

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.23

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ
СТЕРЖНЯ СО СПЕЦИАЛЬНЫМ ЗАКОНОМ ИЗМЕНЕНИЯ
ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

© 2017 г. М. А. Миронов

Акустический институт им. Н.Н. Андреева
117036 Москва, ул. Шверника 4

E-mail: mironov_ma@mail.ru; mironov@akin.ru

Поступила в редакцию 09.03.2016 г.

Рассмотрено распространение изгибных волн по стержню, толщина которого достаточно плавно уменьшается, обращаясь в нуль на конечном отрезке стержня. Скорость распространения волн при приближении к заостренному концу стремится к нулю, а время распространения до заостренного конца оказывается бесконечным. Как следствие, волна, распространяющаяся по стержню, не отражается от его конца. Количественно этот эффект рассматривался ранее в ВКБ-приближении. Оказалось, что при параболическом заострении стержня ВКБ-приближение является равномерной асимптотикой, справедливой (или несправедливой) в любом сечении стержня. При параболическом заострении уравнение изгибных колебаний стержня имеет точные аналитические решения в виде степенных функций. На основе этих решений предложено модифицированное ВКБ-приближение для решений уравнения стержней с непараболическим законом изменения толщины. Вычислен и проанализирован входной импеданс параболически заостренного стержня.

Ключевые слова: стержень, вибрации, время распространения, черная дыра.

DOI: 10.7868/S0320791916060125

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] рассмотрено распространение изгибных волн по стержню, сечение которого уменьшается вдоль его оси и стремится к нулю при конечной длине стержня. При этом скорость распространения изгибных волн также стремится к нулю. Показано, что время распространения волны от начального сечения до конечного может быть равно бесконечности. Скорость уменьшения сечения должна быть достаточно плавной, чтобы избежать отражений от промежуточных сечений. При этом условии теоретически возможно полное поглощение изгибных волн в заостренном, в частности, по параболическому закону стержне на конечной длине. Скорость изгибных волн при параболическом заострении стержня стремится к нулю при приближении к заостренной кромке, а время достижения волной кромки – к бесконечности. Волна, входящая в начальное сечение заостренного стержня, никогда не достигнет кромки и, следовательно, не отразится от нее. Отсутствие отражения вызвано не физическим поглощением в материале стержня, а именно невозможностью достичь конца стержня за конечное время. По аналогии с космологическими объектами – черными дырами, в которых скорость распространения света в сильном гравитацион-

ном поле замедляется, в [1] введен термин “вибрационная черная дыра”. Анализ вибрационной черной дыры проведен на основе ВКБ-приближении теории распространения изгибных волн. В дальнейшем идея вибрационной черной дыры стала достаточно популярной. Так, в [2] дано, также в ВКБ-приближении, обобщение решения этой задачи на случай пластины, покрытой тонким вибропоглощающим слоем. Добавление вибропоглощающего слоя делает требования к точности выполнения заострения менее критическими. Эксперименты, демонстрирующие эффективность поглощения вибраций параболически заостренными пластинами, описаны в [3, 4]. Обширный список более поздних работ по “черным дырам” в акустике приведен в [5] и в [6]. Следует также отметить современные работы математического плана ([7] и ссылки в этой работе), в которых рассматриваются проблемы вибрации твердых тел с границей, имеющей заострения. В этих работах также используется ВКБ-приближение.

В работе [8], в отличие от работ [1–7], получены точные аналитические решения задачи о волнах в стержне, толщина которого изменяется по параболическому закону, а ширина – по степенному с произвольным показателем степени. Аналитические решения имеют вид степенных функ-

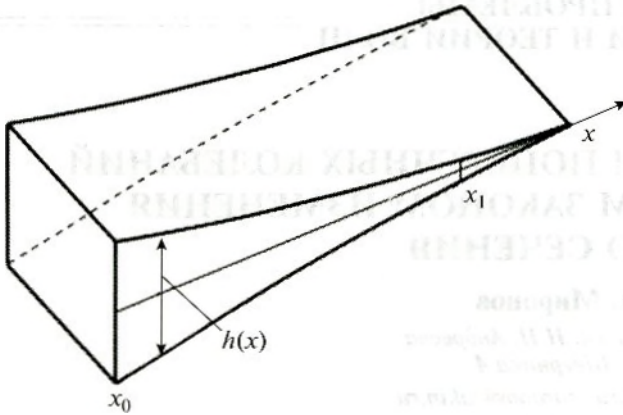


Рис. 1. Заостренный стержень с зависимостью толщины от осевой координаты $h(x)$: x_0 – координата начального сечения, x_1 – координата некоторого промежуточного сечения, время распространения изгибной волны до которого далее вычисляется.

