АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2017, том 63, № 1, с. 9–16

НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА

УДК 534.213

ГЕНЕРАЦИЯ ВЫСШИХ ГАРМОНИК ПРИ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЯХ В ТРУБЕ С ОТКРЫТЫМ КОНЦОМ

© 2017 г. Л. А. Ткаченко*, **, С. А. Фадеев**

*Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН
420111 Казань, ул. Лобачевского 2/31

**Казанский федеральный университет
420008 Казань, ул. Кремлевская 16а

E-mail: luda_tkachenko@inbox.ru, fadeev.sergei@mail.ru

Поступила в редакцию 18.03.2016 г.

Представлена теория резонансных колебаний на удвоенной и утроенной частотах в трубе, открытой на одном конце. Граничное условие на открытом конце получено с учетом полигармоничности колебаний скорости на открытом конце и не содержит эмпирические параметры. Достигнуто хорошее качественное и количественное совпадение теоретических и экспериментальных результатов.

Ключевые слова: резонансные колебания газа, открытая труба, скорость, давление, вторая и третья гармоники.

DOI: 10.7868/S0320791916060174

Интерес к колебаниям в трубах обусловлен их влиянием на интенсивность процессов тепломассообмена и на динамику тонкостенных конструкций [1–3]. Исследованию их посвящено большое количество работ, часть из которых можно найти в обзорах [4–7]. Нелинейность уравнений движения (внутритрубная нелинейность) и граничных условий обуславливают появление акустотермического эффекта [8, 9], стационарных вторичных течений [10–12], субгармонических колебаний [13, 14]. В случае колебаний в трубе с открытым концом наблюдается пульсирующая струя [15, 16]. Генерация высших гармоник является также одним из нелинейных эффектов. Основываясь на нелинейной теории Честера [17] для резонансных колебаний в трубе с открытым концом, авторам [18] удалось выделить колебания на основной частоте ω (ω – циклическая частота), на частотах 2ω и 3ω, и экспериментально определить эмпирические параметры, имеющиеся в нелинейном граничном условии [17] на открытом конце. Получено удовлетворительное согласие теоретических и экспериментальных данных, соответствующих колебаниям на частотах ω и 2ω. Расхождение данных, относящихся к колебанию на частоте 3ω, достигает неприемлемой величины в 60%. Причина этого заключается, с одной стороны, в том, что граничное условие на открытом конце задается с помощью двух эмпирических параметров, с другой стороны, колебания скорости на открытом конце полагаются гармоническими, а не полигармоническими.

В настоящей работе ставится задача рассчитать колебания на частотах 2ω, 3ω при гармонических колебаниях поршня на частоте ω. При этом граничное условие на открытом конце не должно содержать каких-либо эмпирических параметров, а колебания скорости должны быть полигармоническими, т.е. содержать вклад высших гармоник.

Рассмотрим резонансные колебания в длинной цилиндрической трубе с радиусом R, существенно меньшим по сравнению с ее длиной L_0. На одном конце трубы расположен гармонически колеблющийся поршень с амплитудой смещения l_0, причем $l_0 \ll L_0$. Для описания колебаний вводятся параметры [19]

$$M_p = \omega l_0/c_0, \quad H = R\sqrt{\omega/\nu}, \quad \varepsilon = V/\omega L, \quad \mathrm{Sh} = \omega R/V, \tag{1}$$

где M_p – число Маха для поршня; H – частотный параметр; ε – параметр, описывающий нелинейность внутри трубы; Sh – число Струхаля, описывающее нелинейность на открытом конце; c_0 – скорость звука в невозмущенном газе; ν – коэффициент кинематической вязкости; V – амплитуда колебаний скорости на открытом конце на частоте ω; $L = L_0 + \sigma_0 R$ – эффективная длина трубы, σ_0 – поправка Рэлея.

Принятые условия обеспечивают $M_p \ll 1$, $\mathrm{Sh} \ll 1$. Положим также, что толщина акустического пограничного слоя мала по сравнению с радиусом, т.е. $H \gg 1$. Наконец примем, что амплитуда колебаний скорости на открытом конце существенно меньше скорости звука, так что $\varepsilon \ll 1$, тогда при решении задачи можно использовать метод возмущений.

Рассмотрим граничные условия.

Пусть смещения поршня заданы в виде $x_p = l_0 \sin \omega t$, тогда безразмерная скорость поршня имеет вид $\tilde{u}_p = M_p \cos \omega t$. Особенность этого условия состоит в том, что скорость задана в точке, которая сама совершает колебания. Переход к эйлеровым координатам совершается по формуле [4]

$$M_p \cos \omega t \approx \tilde{u}(0, t) + x_p \left.\frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial x}\right|_{x=0} + \ldots \quad (2)$$

Пусть ведущие члены в колебаниях скорости заданы в виде

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, t) \cong{}& r_1 \sin(k_0 x + \alpha_1) \sin \omega t + r_2^{(2)} \times \\ &\times \sin(2k_0 x + \alpha_2) \sin 2\omega t + \\ &+ r_3^{(2)} \sin(3k_0 x + \alpha_3) \sin 3\omega t, \quad \alpha_i \ll 1,\end{aligned} \quad (3)$$

где $k_0 = \omega / c_0$ – волновое число в идеальной жидкости; r_i, α_i – константы интегрирования. Подставляя (3) в (2), можно получить

$$\begin{aligned}\tilde{u}(0, t) ={}& M_p \cos \omega t - \\ &- 0.5 M_p r_1 \cos 2\omega t - M_p r_2^{(2)} \cos 3\omega t,\end{aligned} \quad (4)$$

откуда

$$\tilde{u}_1(0, t) = M_p \cos \omega t, \quad (5)$$

$$\tilde{u}_2(0, t) = -0.5 M_p r_1 \cos 2\omega t, \quad (6)$$

$$\tilde{u}_3(0, t) = -M_p r_2^{(2)} \cos 3\omega t, \quad (7)$$

где нижние индексы указывают на номер гармоники, $\tilde{u}_i = u_i / c_0$ – безразмерная скорость.

