейность может быть геометрической и (или) физической, диссипация характеризуется вязкостными свойствами материала и типом контакта волновода и среды.

В настоящее время теория соответствующих уравнений и методов их решения достаточно хорошо разработана. У большинства уравнений, возникающих в приложениях, существуют классы точных решений [5], среди которых наибольший практический интерес представляют уединенно-волновые решения.

Стремление к большей адекватности при описании нелинейной волновой динамики деформируемых систем может привести к тому, что в получаемых уравнениях наряду с градиентными слагаемыми появятся и неградиентные, характеризующие само искомое поле смещений [6–10]. При этом значительно усложнится аналитическая структура

уравнений, и проблема построения их точных решений приобретет особую актуальность [8].

ВЫВОД ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим осесимметричное распространение продольных волн деформации в конструктивно-неоднородной цилиндрической оболочке Кирхгофа–Лява, взаимодействующей с внешней нелинейно-упругой средой. Будем считать, что оси координат образуют правую тройку так, что ось x направлена вдоль образующей, y – по окружной координате, z – к центру кривизны. Предполагаем, что внутри оболочка усилена системой взаимно-перпендикулярных ребер, жесткость которых много больше жесткости обшивки. Считая ребра расположенными достаточно часто, так что масштаб конструктивной неоднородности значительно меньше характерной длины распространяющейся продольной волны, будем использовать метод конструктивной анизотропии [11], согласно которому вместо неоднородной рассматривается приближенно эквивалентная ей однородная оболочка, выражения для усилий и моментов которой содержат дополнительные слагаемые, ответственные за неоднородность.

Рассмотрим случай нелинейно-упругого материала обшивки с кубической зависимостью интенсивности напряжений σ , от интенсивности де-

формаций e_i : $\sigma_i = Ee_i - me_i^3$, где E – модуль Юнга материала обшивки, m – константа, определяемая экспериментально [11].

Заметим, что аналогичная задача в геометрически линейной постановке без учета взаимодействия с упругой средой рассмотрена в работе [12], где для компоненты продольной деформации получено эволюционное уравнение градиентного типа пятого порядка с кубической нелинейностью, построено точное солитоноподобное решение и установлена связь с нелинейным уравнением Шредингера.

Среду, с которой взаимодействует оболочка, считаем нелинейно-упругой, рассматривая случай “мягкой” нелинейности [13, 14]. С учетом того, что в оболочках продольные и нормальные перемещения связаны уже в линейном приближении, слагаемые, характеризующие влияние упругой среды, присутствуют в обоих уравнениях движения, приводимых ниже.

Из трех уравнений движения элемента оболочки в осесимметричном случае останутся два, которые при сделанных выше допущениях будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_1 u + c_2 u^3 = 0, \quad \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + k_y N_y + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c_3 w + c_4 w^3 = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где u , w – перемещения точек срединной поверхности оболочки с радиусом кривизны R в направлениях x и z соответственно, γ – удельный вес материала оболочки, g – ускорение свободного падения, t – время, h – толщина оболочки, c_1, \dots, c_4 – коэффициенты, характеризующие влияние внешней среды, $k_y = R^{-1}$ – кривизна оболочки в окружном направлении, N_x , N_y и M_x – усилия и момент в направлениях соответствующих координатных осей.

В соответствии с методом конструктивной анизотропии и согласно [11], усилия и моменты неоднородной нелинейно-упругой оболочки записываются в виде

$$\begin{aligned} N_x^n &= \frac{I_1}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_y) + \frac{E_1 S_1}{d_1} \kappa_x, \\ N_y^n &= \frac{I_1}{1-\mu^2} (\epsilon_y + \mu \epsilon_x), \quad M_x^n = \frac{I_3}{1-\mu^2} \kappa_x + \\ &+ \frac{E_1 J_1}{d_1} \kappa_x + \frac{1}{1-\mu^2} \left(\frac{E_1 S_1}{d_1} \epsilon_x + \mu \frac{E_1 S_2}{d_2} \epsilon_y \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где $I_k = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{e_i} z^{k-1} dz$, ($k = 1, 3$), μ – коэффициент