ций с показателями степени, удовлетворяющими алгебраическому уравнению четвертой степени. К сожалению, полученные в [8] результаты остались неизвестными специалистам, интересующимся вибрационными черными дырами. Настоящая работа посвящена развитию результатов работы [8]. Воспроизведены вычисления фундаментальных решений [8]. Предложена модификация ВКБ-приближения, имеющая более низкую частотную границу применимости, чем традиционный метод ВКБ. Вычислена матрица входного импеданса параболически заостренного стержня.

ВКБ-ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИ ЗАОСТРЕННОГО СТЕРЖНЯ

Для определенности рассмотрим поперечные колебания стержня с прямоугольными поперечными сечениями, меняющимися вдоль оси стержня (рис. 1). Толщину и ширину стержня обозначим через $h(x)$ и $d(x)$ соответственно. Площадь поперечного сечения $S(x)$ и момент инерции $I(x)$ равны соответственно

$$S(x) = h(x)d(x), \quad (1)$$

$$I(x) = \frac{1}{12}h(x)^3d(x). \quad (2)$$

Уравнение для поперечного смещения $\eta(x)$ гармонически колеблющегося стержня имеет вид

$$-\rho S(x)\omega^2\eta + (EI(x)\eta'')'' = 0. \quad (3)$$

Здесь ω – частота колебаний; ρ , E – плотность и модуль Юнга материала соответственно; штрих означает производную по координате x .

Далее подробно рассматривается только параболический закон заострения стержня. Выделенность именно этого закона легко понять с помощью ВКБ-приближения решений уравнения (3). Коротко воспроизведем соответствующие выкладки, следуя [1, 2]. При достаточно плавном изменении сечения стержня решения (3) можно искать в виде набора четырех волн:

$$\eta_j = A_j(x) \exp\left(i \int \kappa_j(x) dx\right). \quad (4)$$

Локальные волновые числа $\kappa_j(x)$ равны

$$\kappa_j(x) = \left(\frac{\rho S(x)\omega^2}{EI(x)}\right)^{1/4} e^{i\frac{\pi}{2}j}, \quad j = 0, 1, 2, 3. \quad (5)$$

Два вещественных корня ($j = 0, 2$) соответствуют бегущим волнам, два мнимых корня ($j = 1, 3$) соответствуют экспоненциально затухающим волнам. Зависимость амплитуд $A_j(x)$ определяется из закона сохранения энергии.

Критерий применимости ВКБ-приближения заключается в малости изменения толщины пластины на длине волны и в малости изменения локального волнового числа на длине волны. Оба эти условия дают следующее неравенство:

$$\left(\frac{E}{12\rho\omega^2}\right)^{1/4} h'(x)/[h(x)]^{1/2} \ll 1, \quad (6)$$

ширина стержня $d(x)$ в это условие не входит.

Нас интересуют стержни, толщина которых стремится к нулю при $x \rightarrow 0$. Рассмотрим степенные зависимости толщины: $h(x) = h_0(x/x_0)^n$, $n > 0$. Подставляя эту зависимость в предыдущее неравенство, получим условие, налагаемое на множитель ε и показатель степени n :

$$n \frac{h_0^{1/2}}{x_0^{n/2}} \left(\frac{E}{12\rho\omega^2}\right)^{1/4} x^{n-1} \ll 1.$$

При $n < 2$ это условие выполнено только для достаточно больших x , при $x \rightarrow 0$ оно не выполняется. При $n > 2$ условие выполняется для достаточно малых x . С приближением x к нулю оно выполняется все лучше и лучше. Показатель степени $n = 2$ характерен тем, что левая часть последнего неравенства не зависит от x . Условие применимости ВКБ оказывается равномерным по x . Если ВКБ-приближение пригодно для толстой части стержня, то оно пригодно и для тонкой его части – при $x \rightarrow 0$. Именно этим и выделяется показатель степени $n = 2$. При $n = 2$ условие применимости ВКБ (6) переписывается в виде

$$2 \frac{h_0^{1/2}}{x_0^{n/2}} \left(\frac{E}{12\rho\omega^2}\right)^{1/4} \ll 1.$$