Методика расчета граничного условия на открытом конце при гармонических колебаниях скорости дана в работе [20]. Она базируется на представлении о струйном характере истечения и сферическом втекании в сток, расположенный в выходном сечении трубы. Эта асимметрия приводит, во-первых, к появлению в скорости струи постоянной составляющей и, во-вторых, к тому, что на расстояниях $x_L \geq 3R$ от выходного сечения спектральный состав скорости струи перестает зависеть от x_L. Тогда давление в выходном сечении можно найти из выражения

$$\tilde{p}(L, t) = 0.5 \tilde{u}_L^2 (x_L \approx 3R, t) - 0.5 \tilde{u}^2(L, t), \quad (8)$$

где $\tilde{p}(L, t) = p(L, t) / \rho_0 c_0^2$.

Пусть теперь скорость на открытом конце (в выходном сечении) содержит колебания на частотах $\omega, 2\omega, 3\omega$

$$\tilde{u}(L, t) = r_1 \sin \omega t + r_2 \sin 2\omega t + r_3 \sin 3\omega t, \quad (9)$$

где r_1, r_2, r_3 – соответствующие безразмерные амплитуды гармоник скорости на открытом конце. Спектральное разложение скорости в пульсирующей струе на расстоянии $x_L \cong 3R$ будет иметь вид

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x_L \cong 3R, t) ={}& r_1 [(0.5 m_0 + a_0) + (0.5 + a_1) \times \\ &\times \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \sin 3\omega t + \\ &+ a_4 \cos 4\omega t + a_5 \sin 5\omega t] + \\ &+ r_2 [c_1 \cos \omega t + c_2 \sin 2\omega t + c_3 \cos 3\omega t] + \\ &+ r_3 [d_0 + d_2 \cos 2\omega t + d_3 \sin 3\omega t].\end{aligned} \quad (10)$$

Первый член в квадратных скобках справа был получен ранее [20]. Второй и третий члены представляют вклад второго и третьего слагаемых в (9); a_i, c_i, d_i – коэффициенты разложения Фурье; m_0 – коэффициент пропорциональности между постоянной составляющей скорости и амплитудой колебаний скорости газа на открытом конце трубы, для параметров установки [18] ($L_0 = 1.7065$ м, $l_0 = 2.9 \times 10^{-3}$ м) $m_0 = 0.228$ [20]. Подставим (9), (10) в (8) и выделим члены, принадлежащие колебаниям соответствующих частот.

Граничное условие на частоте ω имеет вид [20]

$$\tilde{p}_1(L, t) = m r_1 \tilde{u}_1(L, t), \quad (11)$$

где коэффициент m определяется как

$$m = (0.5 + a_1)(0.5 m_0 + a_0 + 0.5 a_2).$$

Заметим, что ведущие члены в граничном условии для колебаний на частотах 2ω и 3ω имеют порядок r_1^2, тогда

$$r_2 \sim r_1^2, \quad r_3 \sim r_1^2.$$

Колебание на частоте 2ω нерезонансное, поэтому ради простоты ограничимся в граничном условии для него квадратичным членом:

$$\tilde{p}_2(L, t) = b_2 r_1^2 \cos 2\omega t. \quad (12)$$

Колебание на частоте 3ω резонансное, поэтому в граничном условии целесообразно сохранить, помимо квадратичных, члены третьего порядка. Тогда получим

$$\begin{aligned}\tilde{p}_3(L, t) ={}& b_3 r_1^2 \sin 3\omega t + \\ &+ f r_1 r_2 \cos 3\omega t + g r_1 r_3 \sin 3\omega t,\end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned}b_3 ={}& 0.5[2(0.5 m_0 + a_0) a_3 + \\ &+ (0.5 + a_1) a_2 - (0.5 + a_1) a_4 + a_2 a_5],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f ={}& [(0.5 m_0 + a_0) c_3 - 0.5(0.5 + a_1) c_2 + \\ &+ 0.5 a_2 c_1 + 0.5], \quad g = [(0.5 m_0 + a_0) d_3 + \\ &+ 0.5(0.5 + a_1) d_2 + a_3 d_0].\end{aligned}$$

Решения уравнений первого (акустического) приближения даны в [21]. В случае $H \gg 1$ они принимают вид

$$p_1 = \rho_0 c_0^2 r_1 \cos z_1 \exp i(\omega t + \psi_1),$$
$$u_1 = r_1 c_0 \sin z_1 (1 - \exp[-(1+i)\eta]) \exp i(\omega t + \psi_1 - \pi/2),\quad \rho_1 = \frac{p_1}{c_0^2}(1 + (\kappa - 1)\exp[-(1+i)\times \eta\sqrt{\sigma}]),\quad T_1 = \frac{p_1}{\rho_0 c_p}(1 - \exp[-(1+i)\eta\sqrt{\sigma}]), \tag{14}$$

