

УДК 534.2

ПУЛЬСАЦИИ ГАЗОВОГО ВКЛЮЧЕНИЯ
ВБЛИЗИ МЕЖФАЗНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

© 2017 г. А. О. Максимов, Ю. А. Половинка

Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО

РАН 690041 Владивосток, ул. Балтийская 43

E-mail: maksimov@poi.dvo.ru

Поступила в редакцию 18.04.2016 г.

Исследование заполняет пробел, существующий в изучении акустических проявлений газового включения, расположенного вблизи межфазной поверхности, и позволяет аналитически описать поведение пузырька на малом (сопоставимом с его размером) расстоянии от границы. Показано, что использование специфической (бисферической) системы координат, позволяет провести разделение переменных и приводит к модифицированному уравнению Рэлея. Получены явные зависимости собственной частоты и затухания от расстояния до границы и физических параметров контактирующих сред.

Ключевые слова: пузырек, собственная частота, затухание, бисферические координаты.

DOI: 10.7868/S0320791916060095

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к динамике пузырька, расположенного вблизи границы, обусловлен широким спектром приложений этой задачи в геофизике, медицине, химических технологиях. Страсберг [1] впервые оценил влияние границы на собственную частоту одиночного пузырька. Показано, что задача о пульсациях пузырька вблизи абсолютно жесткой границы эквивалентна поведению двух одинаковых пузырьков в свободном пространстве, если учитывать только монополярную составляющую во взаимодействии пузырька и его зеркального изображения.

Пассивные акустические методы применялись для диагностики пузырьков в лабораторных и природных условиях на протяжении нескольких десятилетий [2–6]. Эта методика широко используется в океанологии для изучения подводных газовых сипов и грязевых вулканов [7–10]. Характерный сигнал, сопровождающий рождение пузырька, излучается в течение времени, когда пузырек находится на расстоянии порядка нескольких радиусов от границы. Широко используемая модель свободного пузырька не является адекватной для его описания. Изучению близкой проблемы – акустики газонасыщенных осадков – посвящены недавние публикации [11, 12].

Существуют многообразные биомедицинские методики, которые используют микропузырьки в качестве ультразвуковых контрастных агентов. В большинстве практических случаев микропузы-

рек пульсирует в непосредственной близости от стенок сосудов. Количество публикаций, посвященных этой проблеме, крайне велико, упомянем только часть из них [13–19]. Попытки найти ответ на вопрос, как граница сред с разными механическими свойствами влияет на акустический отклик микропузырька, были предприняты в серии работ Дойникова и его соавторов [20–24]. Изучению близкой проблемы – рассеяния пространственно-неоднородных звуковых полей сферической частицей – посвящена работа [25].

Традиционный подход, использующий метод зеркальных источников [1], позволяет получить лишь достаточно грубое описание пульсаций пузырька вблизи границы, поскольку его применимость ограничивается условием малости размеров пузырька по сравнению с расстоянием до ограничивающей поверхности. Возможность найти решение в интервале дистанций, сопоставимых с размером пузырька, обусловлена наличием внутренней симметрии, приводящей к существованию 17 координатных систем, в которых при решении уравнения Лапласа переменные разделяются [26]. Тороидальные и бисферические координаты принадлежат к этому списку. Они успешно применялись при описании поведения закрепленных включений [27, 28] и пузырьков, располагающихся вблизи жесткой [29] и импедансной [30] границы. Поскольку ни верхний (илистый или песчаный) слой осадков, ни биологические ткани не являются жесткой средой, в настоящей статье приводится решение за-

дачи об объемных колебаниях пузырька вблизи межфазной поверхности между двумя жидкостями, что является альтернативной моделью для рассматриваемых сред (для осадков – это традиционная модель волновода Пекериса).

МОДЕЛЬ

Рассмотрим пузырек, находящийся в жидкости плотности ρ_1 , скорость звука в которой равна c_1 . Центр пузырька находится на расстоянии h от границы со второй средой – жидкостью плотности ρ_2 , со скоростью звука c_2 . Равновесная форма пузырька – сфера радиуса R_0 . Предполагается, что размер пузырька и расстояние до границы много меньше характерных длин волн λ , присутствующих в задаче: $\varepsilon = (R_0, h)/\lambda \ll 1$. Будем использовать подход, предложенный в работе [31], и метод асимптотических разложений, в котором малым параметром является отношение ε размеров пузырька и расстояния до границы к длине волны. Вблизи пузырька среды можно считать несжимаемыми. Вдали от пузырька следует учитывать конечную скорость распространения возмущений.

Потенциал акустического поля в среде (1) $\varphi(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца и допускает интегральное представление вида

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0+S_{int}} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \right] dS, \quad (1)$$

где $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ – функция Грина, \mathbf{r} – положение точки наблюдения, \mathbf{r}' – точки на поверхности S_0 пузырька и межфазной поверхности S_{int} , $\partial/\partial n'$ – производная по нормали (нормаль направлена внутрь пузырька и внутрь среды (2)). Мы представим решение для собственных колебаний пузырька, поэтому в правой части уравнения (1) отсутствует член с источником. На межфазных поверхностях потенциал удовлетворяет граничным условиям непрерывности смещений и равенства сил.