Волновое число изгибной волны в стержне при $n = 2$ стремится к бесконечности при $x \rightarrow 0$, а фазовая c_p и групповая c_g скорости распространяющихся волн

$$c_p = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{h_0^{1/2}}{x_0^{n/2}} \left(\frac{12\rho\omega^2}{E} \right)^{1/4} x,$$

$$c_g = \frac{\partial\omega}{\partial\kappa} = 2 \frac{h_0^{1/2}}{x_0^{n/2}} \left(\frac{12\rho\omega^2}{E} \right)^{1/4} x,$$

стремятся к нулю [2, 3]. Время распространения волнового пакета с несущей частотой ω от сечения с координатой x_0 до сечения с координатой x_1 (рис. 1) равно

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{c_g} = \frac{x_0^{n/2}}{2h_0^{1/2}} \left(\frac{12\rho}{E\omega^2} \right)^{1/4} \ln \left(\frac{x_0}{x_1} \right).$$

При $x_1 \rightarrow 0$ величина $T \rightarrow \infty$. Это означает, что волна, вышедшая из утолщенной части стержня, за любое конечное время не дойдет до заостренной кромки и, следовательно, не отразится от нее. Таким образом, стержень конечной длины может полостью поглотить изгибную волну, даже если он выполнен из абсолютно непоглощающего материала. Такой стержень можно назвать вибрационной черной дырой [1–6]. При реализации неотражающего стержня основная трудность заключается в точном исполнении заострения. Компенсировать неточности можно введением потерь в материал стержня, либо нанесением тонкого слоя вибропоглощающего материала на поверхность стержня. Соответствующие расчеты в рамках ВКБ-приближения даны в [2].

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИ ЗАОСТРЕННОГО СТЕРЖНЯ

Перейдем к получению точных решений уравнения (3). Следуя [7], изменение толщины стержня задаем в виде

$$h(x) = \frac{h_0}{x_0^2} x^2, \quad (7)$$

а изменение ширины в виде

$$d(x) = \frac{d_0}{x_0^\alpha} x^\alpha. \quad (8)$$

Показатель степени α в (8) произвольный, параметры h_0, d_0 имеют размерность длины и задают толщину и ширину стержня в некотором начальном сечении x_0 . Подставляя (7), (8) в (1), (2) и далее в (3), получим следующее дифференциальное уравнение:

$$bx^{2+\alpha}\eta - (x^{6+\alpha}\eta'')'' = 0, \quad (9)$$

где

$$b = 12 \frac{\rho\omega^2}{E} \left(\frac{x_0^2}{h_0} \right)^2 = 12 \frac{\omega^2}{c_Y^2} \left(\frac{x_0^2}{h_0} \right)^2 = (\kappa(h_0)x_0)^4, \quad (10)$$

$$\kappa(h_0) = \left(12 \frac{\omega^2}{c_Y^2 h_0^2} \right)^{1/4}. \quad (11)$$

Здесь и далее $c_Y = \sqrt{E/\rho}$ – юнговская скорость распространения продольной волны в стержне.

Ищем решение (9) в виде степенной функции:

$$\eta(x) = x^v. \quad (12)$$

Подставив (12) в (9) и проведя необходимые дифференцирования, обнаруживаем, что независимая переменная x сокращается, и получается алгебраическое уравнение четвертой степени для показателя v :

$$v(v-1)(v+\alpha+4)(v+\alpha+3) - b = 0. \quad (13)$$

Заменой

$$v = \mu - \frac{\alpha+3}{2} \quad (14)$$

уравнение (13) сводится к биквадратному уравнению относительно μ :

$$\left[\mu^2 - \left(\frac{\alpha+3}{2} \right)^2 \right] \left[\mu^2 - \left(\frac{\alpha+5}{2} \right)^2 \right] - b = 0.$$