где $z_1 = k_0 x \times (1 + \beta_1' + i\beta_1'') + \alpha_1 + i\beta_1$, $k_0 = \omega/c_0$ – волновое число, $\beta_1' = (\delta/2R)\left(1 + (\kappa-1)/\sqrt{\sigma}\right)$ – дисперсия, $\beta_1'' = -\beta_1'$ – коэффициент поглощения, $\eta = (R-r)/\delta$ – безразмерная радиальная координата, $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ – толщина акустического пограничного слоя, σ – число Прандтля, $\kappa = c_p/c_v$ – показатель адиабаты, c_p, c_v – удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме соответственно, α_1, β_1 – константы интегрирования, r_1, ψ_1 – модуль и главное значение аргумента безразмерной амплитуды колебаний.

Для определения констант $\alpha_1, \beta_1, r_1, \psi_1$ выражение для скорости в (14) усредняем по сечению и используем граничные условия (5) и (11) [20]. В результате получим

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - k_0 L\left(1 + \beta_1'\right),\quad \beta_1 = k_0 L\beta_1' + m r_1,$$
$$r_1\left\{\cos^2 k_0 L\left(1+\beta_1'\right) + \left(k_0 L\beta_1' + m r_1\right)^2 \times \sin^2 k_0 L\left(1+\beta_1'\right)\right\}^{1/2} = M_p, \tag{15}$$
$$\psi_1 = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{cth}\beta_1).$$

При точном резонансе

$$\alpha_1 = 0,\quad \beta_1 = k_0 L\beta_1' + m r_1,\quad r_1 = \frac{1}{2m} \times \left\{\left[\left(k_0 L\beta_1'\right)^2 + 4m M_p\right]^{1/2} - k_0 L\beta_1'\right\},\quad \psi_1 = 0. \tag{16}$$

Из (16) следует, что для идеальной жидкости ($\beta_1' = 0$) связь между r_1 и M_p является квадратичной

$$r_1^2 \sim M_p,$$

тогда вместо (6) и (7) можно записать

$$\tilde{u}_2(x, t) \cong 0 \tag{17}$$

и

$$\tilde{u}_3(x, t) \cong 0. \tag{18}$$

Для описания колебаний на частотах 2ω и 3ω воспользуемся системой уравнений, описывающих осредненное по сечению движение газа в трубе [22]. Применим к ним метод возмущений. В результате для колебаний на частоте 2ω будем иметь

$$\rho_0 \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial t} + \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{2\tau_{w2}}{R} = -\frac{\partial\left(\overline{\rho_1 u_1}\right)}{\partial t} - \frac{\partial\left(\overline{\rho_0 u_1^2}\right)}{\partial x},$$
$$\frac{\partial p_2}{\partial t} + \kappa p_0 \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial x} - \frac{2(\kappa-1)q_{w2}}{R} = -\kappa p_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \overline{u_1 \frac{\partial p_1}{\partial x}}, \tag{19}$$

где $\tau_{w2} = -\mu \left.\frac{\partial u_2}{\partial r}\right|_w$ – касательное напряжение, $q_{w2} = \lambda \left.\frac{\partial T_2}{\partial r}\right|_w$ – тепловой поток, нижний индекс w соответствует положению на стенке, черта сверху – осреднению по сечению трубы.

Из (14) легко видеть, что выражения $\exp[-(1+i)\eta]$, $\exp[-(1+i)\eta\sqrt{\sigma}]$ при осреднении по сечению трубы дадут вклад порядка $\delta/R \sim (1/H) \ll 1$, которым можно пренебречь. Тогда, полагая

$$p_2(x, t) = p_2(x)\exp 2i\omega t,\quad u_2(x, t) = u_2(x)\exp 2i\omega t,\quad \tau_{w2} = \rho_0 u_2(x)(1+i)\sqrt{\nu\omega} \times \exp 2i\omega t,\quad q_{w2} = -(1+i)p_2(x)\sqrt{a\omega}\exp 2i\omega t, \tag{20}$$

получим

$$2\rho_0 i\omega u_2(x) + \frac{dp_2(x)}{dx} + \frac{2\rho_0(1+i)}{R}u_2(x)\sqrt{\nu\omega} = 0,$$
$$2i\omega p_2(x) + \rho_0 c_0^2 \frac{du_2(x)}{dx} + \frac{2(\kappa-1)}{R} \times (1+i)p_2(x)\sqrt{a\omega} = \frac{i r_1^2 \rho_0 c_0^2 \omega}{4} \times \left[(\kappa-1) + (\kappa+1)\cos 2z_1\right]. \tag{21}$$

Исключим из системы (21) давление $p_2(x)$, тогда для скорости $u_2(x)$ будем иметь

$$\frac{d^2 u_2(x)}{dx^2} + 4k_0^2\left(1 + \beta_2' + i\beta_2''\right)^2 u_2(x) = -\frac{i\omega^2 r_1^2}{2c_0}(\kappa+1)\sin 2z_1, \tag{22}$$

где $\beta_2' = -\beta_2'' = (\delta_2/2R)\left(1 + (\kappa-1)/\sqrt{\sigma}\right)$, $\delta_2 = \sqrt{\nu/\omega}$.