Выбор функции Грина, удовлетворяющей граничным условиям на поверхности, разделяющей жидкости, обращает в нуль интеграл по S_{int} [31], так что в уравнении (1) остается только интеграл по поверхности пузырька. Эта функция Грина для верхнего полупространства (среды (1)) имеет вид [31]

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{ik_0}{2\pi} \int_0^{\pi/2-i\infty} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\chi \times \exp\{i[\alpha(x-x') + \beta(y-y')]\} \times \times [\exp(i\gamma|z-z'|) + V(\theta)\exp[i\gamma(z+z')]]. \quad (2)$$

Здесь $\alpha = k_0 \sin \theta \cos \chi$, $\beta = k_0 \sin \theta \sin \chi$, $\gamma = k_0 \cos \theta$, $k_0 = \omega/c_1$, где ω – частота звука. Углы θ и χ определяют направление плоской волны, включая комплексные значения угла θ . В отличие от работы [31] используется система координат с центром, лежащим в граничной плоскости, и осью z , проходящей через центр пузырька. Коэффициент отражения плоской волны на границе раздела двух жидкостей $V(\theta)$ описывается формулой

$$V(\theta) = \frac{m \cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{m \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}, \quad (3)$$

где $m = \rho_2/\rho_1$, $n = c_1/c_2$.

Решение уравнения (1) в пределах волновой зоны можно искать в виде ряда по малому параметру ε , характеризующему малость размеров пузырька и расстояния до границы по сравнению с характерной длиной волны:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) + \varepsilon \varphi_1(\mathbf{r}) + \dots, \quad (4)$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \varepsilon G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \dots$$

Для расчета собственной частоты пульсаций и радиационного затухания достаточно ограничиться двумя первыми членами разложения [32]. Уравнения нулевого и первого порядка имеют вид

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left[G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi_0(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \varphi_0(\mathbf{r}') \frac{\partial G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \right] dS,$$

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left[G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{r}')}{\partial n'} + G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi_0(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \right. \quad (5)$$

$$\left. - \varphi_1(\mathbf{r}') \frac{\partial G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - \varphi_0(\mathbf{r}') \frac{\partial G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \right] dS.$$

Эту систему следует дополнить кинематическим и динамическим граничными условиями на поверхности пузырька.

Динамическое граничное условие состоит в том, что давления в газе и жидкости у стенки пузырька различаются только за счет поверхностного натяжения. Если $P_l = P(\mathbf{r} \in S_0, t)$, $P_g = P_0(V_0/V)^\gamma$ – давления в жидкости и газе, то

$$P_l = P_g - \sigma(\nabla \cdot \mathbf{n}), \quad (6)$$

где \mathbf{n} – единичная нормаль к поверхности пузырька, σ – коэффициент поверхностного натяжения. Полагается, что уравнение состояния газа в пузырьке описывается политропой с показателем γ , V и V_0 – мгновенное и равновесное значения объема, P_0 – равновесное давление газа в пузырьке. Кинематическое граничное условие на стенке пузырька имеет вид

$$\zeta = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_{\mathbf{r} \in S_0}. \quad (7)$$

Здесь ζ – нормальное смещение стенки пузырька, $\mathbf{v} = \nabla\varphi$.

РЕШЕНИЕ

Первый шаг в решении системы уравнений (5) состоит в определении первых двух членов асимптотического разложения интегрального представления для функции Грина (2). Вклад первого слагаемого во второй строчке уравнения (2) приводит к функции Грина для свободного пространства, и первые члены асимптотического разложения вычисляются достаточно просто:

$$G_+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp(ik_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + ik_0. \quad (8)$$

Процедура вычисления вклада от второго слагаемого, для обозначения которого будет использоваться символ $G_-(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, громоздка и состоит в разбиении пути интегрирования на два интервала: $[0, \pi/2]$, $[\pi/2, -i\infty]$ и нахождении асимптотик в каждом из них. Поскольку вычисления сложные, приводим сразу окончательный результат:

$$G_-(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \approx \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' + 2z'\mathbf{e}_z|} \frac{m-1}{m+1} + ik_0 \left[\frac{m^2 + 1 - 2mn}{m^2 - 1} + 2m^2 C(n, M) \right],$$

где

$$C(n, m) = \begin{cases} -\frac{(n^2 - 1)^{1/2}}{(m^2 - 1)^{3/2}} \ln \left[\frac{1 - \sqrt{\frac{(n-1)(m-1)}{(n+1)(m+1)}}}{1 + \sqrt{\frac{(n-1)(m-1)}{(n+1)(m+1)}}} \right], & n > 1, m > 1; \\ -\frac{2(n^2 - 1)^{1/2}}{(1 - m^2)^{3/2}} \arctg \left[\frac{(n-1)(1-m)}{\sqrt{(n+1)(m+1)}} \right], & n > 1, m < 1; \\ -\frac{2(1 - n^2)^{1/2}}{(m^2 - 1)^{3/2}} \arctg \left[\frac{(1-n)(m-1)}{\sqrt{(n+1)(m+1)}} \right], & n < 1, m > 1; \\ -\frac{(1 - n^2)^{1/2}}{(1 - m^2)^{3/2}} \ln \left[\frac{1 - \sqrt{\frac{(1-n)(1-m)}{(n+1)(m+1)}}}{1 + \sqrt{\frac{(1-n)(1-m)}{(n+1)(m+1)}}} \right], & n < 1, m < 1. \end{cases} \quad (9)$$