Пуассона, $\epsilon_x = u_x + \frac{1}{2} u_x^2 + \frac{1}{2} w_x^2$ и $\epsilon_y = -\frac{w}{R}$ – деформации в срединной поверхности в направлении осей Ox и Oy соответственно, $\kappa_x = -w_{xx}$ – параметр изменения кривизны, E_1 и E_2 – модули Юнга материалов, из которых изготовлены ребра, параллельные y и x , J_1 и J_2 – моменты инерции сечения ребер относительно линий, проходящих через их центры тяжести, S_1 и S_2 – статические моменты сечения ребер, d_1 и d_2 – расстояния между ребрами в направлениях y и x .

Подставляя (2) в (1), получаем уравнения движения элемента оболочки в перемещениях (нижний буквенный индекс обозначает дифференцирование по соответствующей независимой переменной):

$$\begin{aligned} u_{xx} - \mu k_y w_x + u_x u_{xx} - \frac{4m}{3E} (3u_x^2 u_{xx} - 2(1+\mu) \times \\ \times k_y u_x u_{xx} w - (1+\mu) k_y u_x^2 w_x + (1+\mu) k_y^2 u_{xx} w^2 + \\ + 2(1+\mu) k_y^2 u_x w w_x - 3\mu k_y^3 w^2 w_x) - \frac{E_1 S_1 (1-\mu^2)}{E h d_1} \times \\ \times w_{xxx} - \frac{\gamma(1-\mu^2)}{E g} u_{tt} - \frac{c_1(1-\mu^2)}{E h} u + \frac{c_2(1-\mu^2)}{E h} u^3 = 0, \\ \mu k_y u_x - k_y^2 w + \frac{\mu}{2} k_y u_x^2 - \frac{4m}{3E} (k_y \mu u_x^3 - (1+\mu) \times \\ \times (k_y^2 u_x^2 w - k_y^3 u_x w^2) - k_y^4 w^3) - \frac{(1-\mu^2) E_1 J_1}{E h d_1} w_{xxxx} + \\ + \frac{E_1 S_1}{E h d_1} u_{xxx} - \frac{\mu E_2 S_2}{E h d_2} k_y w_{xx} - \frac{\gamma(1-\mu^2)}{E g} w_{tt} - \\ - \frac{c_3(1-\mu^2)}{E h} w + \frac{c_4(1-\mu^2)}{E h} w^3 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для исследования уравнений движения (3), (4) введем в рассмотрение безразмерные независимые и зависимые переменные

$$u^* = \frac{u}{A}, \quad w^* = \frac{w}{h}, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad t^* = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma(1-\mu^2)}} \frac{t}{l}, \quad (5)$$

где A – амплитудный параметр возмущения, l – характерная длина волны. В дальнейшем звездочки над безразмерными переменными опускаем. Подстановка переменных (5) в уравнения (3), (4) выявляет в последних три малых параметра:

$$\epsilon_1 = \frac{A}{l}, \quad \epsilon_2 = \frac{\sqrt{hR}}{l}, \quad \epsilon_3 = \frac{h}{R},$$

характеризующих соответственно нелинейность волнового процесса, его дисперсию и тонкостенность оболочки. Рассмотрим случай, когда параметры нелинейности, дисперсии и тонкостенно-

сти имеют одинаковый порядок малости $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2 \sim \varepsilon_3 \sim \varepsilon$. Тогда $R/l \sim \sqrt{\varepsilon}$, т.е. рассматриваются только длинные волны. Это закономерно, так как модель оболочки Кирхгофа–Лява является длинноволновым низкочастотным приближением трехмерной динамической теории упругости.