Решив его и подставив решения в (14), получим четыре значения показателя степени в (12):

$$v_{1,2,3,4} = -\frac{\alpha+3}{2} \pm \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\alpha+3}{2} \right)^2 + \left(\frac{\alpha+5}{2} \right)^2 \right] \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left[\left(\frac{\alpha+3}{2} \right)^2 - \left(\frac{\alpha+5}{2} \right)^2 \right]^2 + b} \right\}^{1/2}. \quad (15)$$

Нетрудно проверить, что при $b \rightarrow 0$ (низкие частоты) все корни (15) вещественны. Колебания стержня синфазны во всех точках, волны отсутствуют. В другом предельном случае $b \rightarrow \infty$ (высокие частоты) (15) дает пару вещественных и пару комплексно сопряженных корней. Комплексные корни соответствуют распространяющимся волнам, вещественные – нераспространяющимся волнам. Таким образом, имеется полная аналогия со стержнем постоянного сечения, для которого полный набор решений состоит из двух распространяющихся и двух экспоненциально затухающих волн. Критическое значение b , при котором появляется мнимая составляющая, равно

$$b^* = \left(\frac{\alpha+3}{2} \right)^2 \left(\frac{\alpha+5}{2} \right)^2. \quad (16)$$

Соответственно, критическая частота равна

$$\begin{aligned}\omega^* &= \sqrt{\frac{c_Y^2 b^* h_0}{12 x_0^2}} = \sqrt{\frac{c_Y^2}{12} \left| \frac{\alpha + 3}{2} \frac{\alpha + 5}{2} \right| \frac{h_0}{x_0^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{12}} c_Y \left| \frac{\alpha + 3}{2} \frac{\alpha + 5}{2} \right| \frac{h_0}{x_0^2}.\end{aligned}\quad (17)$$

Критическая частота зависит от показателя степени α , т.е. от скорости уменьшения (увеличения) ширины стержня. Например, при уменьшении ширины стержня по параболическому закону ($\alpha = 2$)

$$\omega^* = \frac{35}{4\sqrt{12}} c_Y \frac{h_0}{x_0^2} = 2.6 c_Y \frac{h_0}{x_0^2}.$$

При неизменной ширине стержня $\alpha = 0$

$$\omega^* = \frac{15}{4\sqrt{12}} c_Y \frac{h_0}{x_0^2} = 1.083 c_Y \frac{h_0}{x_0^2}.$$

Наконец, при $\alpha = -3$ (увеличение ширины до бесконечного значения при $x = 0$) критическая частота равна нулю.

Отметим, что рассматриваемую конструкцию можно считать стержнем до тех пор, пока ширина стержня много меньше локальной длины изгибной волны. Если это условие не выполнено, необходимо переходить к пластине переменной толщины. Данная задача выходит за рамки настоящей работы.

Полная масса заостренного стержня длиной x_0 равна

$$M = \rho \int_{x_1}^{x_0} S(x) dx = \rho \frac{1}{3 + \alpha} x_0 d_0 h_0, \quad \alpha > -3. \quad (18)$$

Выражая из этой формулы x_0 через M :

$$x_0 = \frac{M \alpha + 3}{\rho d_0 h_0} \quad (19)$$

и подставляя в (17), получим зависимость критической частоты от показателя степени α при фиксированной массе и начальном поперечном сечении $h_0 d_0$:

$$\omega^* = \frac{1}{4\sqrt{12}} c_Y h_0 (h_0 d_0)^2 (\rho/M)^2 \frac{\alpha + 5}{\alpha + 3}. \quad (20)$$

Из этой формулы следует, что при фиксированной массе критическая частота монотонно уменьшается при увеличении α от -3 до $+\infty$. Минимальное значение критической частоты, при $\alpha = \infty$, равно

$$\omega_{\min}^* = \frac{1}{4\sqrt{12}} c_Y h_0 (h_0 d_0)^2 (\rho/M)^2.$$

При этом длина стержня, в соответствии с (19), равна $x_0 = \infty$.

В следующих разделах решения, описываемые формулами (12), (15), будут использованы для мо-

дификации ВКБ-приближения и для вычисления матрицы входного импеданса параболически заостренного стержня. Следует отметить, что аналогичный анализ для акустической черной дыры, описываемой уравнением второго порядка, проведен в работе [9].