Таким образом, функции Грина нулевого и первого приближений имеют следующий вид:

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' + 2z'\mathbf{e}_z|} \frac{m-1}{m+1}, \quad (10)$$

$$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = (i\omega/c)\tilde{G}_1, \quad \tilde{G}_1 = 2m \left[\frac{(m-n)}{m^2 - 1} + mC(n, m) \right].$$

Примечательно, что поправка первого порядка является постоянной, не зависящей от пространственных координат. В выражении для поправки нулевого порядка \mathbf{e}_z – единичный вектор в направлении оси z . Функция Грина нулевого приближения допускает следующую интерпретацию: она состоит из двух монопольных источников в несжимаемой жидкости – прямого и зеркального относительно межфазной поверхности, причем интенсивность зеркального источника такова, что обеспечивает выполнение граничного условия. Для очень тяжелой нижней жидкости

$m \rightarrow \infty$ она соответствует жесткой границе, а для противоположного случая – легкой жидкости $m \rightarrow 0$ – абсолютно мягкой. Когда плотности жидкостей одинаковы, то $m = 1$, и мы получаем функцию Грина в свободном пространстве.

Решение нулевого приближения $\varphi_0(\mathbf{r})$, описывающее поле в несжимаемой среде, удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям (6), (7). Связь между давлением и потенциалом задается уравнением Бернулли:

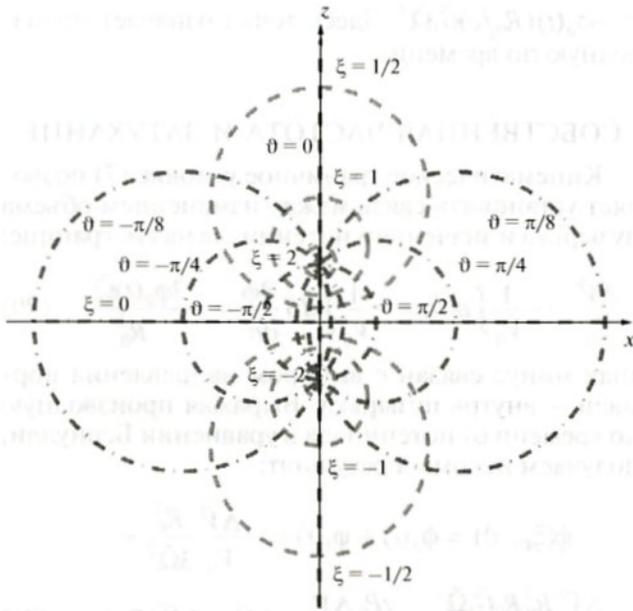


Рис. 1. Иллюстрация бисферических координат. Положение данной точки задается пересечением сферы, поверхности, образованной вращением дуги с центром в точке $(x = a \operatorname{ctg} \vartheta, z = 0)$ с радиусом $a/|\sin \vartheta|$ вокруг оси Oz , и азимутальной плоскости. Поверхность $\xi = \xi_0$ – сфера с центром в точке $(z = a \operatorname{ch} \xi_0, x = y = 0)$ и радиусом $a/|\operatorname{sh} \xi_0|$.

$$p_1 \left[\phi(\mathbf{r}, t) - \phi_\infty(t) + v^2(\mathbf{r}, t)/2 \right] = -(P(\mathbf{r}, t) - P_\infty). \quad (11)$$

Здесь P_∞ – равновесное давление в жидкости вдали от пузырька. Поскольку потенциал в уравнении Бернулли определен с точностью до произвольной функции времени, будем в дальнейшем полагать $\phi_\infty(t) = 0$. В работе анализируется линейная задача, поэтому пренебрегается нелинейным членом $v^2/2$.

При пульсациях давление в пузырьке меняется во времени, но остается пространственно однородным, поскольку длина волны в газе превышает размеры пузырька в силу наличия малого параметра ϵ . Поверхность такого гомобарического пузырька будет эквипотенциальной, если пренебречь поверхностным натяжением в динамическом граничном условии (6). Это условие накладывает ограничение на возможный спектр размеров пузырьков $R_0 > 10$ мкм. Данное приближение, имеющее прямые аналогии с электростатикой, впервые было использовано в работе [33] и достаточно широко применялось в дальнейшем [27–29, 34, 35].