Будем считать, что возмущение распространяется с постоянной скоростью вдоль образующей оболочки и медленно изменяет свои параметры во времени. Согласно методу многих масштабов, введем в рассмотрение новые независимые переменные и разложения зависимых переменных по степеням малого параметра ε , соответствующие предположениям о характере возмущения:

$$\begin{aligned} \xi &= x - Ct, \quad \tau = \varepsilon t, \quad u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, \\ w &= w_0 + \varepsilon w_1 + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя (6) в уравнения движения (3), (4), получим в низшем порядке по ε систему уравнений:

$$(1 - C^2)u_{0\xi\xi} - \mu w_{0\xi} = 0, \quad (7)$$

$$w_0 - \mu u_{0\xi} = 0. \quad (8)$$

Из уравнения (8) находим связь между нормальным и продольным перемещениями:

$$w_0 = \mu u_{0\xi}. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (7), получим выражение для безразмерной скорости продольной волны в оболочке:

$$C^2 = 1 - \mu^2.$$

Подставляя в безразмерное уравнение движения фронта возмущения найденную скорость, имеем

$$x^* = C^* t^* \Leftrightarrow \frac{x}{l} = \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma(1 - \mu^2)}} \frac{t}{l} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}} t,$$

т.е. линейная продольная волна в цилиндрической оболочке распространяется со звуковой “стержневой” скоростью [12].

При дальнейшем асимптотическом анализе будем учитывать, что жесткость ребра на изгиб, отнесенная к единице длины пролета между ребрами, обычно значительно превосходит цилиндрическую жесткость обшивки, а площадь сечения ребра, отнесенная к единице длины пролета между ребрами, в несколько раз меньше толщины оболочки [16]. Тогда, согласно “принципу максимального упрощения Крускала” [17], утверждающему, что физически реализуемые состояния системы характеризуются простейшими соотношениями

между малыми параметрами, будем считать, что выполняются следующие отношения порядка:

$$\begin{aligned} \frac{E_1 S_1 (1 - \mu^2)}{EAld_1} &= b_1 \varepsilon^2, \quad \frac{c_1 l^2 (1 - \mu^2)}{Eh} = b_2 \varepsilon^2, \\ \frac{c_2 (1 - \mu^2) A^2 l^2}{Eh} &= b_3 \varepsilon^2, \quad \frac{(1 - \mu^2) E_1 J_1 R^2}{Eh^2 d_1} = b_4 \varepsilon^2, \\ \frac{E_1 S_1 R^2}{Eh^2 d_1} &= b_5 \varepsilon^2, \quad \frac{\mu E_2 S_2 R}{El^2 h d_2} = b_6 \varepsilon^2, \quad \frac{c_3 R^2 (1 - \mu^2)}{Eh} = b_7 \varepsilon^2, \\ &= \frac{c_4 h R^2 (1 - \mu^2)}{E} = b_8 \varepsilon^2, \quad \frac{m}{E} = \varepsilon^{-1}, \end{aligned}$$

где b_i – постоянные: $b_i \sim O(1)$.

В первом нелинейном по параметру ε порядке получается система уравнений:

$$\begin{aligned} -\mu w_{1\xi} + \mu^2 u_{1\xi\xi} + u_{0\xi} u_{0\xi\xi} - b_1 \mu u_{0\xi\xi\xi\xi} + 2c_1 u_{0\xi\tau} - \\ - b_2 u + b_3 u^3 - 4(1 - \mu - \mu^2) u_{0\xi}^2 u_{0\xi\xi} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} -w_1 + \mu u_{1\xi} - b_4 w_{0\xi\xi\xi\xi} + b_5 u_{0\xi\xi\xi} - b_6 w_{0\xi\xi} + \frac{\mu}{2} u_{0\xi}^2 - \\ - c^2 w_{0\xi\xi} - b_7 w_0 + b_8 w_0^3 + \frac{4}{3} \mu^2 u_{0\xi}^3 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Замечая, что два первых слагаемых (10) совпадают с двумя первыми слагаемыми уравнения (11), продифференцировав по ξ и умножив на μ , получаем с учетом (9), приравнявая остальные слагаемые этих уравнений и обозначая $U = u_0$:

$$\begin{aligned} U_{\xi\tau} + c_1 U_{\xi\xi} + c_2 U_{\xi} U_{\xi\xi} + c_3 U_{\xi}^2 U_{\xi\xi} + \\ + c_4 U_{\xi\xi\xi\xi} + c_5 U_{\xi\xi\xi\xi\xi} = c_6 U - c_7 U^3, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{b_7 \mu^2}{2\sqrt{1 - \mu^2}}, \quad c_2 = \frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{2}, \\ c_3 &= -2 \frac{1 - \mu - \mu^2 - \mu^3 - 3b_8 \mu^3}{\sqrt{1 - \mu^2}}, \\ c_4 &= \frac{\mu^2 (1 - \mu^2) + b_6 \mu^2 - b_1 \mu - b_3 \mu}{2\sqrt{1 - \mu^2}}, \\ c_5 &= \frac{b_4 \mu}{2\sqrt{1 - \mu^2}}, \quad c_6 = \frac{b_2}{2\sqrt{1 - \mu^2}}, \quad c_7 = \frac{b_3}{2\sqrt{1 - \mu^2}}. \end{aligned}$$

Выведенное неинтегрируемое уравнение является новым и обобщает широкий класс квазигиперболических уравнений нелинейной волновой динамики. При $c_5 = c_6 = c_7 = 0$, т.е. для гладкой оболочки, не взаимодействующей с упругой средой, для компоненты деформации U_{ξ} получается интегрируемое уравнение Гарднера. В случае физически линейной неоднородной оболочки без внешней упругой среды, когда $c_3 = c_6 = c_7 = 0$, для

u_ξ имеем уравнение Кавахары. Если геометрически нелинейная гладкая оболочка окружена линейно-упругой средой, т.е. при $c_3 = c_5 = c_7 = 0$, для U_ξ получаем уравнение Островского [18]. Для геометрически и физически линейной однородной оболочки ($c_2 = c_3 = c_5 = 0$) в переменных бегущей волны для компоненты перемещения U получается уравнение Брезертона [19]. Все перечисленные редукции, за исключением уравнения Островского, обладают классами точных солитоноподобных решений.

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

Сначала построим точные уединенно-волновые решения уравнения (12) в случае только квадратичной геометрической нелинейности, т.е. при $c_3 = 0$. С помощью масштабных преобразований зависимой и независимых переменных

$$U = cu, \quad x = a\xi, \quad t = b\tau,$$

где

$$c = \frac{c_1}{\sqrt{c_3 c_6}}, \quad a = \sqrt{\frac{c_6}{c_1}}, \quad b = \sqrt{c_1 c_6},$$

приведем (12) к виду

$$u_{tx} + u_{xx} + \alpha u_x u_{xx} - \beta u_{xxxx} + \gamma u_{xxxxx} - u + \delta u^3 = 0. \quad (13)$$

Переходя к бегущей переменной $z = x - vt$, получаем

$$(1-v)u_{zz} + \alpha u_z u_{zz} - \beta u_{zzzz} + \gamma u_{zzzzz} - u + \delta u^3 = 0. \quad (14)$$

В настоящее время существует достаточно много эффективных методов построения точных решений неинтегрируемых уравнений [5]. Будем использовать метод логистической функции [20].