Решая однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 u_2(x)}{dx^2} + 4k_0^2\left(1 + \beta_2' + i\beta_2''\right)^2 u_2(x) = 0, \tag{23}$$

нетрудно убедиться, что оно имеет только тривиальное решение, т.е. величина $2k_0 L(1 + \beta_1') = \pi$ не является собственным значением (22), и колебания будут характеризоваться частным решением уравнения

$$\frac{d^2u_2(x)}{dx^2}+4k_0^2\left(1+\beta_1'+i\beta_1''\right)^2u_2(x)= \\ =-\frac{i\omega^2r_1^2}{2c_0}(\kappa+1)\sin 2z_1. \tag{24}$$

Введем новую переменную $y=2k_0x\times(1+\beta_1'+i\beta_1'')$, при этом в правой части сохраним только ведущие члены, положив $\beta_1'=0$. Тогда имеем

$$u_2''(y)+u_2(y)=A\sin 2z_1,\quad A=-\frac{ic_0(\kappa+1)r_1^2}{8}. \tag{25}$$

Решение (25) в безразмерной форме имеет вид

$$\tilde{u}_2(y)=C_1\sin y+C_2\cos y- \\ -\frac{0.5Ay}{c_0}\cos(y+2\alpha_1+2i\beta_1). \tag{26}$$

Колебания давления можно определить из второго уравнения системы (21):

$$\tilde{p}_2(y)=iC_1\cos y-iC_2\sin y+\frac{(\kappa-1)r_1^2}{8}+ \\ +\frac{(\kappa+1)r_1^2}{16}[\cos(y+2\alpha_1+2i\beta_1)+ \\ +y\sin(y+2\alpha_1+2i\beta_1)]. \tag{27}$$

Константы C_1 и C_2 можно найти, если подставить выражения (26) и (27) в граничные условия (12) и (17). Удерживая лишь члены порядка r_1^2, для колебаний скорости и давления получим

$$\tilde{u}_2(\bar{x})=\frac{ir_1^2}{16}\Big\{(16b_2-\kappa+3)\sin 2k_0L(1+\beta_1')(1-\bar{x})+ \\ +(\kappa+1)\left[\pi-2k_0L(1+\beta_1')(1-\bar{x})\right]\times \\ \times\cos 2k_0L(1+\beta_1')(1-\bar{x})\Big\},\quad \tilde{p}_2(\bar{x})=\frac{r_1^2}{16}\times \\ \times\Big\{(16b_2+2-2\kappa)\cos 2k_0L(1+\beta_{11}')(1-\bar{x})+ \\ +2(\kappa-1)+(\kappa+1)\left[\pi-2k_0L(1+\beta_1')(1-\bar{x})\right]\times \\ \times\sin 2k_0L(1+\beta_1')(1-\bar{x})\Big\}, \tag{28}$$

где $\bar{x}=x/L_0$.

При точном резонансе $k_0L(1+\beta_1')=\pi/2$ вместо (28) имеем

$$\tilde{u}_2(\bar{x})=\frac{ir_1^2}{16}[(16b_2-\kappa+3)\sin\pi\bar{x}+(\kappa+1)\times \\ \times\pi\bar{x}\cos\pi\bar{x}],\quad \tilde{p}_2(\bar{x})=\frac{r_1^2}{16}[(2\kappa-2-16b_2)\times \\ \times\cos\pi\bar{x}+(\kappa+1)\pi\bar{x}\sin\pi\bar{x}+2\kappa-2]. \tag{29}$$

Рассмотрим колебания на частоте 3ω. Правые части уравнений, описывающих эти колебания, имеют третий порядок малости, тогда как в граничном условии на открытом конце ведущие члены имеют второй порядок. Это означает, что нет необходимости решать полную систему уравнений, достаточно рассмотреть однородную систему второго порядка

$$\rho_0\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t}+\frac{\partial p_3^{(2)}}{\partial x}+\frac{2\tau_{w3}^{(2)}}{R}=0, \\ \frac{\partial p_3^{(2)}}{\partial t}+\kappa p_0\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x}-\frac{2(\kappa-1)q_{w3}^{(2)}}{R}=0, \tag{30}$$

где нижний индекс относится к номеру гармоники, верхний – к порядку приближения. Здесь, так же как и в случае колебания на частоте 2ω, можно положить

$$p_3^{(2)}(x,t)=p_3^{(2)}(x)\exp 3i\omega t, \\ u_3^{(2)}(x,t)=u_3^{(2)}(x)\exp 3i\omega t, \\ \tau_{w3}^{(2)}=\rho_0u_3^{(2)}(x)(1+i)\sqrt{3\nu\omega/2}\exp 3i\omega t, \\ q_{w3}^{(2)}=-(1+i)p_3^{(2)}(x)\sqrt{3a\omega/2}\exp 3i\omega t. \tag{31}$$