Возможность нахождения аналитического решения связана с выбором бисферической систе-

мы координат, допускающей разделение переменных при решении уравнения Лапласа [26]. Бисферические координаты (ξ, ϑ, ψ) связаны с декартовыми координатами (x, y, z) следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= a \frac{\sin \vartheta \cos \psi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \vartheta}, & y &= a \frac{\sin \vartheta \sin \psi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \vartheta}, \\ z &= a \frac{\operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \vartheta}, & a &= R_0 \operatorname{sh} \xi_0, \\ \xi_0 &= \ln \left[\frac{h}{R_0} + \sqrt{\left(\frac{h}{R_0} \right)^2 - 1} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Переменная ξ изменяется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, а углы ϑ и ψ – от 0 до π и от 0 до 2π соответственно. Поверхность ξ_0 – пузырек, а $\xi = 0$ – граничная плоскость между жидкостями. Рисунок 1 иллюстрирует структуру координатных поверхностей.

Общее решение уравнения Лапласа, обладающее предполагаемой осевой симметрией, имеет следующий вид [29]:

$$\begin{aligned} \varphi_0(\xi, \vartheta) &= \sqrt{\operatorname{ch} \xi - \cos \vartheta} \bar{\varphi}_0(\xi, \vartheta), \\ \bar{\varphi}_0(\xi, \vartheta) &= \varphi_b(\omega) \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n e^{(n+1/2)\xi} + b_n e^{-(n+1/2)\xi} \right] P_n(\vartheta), \end{aligned} \quad (13)$$

где $P_n(\vartheta)$ – полиномы Лежандра, $\varphi_b(\omega) \equiv \varphi_0(\xi, \vartheta)|_{\xi=\xi_0}$ – значение потенциала на стенке пузырька, постоянные a_n и b_n определяются из граничных условий. В свою очередь, функции Грина имеют следующее представление:

$$\begin{aligned} G_+^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = G_+^0(\xi, \vartheta, \psi | \xi', \vartheta', \psi') = \\ &= \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \xi - \cos \vartheta} \sqrt{\operatorname{ch} \xi' - \cos \vartheta'}}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \times \\ &\times \cos[m(\psi - \psi')] P_n^m(\vartheta) P_n^m(\vartheta') e^{-(n+1/2)(\xi - \xi')}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} G_-^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' + 2z' \mathbf{e}_z|} \frac{m-1}{m+1} = \\ &= G_+^0(\xi, \vartheta, \psi | -\xi', \vartheta', \psi') \frac{m-1}{m+1} = \\ &= \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \xi - \cos \vartheta} \sqrt{\operatorname{ch} \xi' - \cos \vartheta'}}{a} \frac{m-1}{m+1} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \cos[m(\psi - \psi')] \times \\ &\times P_n^m(\vartheta) P_n^m(\vartheta') e^{-(n+1/2)(\xi + \xi')}. \end{aligned} \quad (15)$$

Поскольку искомое решение $\varphi_0(\xi, \vartheta)$ не зависит от азимутального угла, в поверхностные интегралы в уравнении (5) дают вклад только члены с $m = 0$.

Подставляя выражения (13)–(15) в уравнение нулевого приближения (5) и приравнявая коэффициенты при $e^{-(n+1/2)\xi} P_n(\vartheta)$, $e^{(n+1/2)\xi} P_n(\vartheta)$ в левой и правой частях уравнения, получаем систему алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов a_n , b_n . При вычислении интегралов используются следующие вспомогательные формулы:

$$dS = a^2 \frac{\sin \vartheta' d\vartheta' d\psi'}{(\operatorname{ch} \xi_0 - \cos \vartheta')^2}, \quad \frac{\partial}{\partial n'}(\dots) = \frac{(\operatorname{ch} \xi_0 - \cos \vartheta')}{a} \frac{\partial}{\partial \xi}(\dots)_{\xi=\xi_0}, \quad (16)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} \xi_0 - \cos \vartheta'}} = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)\xi_0} P_n(\vartheta').$$

Алгебраические уравнения и их решения имеют вид

$$a_n = \frac{1}{2} e^{-(n+1/2)\xi_0} \left[\sqrt{2} e^{-(n+1/2)\xi_0} + e^{(n+1/2)\xi_0} a_n - e^{-(n+1/2)\xi_0} b_n \right], \quad b_n = \frac{1}{2} \frac{m-1}{m+1} e^{-(n+1/2)\xi_0} \times \left[\sqrt{2} e^{-(n+1/2)\xi_0} + e^{(n+1/2)\xi_0} a_n - e^{-(n+1/2)\xi_0} b_n \right], \quad (17)$$

$$a_n = \frac{\sqrt{2}(m+1)e^{-(n+1/2)\xi_0}}{(m+1)e^{(n+1/2)\xi_0} + (m-1)e^{-(n+1/2)\xi_0}}, \quad b_n = \frac{\sqrt{2}(m-1)e^{-(n+1/2)\xi_0}}{(m+1)e^{(n+1/2)\xi_0} + (m-1)e^{-(n+1/2)\xi_0}}.$$