Введем в рассмотрение функцию

$$Q(z) = \frac{1}{1 + \exp(z)}, \quad (15)$$

удовлетворяющую уравнению

$$Q_z = Q^2 - Q, \quad (16)$$

и будем искать решение (14) в виде многочлена по степеням этой функции:

$$u = \sum_{i=0}^N a_i Q^i, \quad (17)$$

где a_i — неизвестные коэффициенты. Требование компенсации ведущих членов уравнения (14) $u_z u_{zz}$ и u_{zzzz} определяет порядок полюса P его реше-

ния. В данном случае $P = 3$, поэтому в выражении (17) следует положить $N = 3$.

Последовательно дифференцируя (17) по z и подставляя каждый раз вместо Q_z правую часть (16), найдем представления всех производных из (14) в форме многочленов по степеням Q :

$$\begin{aligned} u_z &= 3a_3 Q^4 + (2a_2 - 3a_3) Q^3 + (a_1 - 2a_2) Q^2 - a_1 Q, \\ u_{zz} &= 12a_3 Q^5 + (6a_2 - 21a_3) Q^4 + \\ &+ (2a_1 - 10a_2 + 9a_3) Q^3 + (-3a_1 + 4a_2) Q^2 + a_1 Q, \end{aligned}$$

и т.д. После подстановки этих выражений в исходное уравнение (14) останется сгруппировать слагаемые по степеням Q и приравнять нулю коэффициенты при Q^0, Q^1, Q^2, \dots . В результате получим переопределенную систему алгебраических уравнений для коэффициентов, входящих в (14) и (17), имеющую три нетривиальных решения.

В первом случае все коэффициенты выражаются через единственный свободный параметр a_3 :

$$\begin{aligned} v &= -\frac{41}{288}, \quad \alpha = -\frac{35}{12a_3}, \quad \beta = \frac{7}{48}, \quad \gamma = \frac{1}{288}, \\ \delta &= \frac{35}{a_3^2}, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{(23\sqrt{3} \mp 153)a_3}{\pm 84 + 130\sqrt{3}}, \\ a_2 &= \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{3})a_3. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя найденные значения a_0, a_1, a_2 в (17) и используя тождество

$$Q(z) \equiv \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{th} \frac{z}{2} \right), \quad (19)$$

получаем решение

$$u = \frac{a_3}{8} \left(-\operatorname{th}^3 \frac{z}{2} \pm \sqrt{3} \operatorname{th}^2 \frac{z}{2} + \operatorname{th} \frac{z}{2} \mp \sqrt{3} \right), \quad (20)$$

график которого изображен на рис. 1.

Во втором случае все коэффициенты зависят уже от двух свободных параметров, a_3 и δ :

$$\begin{aligned} v &= \frac{3}{10} - \frac{a_3^2 \delta}{2880}, \quad \alpha = \frac{a_3 \delta}{6} - \frac{168}{a_3}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = v, \\ a_0 &= 0, \quad a_1 = \frac{a_3}{2}, \quad a_2 = -\frac{3a_3}{2}, \end{aligned} \quad (21)$$

а решение имеет вид

$$u = \frac{a_3}{8} \left(\operatorname{th} \frac{z}{2} - \operatorname{th}^3 \frac{z}{2} \right), \quad (22)$$

график которого изображен на рис. 2. Отметим, что в данном случае $\beta = 0$, т.е. в уравнении (14) отсутствует одна из дисперсий, характеризующаяся инерцией нормального перемещения и конструктивной неоднородностью. Для гладкой оболочки соответствующий коэффициент всегда положителен.