Тогда будем иметь

$$3\rho_0i\omega u_3^{(2)}(x)+\frac{dp_3^{(2)}(x)}{dx}+\frac{2\rho_0(1+i)}{R}u_3^{(2)}(x)\sqrt{3\nu\omega/2}=0, \\ 3i\omega p_3^{(2)}(x)+\rho_0c_0^2\frac{du_3^{(2)}(x)}{dx}+ \\ +\frac{2(\kappa-1)}{R}(1+i)p_3^{(2)}(x)\sqrt{3a\omega/2}=0. \tag{32}$$

Исключая из (32) давление, можно получить уравнение для амплитуды колебаний скорости. В безразмерной форме оно примет вид

$$\frac{d^2\tilde{u}_3^{(2)}(x)}{dx^2}+9k_0^2\left(1+\beta_3'+i\beta_3''\right)^2\tilde{u}_3^{(2)}(x)=0, \tag{33}$$

где $\beta_3'=-\beta_3''=(\delta_3/2R)\left(1+(\kappa-1)/\sqrt{\sigma}\right)$, $\delta_3=\sqrt{2\nu/3\omega}$.

Решение (33) ищем в виде

$$\tilde{u}_3^{(2)}(x)=r_3^{(2)}\sin\Big[3k_0x\left(1+\beta_3'+i\beta_3''\right)+ \\ +\alpha_3+i\beta_3\Big]\exp i(\psi_3-\pi/2). \tag{34}$$

Можно показать, что безразмерная амплитуда колебаний давления определяется по формуле

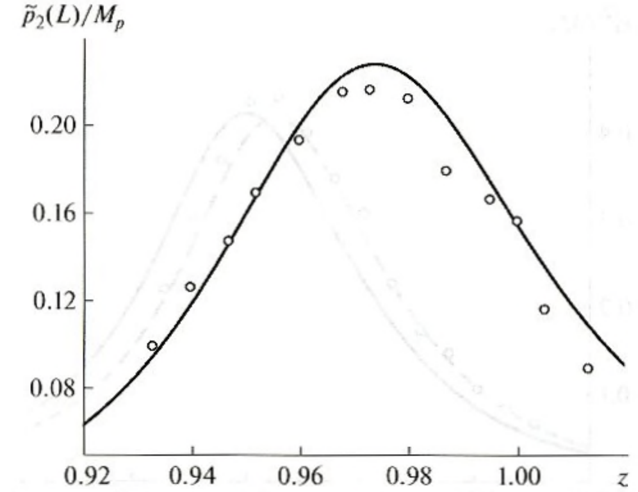

Рис. 1. Зависимость $\tilde{p}_2(L)/M_p$ от безразмерной частоты z для трубы длиной $L_0 = 1.7065$ м с амплитудой смещения поршня $l_0 = 2.90$ мм. Сплошная линия – теория (28), точки – экспериментальные результаты [18].

$$\tilde{p}_3^{(2)}(x) = r_3^{(2)} \times$$
$$\times \cos\left[3k_0x\left(1+\beta_3' + i\beta_3''\right) + \alpha_3 + i\beta_3\right]\exp i\psi_3. \tag{35}$$

Подставляя (34) в граничное условие на поршне (18), сразу получаем

$$\alpha_3 = 0,\ \beta_3 = 0. \tag{36}$$

В граничном условии на открытом конце (13) присутствуют неизвестные величины r_2 и r_3. В случае r_2 достаточно умножить первое из выражений (29) в точке $\overline{x} = 1$ на $\exp 2i\omega t$, выделить в полученном выражении реальную часть и сопоставить последнюю с формулой (9). Тогда имеем

$$r_2 = -\frac{\kappa+1}{16}\pi r_1^2. \tag{37}$$

Аналогичная процедура с соотношением (34) ведет к зависимостям

$$r_3 = r_3^{(2)}\sin 3k_0L\left(1+\beta_3'\right),\quad \psi_3 \equiv 0. \tag{38}$$