Тогда для аналитического решения уравнения нулевого приближения имеем:

$$\varphi_0(\xi, \vartheta) = \sqrt{\operatorname{ch} \xi - \cos \vartheta} \varphi_b(\omega) \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)\xi_0} \times \left[\frac{(m+1)e^{(n+1/2)\xi} + (m-1)e^{-(n+1/2)\xi}}{(m+1)e^{(n+1/2)\xi_0} + (m-1)e^{-(n+1/2)\xi_0}} \right] P_n(\vartheta). \quad (18)$$

При определении решения первого приближения воспользуемся тем обстоятельством, что эта поправка для свободного пузырька и пузырька у жесткой границы не зависит от пространственных координат. Подставляя $\varphi_1(\xi, \vartheta) = \operatorname{const}$ в уравнение первого приближения, находим

$$\varphi_1 = \varphi_b(\omega) (i\omega/c) R_0 \tilde{G}_1 \tilde{\Omega}^2, \quad \tilde{\Omega}^2 = 1 - 2 \operatorname{sh} \xi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m-1)e^{-(2n+1)\xi}}{(m+1)e^{(2n+1)\xi_0} + (m-1)}. \quad (19)$$

Начальной точкой нашего рассмотрения было уравнение Гельмгольца. Для получения аналога уравнения Рэлея следует перейти к временным переменным, совершая обратное преобразование Фурье по частотам $\varphi_b(\omega) \rightarrow \varphi_b(t)$, $\varphi_1(\omega) \rightarrow \varphi_1(t) =$

$= -\dot{\varphi}_b(t) (R_0/c) \tilde{G}_1 \tilde{\Omega}^2$. Здесь точка означает производную по времени.

СОБСТВЕННАЯ ЧАСТОТА И ЗАТУХАНИЕ

Кинематическое граничное условие (7) позволяет установить связь между изменением объема пузырька и значением потенциала на его границе:

$$\frac{\Delta \dot{V}}{V_0} = -\frac{1}{V_0} \int dS \xi = -\frac{1}{V_0} \int dS \frac{\partial \Phi}{\partial n'} = -\frac{3\varphi_b(t) \tilde{\Omega}^2}{R_0^2}, \quad (20)$$

знак минус связан с выбором направления нормали – внутрь пузырька. Выражая производную по времени от потенциала в уравнении Бернулли, получаем искомый результат:

$$\varphi(\xi_0, \vartheta) = \dot{\varphi}_b(t) + \dot{\varphi}_1(t) = -\frac{\Delta \ddot{V}}{V_0} \frac{R_0^2}{3\tilde{\Omega}^2} + \frac{\Delta \ddot{V}}{V_0} \frac{R_0^2 \tilde{G}_1 \tilde{\Omega}^2}{3\tilde{\Omega}^2 c} = \frac{\gamma P_0 \Delta V}{\rho_1 V_0}, \quad \Delta \ddot{V} - \Delta \ddot{V} (R_0/c) \times \times \tilde{G}_1 \tilde{\Omega}^2 + \Omega_*^2 \Delta V = 0, \quad \Omega_*^2 = \Omega_0^2 \tilde{\Omega}^2, \quad \Omega_0^2 = \frac{3\gamma P_0}{\rho_1 R_0^2}, \quad (21)$$

где Ω_0 – собственная частота свободного пузырька. Производная третьего порядка приводит к известным проблемам при описании радиационного затухания [32]. Для ее преодоления, следуя [32], используем тот факт, что с точностью до членов второго порядка по ε $\Delta \ddot{V} \approx -\Omega_*^2 \Delta \dot{V}$. Это приводит к окончательному виду модифицированного уравнения Рэлея:

$$\Delta \ddot{V} + v \Delta \dot{V} + \Omega_*^2 \Delta V = 0, \quad v = \frac{\Omega_0^2 R_0}{c} \tilde{G}_1 \tilde{\Omega}^4. \quad (22)$$

Наличие межфазной поверхности приводит к изменению инерционной массы пузырька и изменяет его собственную частоту Ω_* и затухание v .

Пространственные вариации Ω_* и v определяются поведением множителя $\tilde{\Omega}^2(\xi_0)$, в котором следует выделить явную зависимость от расстояния до границы h и размера R_0 пузырька:

$$\tilde{\Omega}^2 = 1 - 2(m-1) \sqrt{(h/R_0)^2 - 1} \times \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[h/R_0 + \sqrt{(h/R_0)^2 - 1} \right]^{-(2n+1)}}{(m+1) \left[h/R_0 + \sqrt{(h/R_0)^2 - 1} \right]^{(2n+1)} + (m-1)}. \quad (23)$$

На больших расстояниях от границы $h \gg R_0$ в ряду следует оставить только первый член, что дает $\tilde{\Omega}^2 \approx 1 - [(m-1)/(m+1)] \times (R_0/2h)$.