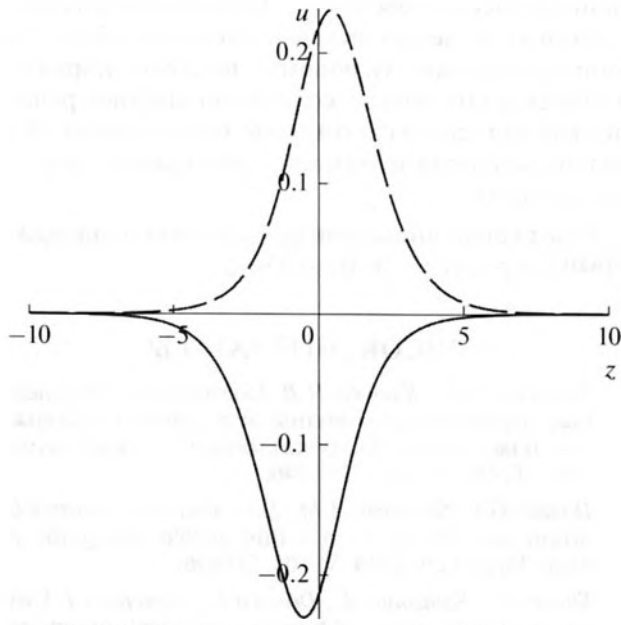


Рис. 1. Графики уединенно-волновых решений (20) для уравнения (14) при $a_3 = 1$. Сплошная кривая соответствует верхним знакам в (20), пунктирная — нижним.

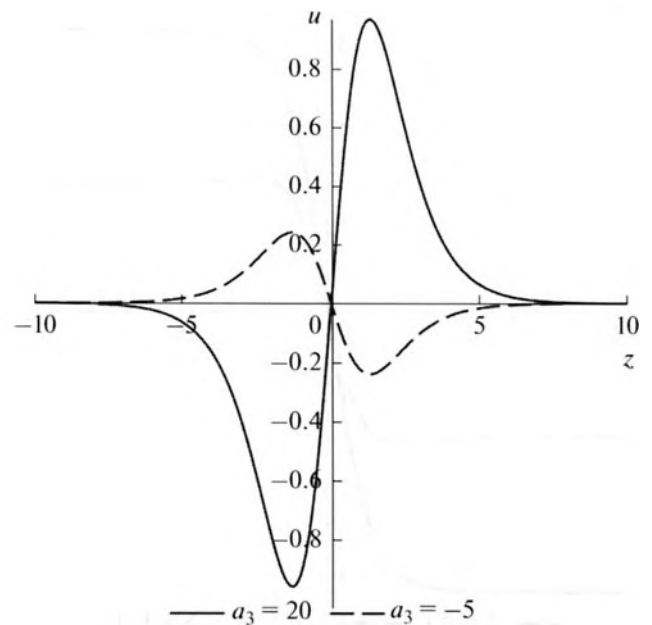


Рис. 2. Графики уединенно-волновых решений (22) для уравнения (14).

В третьем случае коэффициенты также зависят от двух свободных параметров, a_3 и δ :

$$v = -\frac{q^4 \mp 40q^3 - 10912q^2 \mp 157376q - 428544}{576w},$$

$$\gamma = -\frac{q^2(q^2 \pm 52q + 928)}{576w},$$

$$\alpha = \frac{q\sqrt{\delta}(5q^2 \pm 293q + 5372)}{6w},$$

$$\beta = \mp \frac{q(23q^2 \pm 800q + 12560)}{144w},$$

$$a_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{\delta}}, \quad a_1 = \pm \frac{4 \pm q}{2\sqrt{\delta}}, \quad a_2 = -\frac{3}{2}a_3,$$

где $q = a_3\sqrt{\delta}$, $w = 5q^2 + 62q + 248$.

Решение в этом случае отличается от (22) наличием дополнительного слагаемого

$$u = \frac{a_3}{8} \left(\text{th} \frac{z}{2} - \text{th}^3 \frac{z}{2} \right) \pm \frac{1}{\sqrt{\delta}} \text{th} \frac{z}{2}. \quad (23)$$

Графики решения (23) для случаев $a_3 = 10$ и $a_3 = -10$ приведены на рис. 3 и 4 соответственно.

Заметим, что решения (20), (22), (23) получены для компоненты смещения среды, однако в некоторых случаях интерпретировать результаты удобнее, рассматривая соответствующие солитоноподобные компоненты деформаций u_z .