С учетом (37) и (38) граничное условие на открытом конце (13) приводится к виду

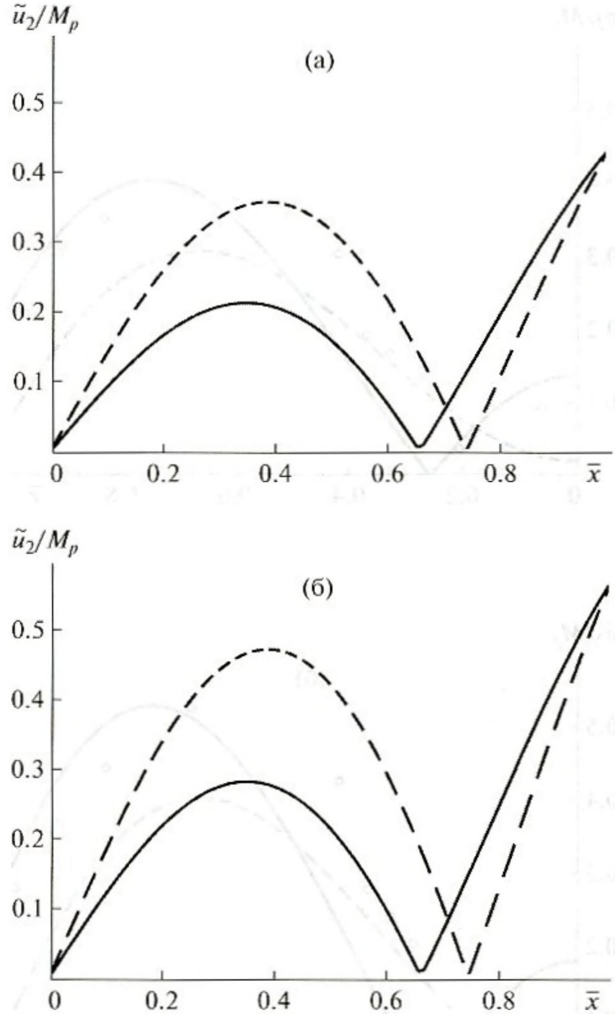

Рис. 2. Распределение скорости $\tilde{u}_2/M_p$ по длине трубы для $L_0 = 1.7065$ м (а) и $L_0 = 1.2864$ м (б). Сплошная линия – теория (29) в случае $b_2 = 0.25$, штриховая линия – теория (29) в случае $b_2 = 0.08$.

$$\tilde{p}_3^{(2)}(L) = -ib_3r_1^2 - \frac{\kappa+1}{16}\pi r_1^3 f -$$
$$- igr_1r_3^{(2)}\sin 3k_0L\left(1+\beta_3'\right). \tag{39}$$

Для $r_3^{(2)}$ получим

$$r_3^{(2)} = \frac{r_1^2\left[b_3^2 + ((\kappa+1)\pi f r_1/16)^2\right]}{\cos^2 3k_0L(1+\beta_3') + (3k_0L\beta_3' + gr_1)\sin^2 3k_0L(1+\beta_3')}. \tag{40}$$

Анализ показывает, что $(\kappa+1)\pi f r_1/16 \ll b_3$, тогда с достаточной точностью вместо (40) можно пользоваться выражением

$$r_3^{(2)} = \frac{r_1^2 b_3}{\cos^2 3k_0L(1+\beta_3') + (3k_0L\beta_3' + gr_1)\sin^2 3k_0L(1+\beta_3')}. \tag{41}$$

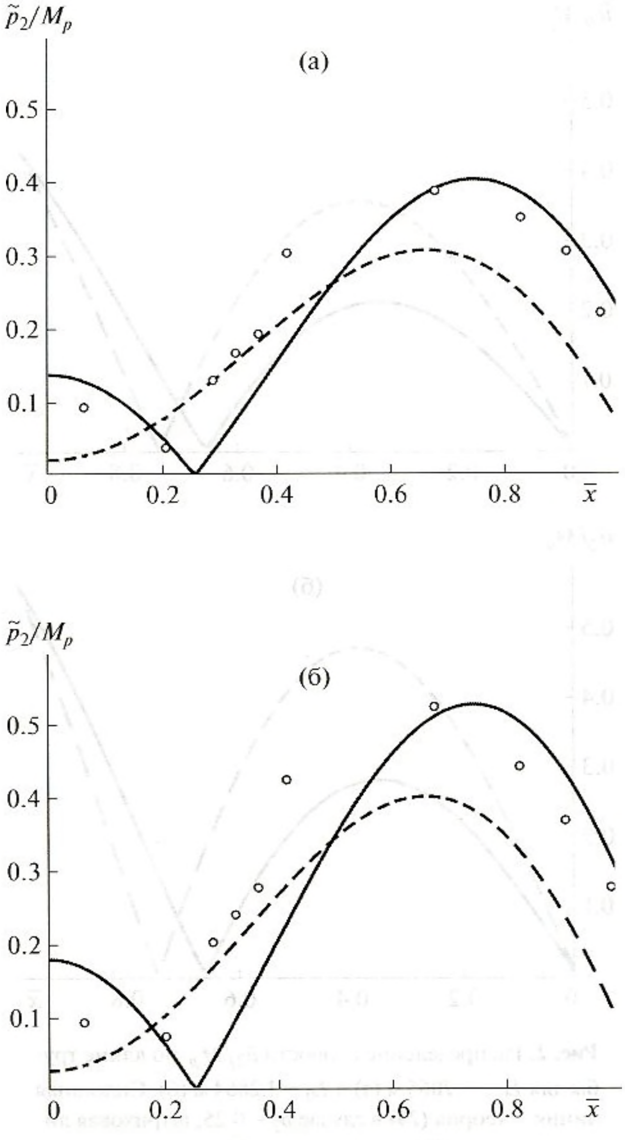

Рис. 3. Распределение давления $\tilde{p}_2/M_p$ по длине трубы для L_0 = 1.7065 м (а) и L_0 = 1.2864 м (б). Сплошная линия – теория (29) в случае b_2 = 0.25, штриховая линия – теория (29) в случае b_2 = 0.08, точки – экспериментальные данные [18].