Для тяжелой нижней жидкости $m \rightarrow \infty$ выражение для собственной частоты совпадает с формулой (14) работы [29] для частоты пузырька у аб-

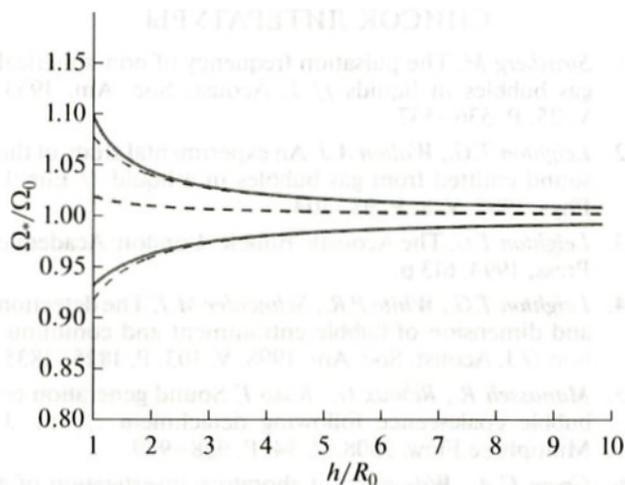


Рис. 2. Нормированная собственная частота $\tilde{\Omega} = \Omega_*/\Omega_0$ как функция расстояния до границы h/R_0 . Нижняя сплошная кривая соответствует пузырьку над слоем осадков $m = 1.95$. Верхняя сплошная кривая – пузырек в осадках $m = 0.51$. Жирная штрихованная линия описывает зависимость собственной частоты для пузырька в крови вблизи стенки артерии $m = 0.86$. Тонкие штрихованные линии соответствуют учету только монополюльной составляющей во взаимодействии пузырька и его зеркального изображения.

солютно жесткой границы. Формула для радиационного затухания переходит при этом в формулу (40) этой статьи. Для легкой жидкости $m \rightarrow 0$ выражение для собственной частоты переходит в формулы (23), (24) работы [35], описывающие собственную частоту пузырька у свободной поверхности. Радиационное затухание в этом пределе обращается в нуль, поскольку вблизи свободной поверхности пузырек совершает не монополюльные, а дипольные колебания. Когда среды имеют одинаковые параметры: $m = 1, n = 1$, собственная частота и затухание переходят в соответствующие значения для свободного пузырька.

Рисунок 2 иллюстрирует поведение безразмерной собственной частоты $\tilde{\Omega} = \Omega_*/\Omega_0$ в зависимости от нормированного расстояния до границы h/R_0 для характерных параметров сред. Типичное отношение плотности осадков к плотности воды: $m = 1.95$. Нижняя сплошная кривая описывает поведение собственной частоты пузырька, находящегося в жидкости, при его удалении от границы, а верхняя – поведение собственной частоты пузырька, находящегося в осадках. Тонкие штрихованные линии соответствуют приближенному выражению для собственной частоты, когда в бесконечном ряду учитывается только первое слагаемое, что соответствует учету только монополюльной составляющей во взаимодействии пузырька и его зеркального изображения. Вычисле-

ния для пузырька, находящегося в крови вблизи стенки артерии [22] $m = 0.9/1.05 = 0.86$, изображены жирной штрихованной линией.

Проследим поведение радиационного затухания в предельных случаях:

$$v = \frac{2\Omega_0^2 R_0}{c} \tilde{\Omega}^4 \left[\frac{m(m-n)}{m^2-1} + mC(m, n) \right]. \quad (24)$$

При $m \rightarrow 1$ $(\arctg(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} x - x^3/3, \ln(1+x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} x - x^2/2 + x^3/3)$ коэффициент затухания стремится к $v \rightarrow (\Omega_0^2 R_0/c) \times (2/3)(1+n+n^2) \times (1+n)^{-1}$ и в случае равенства скоростей в обеих средах ($n = 1$) совпадает с затуханием свободного пузырька. При $n \rightarrow 1$ величина $v \rightarrow (\Omega_0^2 R_0/c) \times \tilde{\Omega}^4 2m(1+m)^{-1}$. Для тяжелой жидкости это выражение переходит в затухание пузырька у жесткой границы, а для легкой стремится к нулю (монополюльное излучение отсутствует). При $m \rightarrow 1$ оно переходит в затухание свободного пузырька.

Рисунок 3 иллюстрирует поведение безразмерного затухания v/v_0 (нормировка выполняется на значение затухания для свободного пузырька $v_0 = (\Omega_0^2 R_0 c^{-1})$) в зависимости от расстояния до границы h/R_0 для характерных параметров сред. Коэффициент затухания вычислен на резонансной частоте, и его пространственная изменчивость определяется только множителем $\tilde{\Omega}^4$. По этой причине для пузырька у слоя осадков (верхняя кривая на рис. 3) коэффициент затухания уменьшается при приближении к границе, поскольку понижается частота $\tilde{\Omega}$. Для пузырька, находящегося в слое осадков, коэффициент затухания растет при приближении к границе (нижняя сплошная кривая на рис. 3), поскольку увеличивается частота $\tilde{\Omega}$. При удалении от границы, но на расстояниях, много меньших длины волны, затухание колебаний пузырька над слоем осадков выше, чем в случае свободного пузырька, поскольку осадки – более тяжелая среда с меньшей сжимаемостью, наличие которой эквивалентно присутствию зеркального пузырька, колеблющегося синфазно. Наоборот, для пузырька в слое осадков зеркальный пузырек будет колебаться противофазно, и это уменьшит затухание. Различие параметров среды для пузырька в крови – штрихованная жирная линия на рис. 3 – столь незначительно, что зафиксировать отличия в параметрах его оциллирующий крайне сложно.