МОДИФИКАЦИЯ ВКБ-ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Имея точное решение уравнения для стержня со специальным законом изменения его сечения, можно построить модифицированное ВКБ-приближение для произвольного стержня, более точное, чем ВКБ-приближение, основанное на точном решении для стержня постоянного сечения. Дальнейшее изложение проводится для частного случая стержня постоянной ширины $\alpha = 0$ (но переменной толщины). Пусть толщина стержня меняется по произвольному закону $h(x)$. Аппроксимируем локально $h(x)$ параболой:

$$h(x) \approx h_0(x) = h_0 \frac{(x - x_0)^2}{x_0^2}.$$

Два параметра этой параболы x_0 и h_0 определим, приравняв толщину и ее первую производную текущей толщине и ее производной исходного стержня: $h(x) = h_0(x)$; $h'(x) = h_0'(x)$. В результате получим следующие выражения для этих двух параметров:

$$x - x_0 = 2h(x)/h'(x); \quad \frac{h_0}{x_0^2} = \frac{1}{4} h'(x)^2/h(x). \quad (21)$$

Далее запишем точные решения (12) для аппроксимирующей параболы:

$$\eta_0(x) = (x - x_0)^{\nu(b)}. \quad (22)$$

Здесь показатели степени $\nu(b)$ определяются по формуле (15) (при $\alpha = 0$). Параметр b для аппроксимирующей параболы равен, с учетом (21):

$$b = b(x) = 12 \frac{\rho \omega^2}{E} \left(4 \frac{h(x)}{h'(x)^2} \right)^2. \quad (23)$$

Перепишем (22) в экспоненциальном виде:

$$\eta_0(x) = \exp(\nu(b) \ln(x - x_0)) = \exp\left(\nu(b) \int \frac{dx}{x - x_0}\right).$$

Далее учтем, что параметры аппроксимирующей параболы $h_0(x)$ зависят от x . Внося переменную величину $\nu(b(x))$ под знак интеграла в последней формуле, получим, с учетом (21), (23), модифицированное ВКБ-приближение:

$$\eta(x) \approx \eta_0(x) = \exp\left(\int \frac{1}{2} s(x) \frac{h'(x)}{h(x)} dx\right), \quad (24)$$

где

$$s(x) = -\frac{3}{2} \pm \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3}{2} \right)^2 + \left(\frac{5}{2} \right)^2 \right] \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left[\left(\frac{3}{2} \right)^2 - \left(\frac{5}{2} \right)^2 \right]^2 + 12 \frac{\rho \omega^2}{E} \left(4 \frac{h(x)}{h'(x)^2} \right)^2} \right\}^{1/2} \quad (25)$$

Точное решение для параболического профиля применимо при любых наклонах $h'(x)$. Следует ожидать, что модифицированное ВКБ-приближение (24), (25) имеет менее жесткие ограничения по наклонам, чем для обычного ВКБ-приближения (6). Нетрудно проверить, что при малых наклонах $h'(x)$ (24), (25) переходит в обычное ВКБ-приближение. Действительно, при малых $h'(x)$ функция $s(x)$ стремится к

$$s(x) \xrightarrow{h'(x) \rightarrow 0} -\frac{3}{2} \pm (\pm 1)^{1/2} \left(12 \frac{\rho \omega^2}{E} \right)^{1/4} \frac{h(x)^{1/2}}{h'(x)}. \quad (26)$$

Слагаемое $-3/2$ оставлено, т.к. именно оно обеспечивает сохранение потока энергии. Подставляя (26) в (24), получим после элементарных вычислений

$$\eta(x) \approx h(x)^{-3/4} \exp \left[\pm \int (\pm 1)^{1/2} \left(\frac{12 \rho \omega^2}{E h(x)^2} \right)^{1/4} dx \right].$$

Вопрос о пределах применимости модифицированного ВКБ-приближения (24), (25) требует дополнительных исследований.