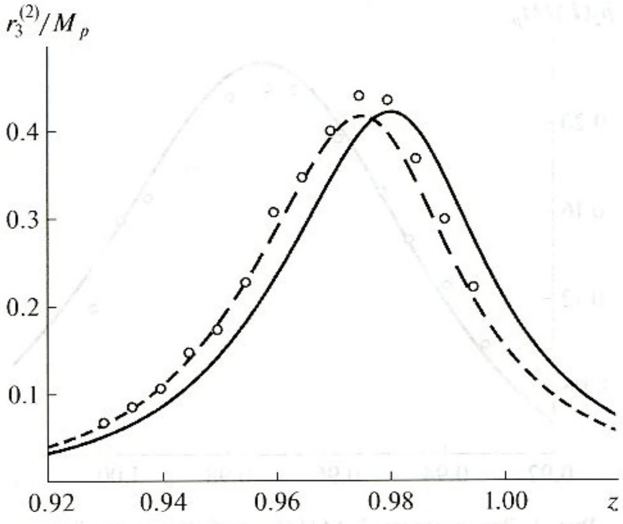

Рис. 4. Зависимость $r_3^{(2)}/M_p$ от безразмерной частоты z. Сплошная линия – теория (41) в случае σ_0 = 0.6133, штриховая линия – теория (41) в случае σ_0 = 1.5, точки – экспериментальные данные [18].

Резонансная частота определяется из выражения

$$\mathrm{ctg}\,3k_0L(1+\beta_3') = \frac{(\kappa+1)}{16b_3}\pi f r_1(3k_0L\beta_3' + g r_1), \tag{42}$$

откуда

$$k_0L(1+\beta_3') \cong \frac{\pi}{2}. \tag{43}$$

Рассмотрим свойства полученных результатов. На рис. 1 представлена зависимость $\tilde{p}_2(L)/M_p$ от безразмерной частоты $z = (2/\pi)(\omega L_0/c_0)$ для трубы длиной L_0 = 1.7065 м с амплитудой смещения поршня l_0 = 2.90 мм. Сплошная линия соответствует теории, построенной по второму выражению в (28) при b_2 = 0.25, точки – экспериментальные результаты из [18]. Наблюдается хорошее качественное и количественное согласование результатов.

Распределения скорости по длине трубы для L_0 = 1.7065 м и L_0 = 1.2864 м соответственно даны на рис. 2а, 2б. Здесь сплошные линии – теория по первому выражению в (29) при b_2 = 0.25, штриховые линии – расчет по (29) в случае b_2 = 0.08. Видно, что для b_2 = 0.08 максимум амплитуды колебаний скорости оказывается в полтора раза больше, чем для b_2 = 0.25, кроме того, и минимум, и максимум для меньшего значения b_2 оказываются смещенными в сторону открытого конца трубы. Сравнение рис. 2а и рис. 2б также показывает, что в случае более короткой трубы амплитуда колебаний скорости несколько выше, чем в более длинной трубе.

Эпюры давления для двух длин труб L_0 = = 1.7065 м и L_0 = 1.2864 м, представлены на рис. 3а и рис. 3б соответственно. Сплошная линия – теоретический расчет по второму выражению в (29) при b_2 = 0.25, штриховая линия – теория при b_2 = = 0.08, точки – экспериментальные данные [18]. Видно хорошее качественное согласование теории и эксперимента. Теория при b_2 = 0.08 лучше согласуется с экспериментом на второй четверти, однако при приближении к открытому концу трубы расхождения возрастают. Для теоретических данных, рассчитанных при b_2 = 0.25, наоборот, во второй четверти трубы наблюдаются существен-

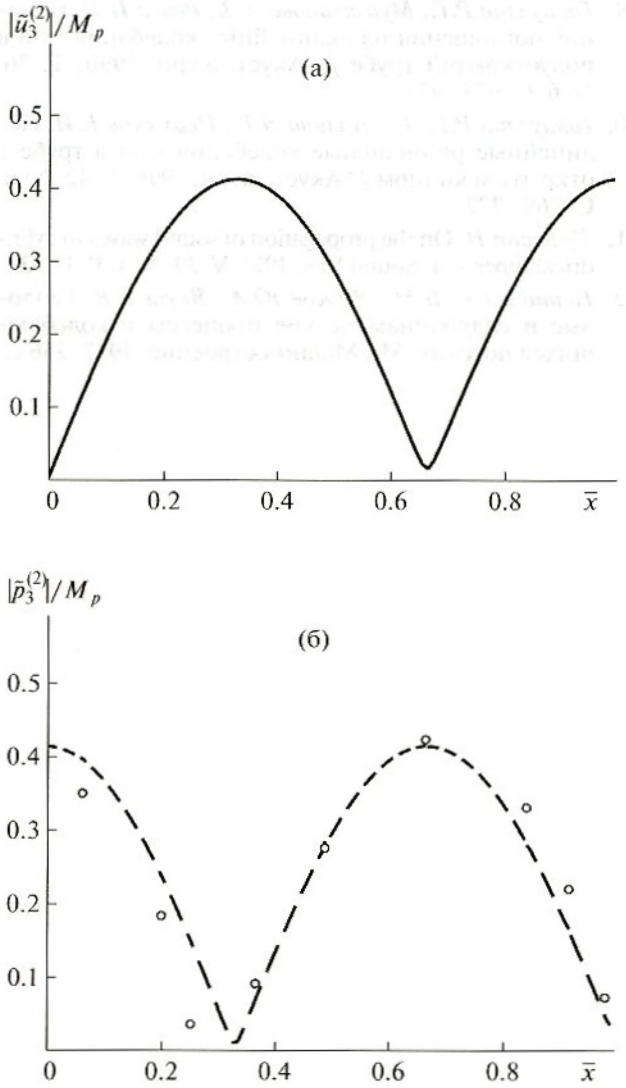

Рис. 5. Распределения скорости $\left|\tilde{u}_3^{(2)}\right|/M_p$ (а) и давления $\left|\tilde{p}_3^{(2)}\right|/M_p$ (б) по длине трубы при $L_0 = 1.7065$ м. Сплошные линии – теория (35), точки – экспериментальные данные [18].