В настоящей работе продемонстрирована эффективность предложенного Е.Л. Шендеровым подхода [31] для описания динамики газовых включений вблизи межфазной поверхности. По-

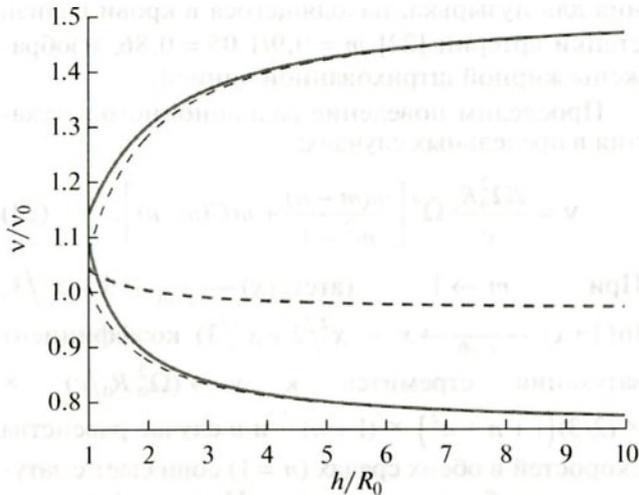


Рис. 3. Нормированный коэффициент радиационно-го затухания v/v_0 как функция расстояния до границы h/R_0 . Верхняя сплошная кривая соответствует пузырьку над слоем осадков $m = 1.95$, $n = 0.86$. Нижняя сплошная кривая – пузырек в осадках $m = 0.51$, $n = 1.16$. Жирная штрихованная линия описывает зависимость собственной частоты для пузырька в крови вблизи стенки артерии $m = 0.86$, $n = 1.08$. Тонкие штрихованные линии соответствуют учету только монополюльной составляющей во взаимодействии пузырька и его зеркального изображения.

лученные результаты относятся к относительно простому случаю – границе между двумя жидкими средами. Однако универсальность подхода [31] позволяет, в принципе, получить решение гораздо более сложной задачи о поведении включений вблизи границы жидкости и упругой среды.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные исследования позволили описать объемные колебания пузырька, расположенного в интервале малых, вплоть до касания, расстояний от межфазной границы между двумя жидкими средами. Получены аналитические формулы, определяющие зависимость собственной частоты и радиационного затухания от размеров пузырька, расстояния до границы и физических параметров сред. Показано, что использование приближенной модели, учитывающей только вклад монополюльной составляющей во взаимодействии пузырька и его зеркального изображения, обеспечивает хорошую аппроксимацию точного решения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 14-05-00334а) и ТОИ ДВО РАН (проект № 0201363045).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Strasberg M.* The pulsation frequency of non-spherical gas bubbles in liquids // *J. Acoust. Soc. Am.* 1953. V. 25. P. 536–537.
2. *Leighton T.G., Walton A.J.* An experimental study of the sound emitted from gas bubbles in a liquid // *Eur. J. Phys.* 1987. V. 8. P. 98–104.
3. *Leighton T.G.* The Acoustic Bubble. London: Academic Press, 1994. 613 p.
4. *Leighton T.G., White P.R., Schneider M.F.* The detection and dimension of bubble entrainment and comminution // *J. Acoust. Soc. Am.* 1998. V. 103. P. 1825–1835.
5. *Manasseh R., Riboux G., Risso F.* Sound generation on bubble coalescence following detachment // *Int. J. Multiphase Flow.* 2008. V. 34. P. 938–949.
6. *Green C.A., Wilson P.S.* Laboratory investigation of a passive acoustic method for measurement of underwater gas seep ebullition // *J. Acoust. Soc. Am.* 2012. V. 131. P. EL61–EL66.
7. *Leifer I., Tang D.* The acoustic signature of marine seep bubble // *J. Acoust. Soc. Am.* 2007. V. 121. № 1. P. EL35–EL40.
8. *Leighton T.G., White P.R.* Quantification of undersea gas leaks from carbon capture and storage facilities, from pipelines and from methane seeps, by their acoustics emissions // *Proc. R. Soc. A* 2012. V. 468. P. 485–510.
9. *Саломатин А.С., Юсупов В.И., Верещагина О.Ф., Черных Д.В.* Акустическая оценка концентрации метана в водной толще в областях его пузырьковой разгрузки // *Акуст. журн.* 2014. Т. 60. № 6. С. 638–644.
10. *Максимов А.О.* Спектр шума “газового факела” // *Акуст. журн.* 2005. Т. 50. № 4. С. 435–442.
11. *Гусев В.А., Руденко О.В.* Нелинейный звук в слое газонасыщенных осадков // *Акуст. журн.* 2015. Т. 61. № 2. С. 169–181.
12. *Луньков А.А., Петников В.Г., Черноусов А.Д.* Оценка эффективной скорости звука в дне в мелководных акваториях // *Акуст. журн.* 2015. Т. 61. № 6. С. 745–752.
13. *Sassaroli E., Hynynen K.* Forced linear oscillations of microbubbles in blood capillaries // *J. Acoust. Soc. Am.* 2004. V. 115. P. 3235–3243.
14. *Sassaroli E., Hynynen K.* Resonance frequency of microbubbles in small blood vessels: a numerical study // *Phys. Med. Biol.* 2005. V. 50. P. 5293–5305.
15. *Qin S.P., Ferrara K.W.* The natural frequency of nonlinear oscillation of ultrasound contrast agents in microvessels // *Ultrasound in Med. & Biol.* 2007. V. 33. P. 1140–1148.
16. *Garbin V., Cojoc D., Ferrara K., Di Fabrizio E., Overvelde M.L.J., Van der Meer S.M., De Jong N., Lohse D., Versluis M.* Changes in microbubble dynamics near a boundary revealed by combined optical micromanipulation and high-speed imaging // *Appl. Phys. Lett.* 2007. V. 90. Article Number: 114103.
17. *Overvelde M.L.J., Garbin V., Dollet B., DeJong N., Lohse D., Versluis M.* Dynamics of coated microbubbles adherent to a wall // *Ultrasound in Med. & Biol.* 2011. V. 37. P. 1500–1508.
18. *Vos H.J., Dollet B., Bosch J., Versluis M., DeJong N.* Nonspherical vibrations of microbubbles in contact