МАТРИЦА ВХОДНОГО ИМПЕДАНСА

Для анализа демпфирующих возможностей заостряющегося по степенным зависимостям (7), (8) стержня необходимо знать матрицу его входного импеданса со стороны утолщенной части. Матрица входного импеданса Z — это матрица 2×2 , связывающая силу F и момент M , прикладываемые к торцу стержня, со смещением η и углом поворота η' торца:

$$\begin{aligned} F &= Z_{11}\eta + Z_{12}\eta', \\ M &= Z_{21}\eta + Z_{22}\eta'. \end{aligned} \quad (27)$$

При вычислении элементов Z_{ij} матрицы используются уравнения движения стержня

$$\begin{aligned} M &= -EI\eta'', \quad F = M' = -(EI\eta'')', \\ -\rho\omega^2 S\eta &= F = -(EI\eta'')'' \end{aligned} \quad (28)$$

и условие излучения, которое в рассматриваемом случае сводится к правильному выбору двух из четырех фундаментальных решений вида (12) с показателями (15). Из четырех корней (15) нужно взять те, которые при $b \rightarrow \infty$ соответствуют одно-

родной и неоднородной волнам, уходящим от начального сечения:

$$\eta(x) = Ax^{v_2} + Bx^{v_4}, \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} v_2 &= -\frac{\alpha+3}{2} - \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\alpha+3}{2} \right)^2 + \left(\frac{\alpha+5}{2} \right)^2 \right] - \sqrt{\frac{1}{4} \left[\left(\frac{\alpha+3}{2} \right)^2 - \left(\frac{\alpha+5}{2} \right)^2 \right]^2 + b} \right\}^{1/2}, \\ v_4 &= -\frac{\alpha+3}{2} + \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\alpha+3}{2} \right)^2 + \left(\frac{\alpha+5}{2} \right)^2 \right] + \sqrt{\frac{1}{4} \left[\left(\frac{\alpha+3}{2} \right)^2 - \left(\frac{\alpha+5}{2} \right)^2 \right]^2 + b} \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Показатель v_2 (комплексный) соответствует распространяющейся в отрицательном направлении оси x волне, а показатель v_4 (чисто вещественный) — затухающей в этом направлении волне.

Выбор решения в виде (29) обусловлен условием излучения при $x \rightarrow 0$. Для доказательства правильности этого условия необходимо рассмотреть более сложную задачу о “дефектной” черной дыре с введенными потерями в материале. Здесь на тонком, но не бесконечно тонком конце стержня следует поставить условие мягкой или жесткой границы, решить эту задачу, а затем перейти к пределу стремления дефекта к нулю. Подробное изложение решения этой общей задачи вследствие его громоздкости выходит за рамки настоящей работы. Результат этого рассмотрения состоит в том, что представление (29) справедливо на частотах выше критической. Поскольку мы интересуемся именно ситуацией, когда существуют распространяющиеся волны, далее матрица импеданса вычислена именно на основе решения (29).

Для вычисления матрицы Z необходимо выразить M, F через A, B , а A, B выразить через заданные величины η, η' в начальном сечении $x = x_0$. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \frac{EI(x_0)}{x_0^3} v_2 v_4 (v_2 + v_4 + \alpha + 3), \\ Z_{12} &= -\frac{EI(x_0)}{x_0^2} \frac{b}{(v_4 + \alpha + 3)(v_2 + \alpha + 3)}, \\ Z_{21} &= -\frac{EI(x_0)}{x_0^2} v_2 v_4, \quad Z_{22} = -\frac{EI(x_0)}{x_0} (v_4 + v_2 - 1). \end{aligned} \quad (29)$$

Переходя в последних формулах к пределу $x_0 \rightarrow \infty$, можно получить выражение для импе-

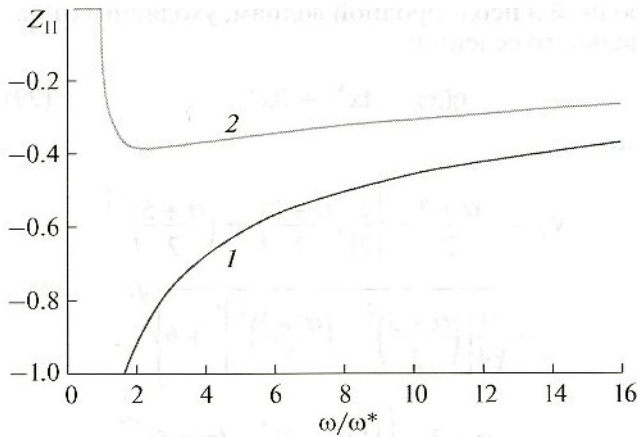


Рис. 2. Зависимость импеданса z_{11} от частоты: 1 – $\text{Re}(z_{11})$, 2 – $-\text{Im}(z_{11})$. Частота нормирована на критическую частоту ω^* . Импеданс нормирован на импеданс сосредоточенной массы стержня.