Рассмотрим теперь общий случай уравнения (12), содержащего геометрическую и физическую нелинейности. После перехода к бегущей переменной $z = x - vt$ имеем

$$(1 - v)u_{zz} + \alpha u_z u_{zz} - u_z^2 u_{zz} - \beta u_{zzzz} + \gamma u_{zzzzz} - u + \delta u^3 = 0. \quad (24)$$

Анализ ведущих членов $u_z^2 u_{zz}$ и u_{zzzzz} указывает на первый порядок полюса решения, поэтому в (17) принимаем $N = 1$. Применяя, как и выше, метод логистической функции, получаем систему алгебраических уравнений, имеющую единственное нетривиальное решение со свободными параметрами β и γ :

$$v = 3 - \beta + \gamma, \quad \alpha = \pm \frac{\sqrt{10}}{5\sqrt{\gamma}}(5\gamma - \beta),$$

$$\delta = \frac{1}{90\gamma}, \quad a_0 = \pm \sqrt{90\gamma}, \quad a_1 = -2a_0. \quad (25)$$

Искомое решение (17) с использованием (19) приобретает вид кинка:

$$u = \pm \sqrt{90\gamma} \text{th} \frac{z}{2}.$$

Заметим, что, положив в (25) $\beta = 5\gamma$, получим решение уравнения, содержащего только физическую нелинейность. Случай с одной геометрической нелинейностью особый, и он разобран выше.

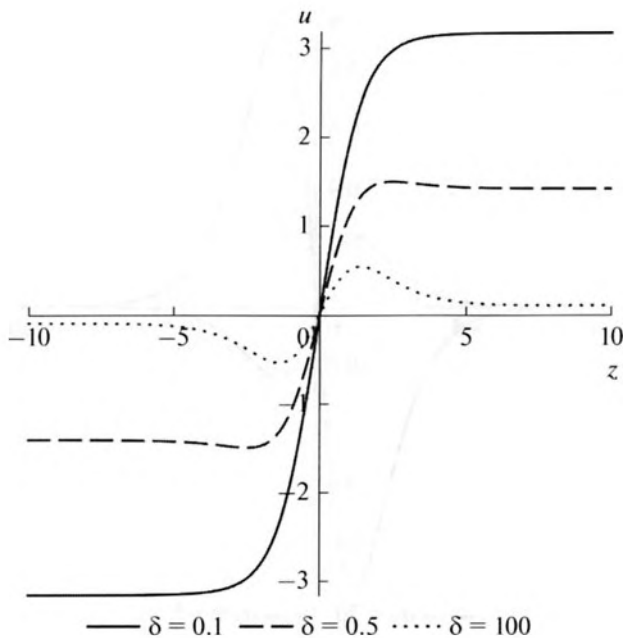


Рис. 3. Графики уединенно-волновых решений (23) для уравнения (14) при $a_3 = 10$.

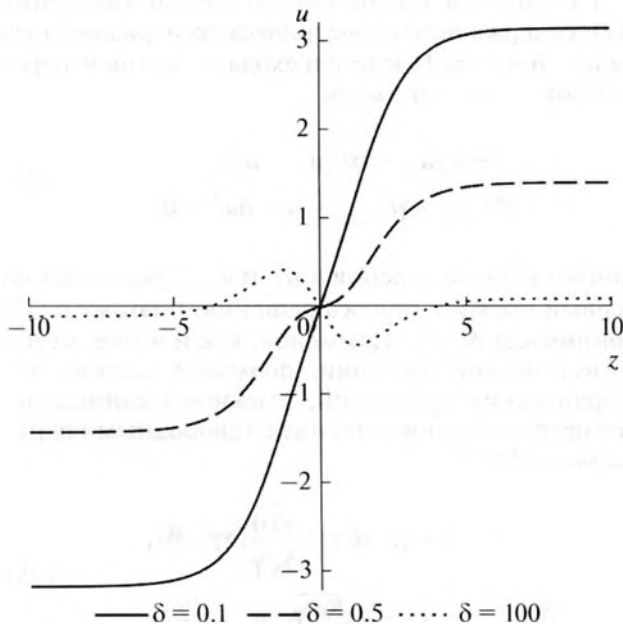


Рис. 4. Графики уединенно-волновых решений (23) для уравнения (14) при $a_3 = -10$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ показал, что учет взаимодействия с внешней нелинейно-упругой средой оказывает существенное влияние на волновой процесс в нелинейно-упругой неоднородной