- with a wall – a pilot study at low mechanical index // *Ultrasound in Med. & Biol.* 2008. V. 34. P. 685–688.
19. Vos H.J., Dollet B., Bosch J.G., Versluis M., DeJong N. Nonspherical shape oscillations of coated microbubbles in contact with a wall // *Ultrasound in Med. & Biol.* 2011. V. 37. P. 935–948.
 20. Doinikov A.A., Zhao S., Dayton P.A. Modeling of the acoustic response from contrast agent microbubbles near a rigid wall // *Ultrasonics*. 2009. V. 49. P. 195–201.
 21. Doinikov A.A., Bouakaz A. Theoretical investigation of shear stress generated by a contrast microbubble on the cell membrane as a mechanism for sonoporation // *J. Acoust. Soc. Am.* 2010. V. 128. P. 11–19.
 22. Doinikov A.A., Aired L., Bouakaz A. Acoustical scattering from a contrast agent microbubble near an elastic wall of finite thickness // *Phys. Med. Biol.* 2011 V. 56. P. 6951–6967.
 23. Doinikov A.A., Aired L., Bouakaz A. Dynamics of a contrast agent microbubble attached to an elastic wall // *IEEE Transactions on Medical Imaging*. 2012. V. 31. P. 654–662.
 24. Doinikov A.A., Aired L., Bouakaz A. Effect of an elastic wall on the dynamics of an encapsulated microbubble: A simulation study // *Ultrasonics*. 2013. V. 53. P. 23–28.
 25. Кобелев Ю.А. Рассеяние пространственно неоднородных звуковых полей сферической частицей // *Акуст. журн.* 2009. Т. 55. № 1. С. 21–31.
 26. Миллер У. Симметрия и разделение переменных. М: Мир, 1977.
 27. Maksimov A.O. On the volume oscillations of a tethered bubble // *J. Sound Vibr.* 2005. V. 283. P. 915–926.
 28. Maksimov A.O. Polovinka Y.A., Volume oscillations of a constrained bubble // *Phys. Fluids*. 2015. V. 25. Article Number: 062104.
 29. Maksimov A.O., Burov B.A., Salomatin A.S., Chernykh D.V. Sounds of marine seeps: A study of bubble activity near a rigid boundary // *J. Acoust. Soc. Am.* 2014. V. 136. № 3. P. 1065–1076.
 30. Maksimov A., Burov B., Salomatin A., Chernykh D. Sounds of undersea gas leaks / *Proc. 4st Pacific Rim Underwater Acoustic Conference*. October 8–11, 2013 Hangzhou, P.R. China. 2013.
 31. Шендеров Е.Л. Дифракция звука на упругой импедансной сфере, расположенной вблизи импедансной или упругой границы полупространства // *Акуст. журн.* 2002. Т. 48. № 5. С. 684–694.
 32. Prosperetti A. Lezzi A. Bubble dynamics in a compressible liquid. Part 1. First-order theory // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 168. P. 457–478.
 33. Cole R.H. Underwater explosions. Princeton: Princeton University Press, 1948. Chapt. 8. p. 312–322.
 34. Кобелев Ю.А., Островский Л.А. Акусто-электростатическая аналогия и взаимодействие пузырьков в жидкости // *Акуст. журн.* 1984. Т. 30. № 2. С. 715–716.
 35. Oguz H.N., Prosperetti A. Bubble oscillations in the vicinity of a nearly plane free surface // *J. Acoust. Soc. Am.* 1990. V. 87. P. 2085–2092.