данса однородного полубесконечного стержня толщиной h_0 $Z^{(0)}$:

$$\begin{aligned} Z_{11}^{(0)} &= -(1+i)\kappa(h_0)^3 EI(h_0), \\ Z_{12}^{(0)} &= -i\kappa(h_0)^2 EI(h_0), \\ Z_{21}^{(0)} &= i\kappa(h_0)^2 EI(h_0), \\ Z_{22}^{(0)} &= \kappa(h_0)EI(h_0). \end{aligned} \quad (30)$$

В формулах (29), (30) подразумевается стержень единичной ширины. Для стержня шириной d_0 все элементы нужно умножить на эту ширину.

Для удобства представления полезна нормировка, например, на массовый импеданс конечного стержня. Нужно только под импедансом массы понимать отношение силы к смещению, а не к скорости (как в акустике):

$$Z_{ac} = \frac{F}{\eta} = -\omega^2 M = -\omega^2 \rho \frac{1}{3+\alpha} x_0 h_0.$$

На рис. 2 приведена частотная зависимость компоненты $z_{11}(\omega)$ с этой нормировкой.

Мнимая часть z_{11} , отвечающая за поглощение, отлична от нуля начиная с критической частоты. Далее она убывает (модуль нарастает), достигая минимального значения $z_{11,\min} = 0.39$ при частоте, равной примерно $\omega \approx 2.1\omega^*$, затем медленно нарастает.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом работы являются полученные точные решения (12), (15) уравнения

изгибных колебаний стержня с параболически меняющейся толщиной – вибрационной черной дыры. Найдено точное значение критической частоты (17), (20), выше которой появляется эффект черной дыры – распространяющаяся волна, время распространения которой до заостренной кромки равно бесконечности. Точные решения использованы для модификации ВКБ-приближения (24), (25) соответствующего уравнения для стержней с произвольно изменяющейся толщиной. Наличие точных решений позволило получить простые выражения (29) для элементов матрицы входного импеданса черной дыры. В дальнейшем предполагается использовать эти решения для определения матрицы входного импеданса “несовершенной” черной дыры, заострение которой не доведено до нулевой толщины, и рассмотреть собственные ее колебания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мironov М.А. Распространение изгибной волны в пластине, толщина которой плавно уменьшается до нуля на конечном интервале // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 3. С. 546–547.
2. Krylov V.V., Tilman F.J.B.S. Acoustic “black holes” for flexural waves as effective vibration dampers // Sound and Vibr. 2004. V. 274. P. 605–619.
3. Pisljakov V., Mironov M., Svadkovsky A. Vibration of specially tapered beams and plates / InterNoise-2000, Nice, France. Proceedings 4–2657.
4. Krylov V.V., Winward R.E.T.B. Experimental investigation of the acoustic black hole effect for flexural waves in tapered plates // Sound and Vibr. 2007. V. 300. № 1–2. P. 43–49.
5. Krylov V.V. Acoustic black holes: recent developments in the theory and applications // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. 2014. V. 61. № 8. P. 1296–1306.
6. Zhao Z., Conlon S.C., Semperlotti F. Broadband energy harvesting using acoustic black hole structural tailoring // Smart Materials and Structures. 2014. V. 23. № 6. P. 065021.
7. Кардоне Дж., Назаров С.А., Таскинен Я. Эффект “поглощения” упругих волн особенностью границы типа клюва // ДАН. 2009. Т. 425. № 2. С. 182–186.
8. Мironov М.А. Точные решения уравнения поперечных колебаний стержня со специальным законом изменения поперечного сечения вдоль его оси / IX Всесоюзная акустическая конференция, 1991. Секция Л. С. 23–26.
9. Мironov М.А., Писляков В.В. Одномерные волны в замедляющих структурах со скоростью распространения, стремящейся к нулю // Акуст. журн. 2002. Т. 28. № 3. С. 400–405.