цилиндрической оболочке. Для компоненты продольного смещения выведено новое обобщенное неинтегрируемое уравнение шестого порядка, построены его точные солитоноподобные решения как при совместном учете геометрической и физической нелинейностей, так и при их учете по отдельности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00176-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ерофеев В.И., Ключева Н.В. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор) // Акуст. журн. 2002. Т. 48. № 6. С. 725–740.
2. Dreiden G.V., Samsonov A.M., Semenova I.V., Shvartz A.G. Strain solitary waves in a thin-walled waveguide // Appl. Phys. Lett. 2014. V. 105. 211906.
3. Shvartz A., Samsonov A., Dreiden G., Semenova I. Evolution of bulk strain solitons in cylindrical inhomogeneous shells // AIP Conf. Proc. 2015. V. 1685. 070014.
4. Casasso A., Pastrone F., Samsonov A.M. Travelling waves in microstructure as the exact solutions to the 6th order nonlinear equation // Acoust. Phys. 2010. V. 56. № 6. P. 871–876.
5. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Изд. дом “Интеллект”, 2010. С. 368.
6. Бобровницкий Ю.И. Акустический метаматериал с необычными волновыми свойствами // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 4. С. 347–355.
7. Руденко О.В., Хедберг К.М. Дифракция интенсивного поля в фокальной области как динамика нелинейной системы с низкочастотной дисперсией // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 1. С. 30–39.
8. Гендельман О.В., Маневич Л.И. Точные солитоноподобные решения в обобщенных динамических моделях квазиодномерного кристалла // ЖЭТФ. 1997. Т. 112. № 4(10). С. 1510–1515.
9. Khusnutdinova K.R., Moore K.R. Initial-value problem for coupled Boussinesq equations and a hierarchy of Ostrovsky equations // Wave Motion. 2011. V. 48. P. 738–752.
10. Хуснутдинова К.Р., Самсонов А.М., Захаров А.С. Нелинейные длинноволновые модели для слоистых волноводов с неидеальным контактом // ТМФ. 2009. Т. 159. № 3. С. 475–489.
11. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
12. Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в неоднородных цилиндрических оболочках: новое эволюционное уравнение // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 3. С. 359–363.
13. Ерофеев В.И., Кажяев В.В., Павлов И.С. Неупругое взаимодействие и расщепление солитонов деформации, распространяющихся в зернистой среде // Вычисл. механ. сплош. сред. 2013. Т. 6. № 2. С. 140–150.

14. *Ерофеев В.И., Кажжаев В.В., Лисенкова Е.Е., Семерикова Н.П.* Несинусоидальные изгибные волны в балке Тимошенко, лежащей на нелинейноупругом основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 3. С. 30–36.
15. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 276 с.
16. *Новожиллов В.В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
17. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи: Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 479 с.
18. *Островский Л.А.* Нелинейные внутренние волны во вращающемся океане // Океанология. 1978. Т. 18. № 2. С. 181–191.
19. *Kudryashov N.A., Sinelshchikov D.I., Demina M.V.* Exact solutions of the generalized Bretherton equation // Phys. Lett. A. 2011. V. 375. P. 1074–1079.
20. *Kudryashov N.A.* Method of the logistic function for finding analytical solutions of nonlinear differential equations // Модел. и анализ информ. систем. 2015. Т. 22. № 1. С. 23–37.