ные количественные расхождения, при приближении же к открытому концу согласование с экспериментом становится удовлетворительным.

На рис. 4 представлена зависимость $r_3^{(2)}/M_p$ от безразмерной частоты $z = (2/\pi)(\omega L_0/c_0)$. Сплошная линия – результат расчета по (41) при $\sigma_0 = 0.6133$, штриховая линия – расчет по (41) при $\sigma_0 = 1.5$, точки – экспериментальные данные [18]. Видно хорошее качественное совпадение, при этом количественное совпадение лучше в случае, когда $\sigma_0 = 1.5$.

На рис. 5а и рис. 5б сплошными линиями представлены эпюры скорости $\left|\tilde{u}_3^{(2)}\right|/M_p$ по (34) и давления $\left|\tilde{p}_3^{(2)}\right|/M_p$ по (35) соответственно, точками – экспериментальные данные [18] при $L_0 = 1.7065$ м. Видно достаточно хорошее качественное и количественное совпадение результатов.

Для проверки принятых допущений оценим значение числа Струхаля Sh для условий проведенных расчетов. Подставляя рассчитанные значения скорости колебаний газа на открытом конце трубы для соответствующих параметров, имеем $\mathrm{Sh} \approx 0.18$. Таким образом, условие $\mathrm{Sh} \ll 1$ выполняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Roh H.S., Arnott W.P., Raspet R., Sabatier J.M.* Measurement and calculation of acoustic propagation constants in arrays of small air-filled rectangular tubes // J. Acoust. Soc. Am. 1991. V. 89. № 6. P. 2617–2623.
2. *Kordomenos J., Atchley A.A., Raspet R., Bass H.E.* Experimental study of a thermoacoustic termination of a traveling-wave tube // J. Acoust. Soc. Am. 1995. V. 98. № 3. P. 1623–1628.
3. *Peat K.S.* Convected acoustic wave motion a long a capillary duct with an axial temperature gradient // J. Sound Vibr. 1997. V. 203. № 5. P. 855–866.
4. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
5. *Ilgamov M.A., Zaripov R.G., Galiullin R.G., Repin V.B.* Nonlinear oscillations of a gas in a tube // Appl. Mech. Rev. 1996. V. 49. № 3. P. 137–154.
6. *Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И.* Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике. М.: Физматлит, 2008. 496 с.
7. *Rudenko O.V.* Nonlinear standing waves, resonance phenomena, and frequency characteristics of distributed systems // Acoust. Phys. 2009. V. 55. № 1. P. 27–54.
8. *Merkli P., Thomann H.* Thermoacoustic effect in a resonance tube // J. Fluid Mech. 1975. V. 70. № 1. P. 161–175.
9. *Rott N.* Thermoacoustics // Adv. Appl. Mech. 1980. V. 20. P. 135–175.
10. *Галиуллин Р.Г., Тимохина Л.А., Филипов С.Е.* Акустические течения при резонансных колебаниях газа в цилиндрической трубе // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 5. С. 611–615.
11. *Галиуллин Р.Г., Тимохина Л.А., Филипов С.Е.* Вторичные течения при распространении волн в узких трубах // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 2. С. 281–283.
12. *Ткаченко Л.А., Сергиенко М.В.* Резонансные колебания газа в открытой трубе в безударно-волновом режиме // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 1. С. 44–51.
13. *Keller J.J.* Subgarmonic non-linear acoustic resonances in open tubes. Part I. Theory // ZAMP. 1977. V. 28. № 3. P. 419–431.
14. *Ткаченко Л.А.* Нелинейные колебания газа в открытой трубе при негармоническом возбуждении // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 2. С. 160–165.

15. *Hudson G.E.* Thrust on a piston driven half-open tube // J. Acoust. Soc. Am. 1955. V. 42. № 3. P. 406–416.
16. *Галиуллин Р.Г., Пермяков Е.И.* Течение и теплообмен в нестационарной струе, генерируемой колебаниями газа большой амплитуды // ИФЖ. 1990. Т. 58. № 5. С. 747–752.
17. *Chester W.* Resonant oscillations of a gas in an open-ended tube // Proc. Roy. Soc. London. 1981. A377. P. 449–467.
18. *Stuhltrager E., Thomann H.* Oscillations of a gas in an open-ended tube near resonance // ZAMP. 1986. V. 37. № 2. P. 155–175.
19. *Галиуллин Р.Г., Мурзаханова А.З., Ревва И.П.* Влияние поглощения на нелинейные колебания газа в полуоткрытой трубе // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 6. С. 973–977.
20. *Галиуллин Р.Г., Галиуллина Э.Р., Пермяков Е.И.* Нелинейные резонансные колебания газа в трубе с открытым концом // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 6. С. 769–772.
21. *Tijdeman H.* On the propagation of sound waves in cylindrical tubes // J. Sound Vibr. 1975. V. 39. № 1. P. 1–33.
22. *Галицейский Б.М., Рыжов Ю.А., Якуш Е.В.* Тепловые и гидродинамические процессы в колеблющихся потоках. М.: Машиностроение, 1977. 256 с.