АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2016, том 62, № 6, с. 657–660

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.26

ПРИНЦИП ЮНГА И СКРЫТЫЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ ИСТОЧНИКИ ДИФРАГИРОВАННОГО ПОЛЯ

© 2016 г. И. А. Урусовский

Акустический институт им. Н.Н. Андреева
117036 Россия, Москва, ул. Шверника 4
E-mail: urusovskii_ia@mail.ru

Поступила в редакцию 21.07.2015 г.

Предложена методологически простая модернизация принципа Юнга применительно к формированию дифрагированного поля в задачах дифракции волн на острых кромках экранов и ребрах клиньев, не связанная с использованием зоммерфельдовского двулистного пространства. Метод формирования дифрагированного поля состоит в конструировании производной этого поля сосредоточенными источниками, расположенными на данных рассеивающих кромках и ребрах с последующим интегрированием сконструированного поля по направлениям, параллельным волновым фронтам падающей плоской волны.

Ключевые слова: дифракция волн, принцип Юнга.
DOI: 10.7868/S0320791916060186

В первоначальной формулировке принципа Томаса Юнга для дифракции плоской световой волны на полуплоскости утверждалось, что источник рассеянного поля находится на кромке экрана. Позднее это утверждение было несколько изменено, чтобы не иметь дела с особенностью поля точечного источника, поскольку дифрагированное поле должно быть конечным. Стали говорить, что источники распределены с некоторой плотностью по окрестности кромки [1]. Решение Зоммерфельда задачи дифракции плоской волны, падающей на полуплоскость, использует функцию, определенную на двулистном пространстве [2, 3]. В [3] утверждается, что источники дифрагированного поля находятся только на втором листе, что не согласуется с очевидным равноправием этих листов.

Однако принцип Юнга в его первоначальном виде, сформулированный в 1803 г., выполняется буквально, если его относить не прямо к звуковому давлению в акустическом случае или к напряженности электромагнитного поля в оптике, а к производной этих полей по направлению, параллельному фронтам плоской волны, падающей на полуплоскость. Дифференцирование по таким направлениям устраняет падающую волну. При этом источник указанной производной дифрагированного звукового давления, удовлетворяющего уравнению Гельмгольца, может находиться лишь на кромке экрана. Поле этого источника должно быть интегрируемым по указанному направлению в силу конечности звукового давления. Отсюда при идеальных граничных условиях (равенство нулю звукового давления или его нормальной производной на экране) поле этого источника в его разложении по цилиндрическим функциям полуцелых номеров (только такие функции удовлетворяют граничным условиям) может содержать только имеющую интегрируемую особенность функцию Ганкеля с индексом 1/2, а именно, $H_{1/2}^{(1)}(kr) = -i\sqrt{(2/\pi kr)}\,\exp(ikr)$. Здесь k – волновое число, $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, x и y – декартовы координаты с началом на кромке экрана; $x = r\sin\psi$, $y = -r\cos\psi$, ψ – полярный угол, отсчитываемый от полуплоскости до направления на точку наблюдения из начала координат.

При дифракции плоской волны $\rho c^2\exp(-ikx)$, падающей по нормали на акустически мягкий экран в виде полуплоскости, расположенной при $x = 0$, $y \le 0$, нечетная по x часть полного поля, как и падающего, равна $-i\rho c^2\sin kx$, где ρ – плотность среды, c – скорость звука в ней. Поэтому остальная часть полного поля, как и ее производная по y, должна быть четной по x. Проекция четной по x части колебательной скорости на ось y равна $v_y(x,y) = (1/\rho ck)(\partial p(x,y)/\partial y)$, где $p(x,y)$ – четная по x часть звукового давления, k – волновое число. При этом $p(x,y) = \rho ck\int_{-\infty}^{y} v_y(x,\eta)\,d\eta$ или, в безразмерном виде, $P(kx,ky) = \int_{-\infty}^{ky} U(kx,u)\,du$, где

$P(kx,ky)=\left(1/\rho c^2\right)p(x,y)$, $U(kx,k\eta)=v_y(x,\eta)/c$. Функция $U(kx,k\eta)$ должна иметь интегрируемую по $u=k\eta$ особенность и поэтому быть пропорциональной $kH^{(1)}_{1/2}(kr)\sin\frac{\psi}{2}=-ik\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\exp(ikr)\sin\frac{\psi}{2}$, где $r(x,\eta)=\sqrt{x^2+\eta^2}$, $kr(x,\eta)=\sqrt{k^2x^2+u^2}$. При этом с учетом того, что $\sin\frac{\psi}{2}=\sqrt{(1-\cos\psi)\frac{1}{2}}=$ $=\sqrt{\left(1+\frac{y}{r}\right)\frac{1}{2}}$ при $0\le\psi\le 2\pi$, $\int_0^\infty\sqrt{\frac{2}{\pi ky}}\exp(iky)\,kdy=$ $=1+i$ [4], имеем

$$\frac{\partial}{k\partial y}P(0,ky)=A\sqrt{\frac{2}{\pi ky}}\exp(iky),$$

$$P(0,ky)=\frac{A}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{ky}\sqrt{\frac{2}{u}}\exp(iu)\,du.$$

Отсюда следует

$$A=\frac{1-i}{2}\frac{\partial}{k\partial y}P(kx,ky)=$$

$$=\frac{1-i}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi kr}\left(1+\frac{y}{r}\right)}\exp(ikr),\quad P(kx,ky)=\frac{1-i}{2\sqrt{\pi}}\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{ky}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{(kx)^2+u^2}}\left(1+\frac{u}{\sqrt{(kx)^2+u^2}}\right)}\times \tag{1}$$
$$\times\exp(i\sqrt{(kx)^2+u^2})\,du.$$

В частности, при $x=0$, $y\ge 0$ имеем

$$P(0,ky)=\frac{1-i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{ky}\sqrt{\frac{1}{u}}\exp(iu)\,du=$$
$$=\frac{1-i}{\sqrt{\pi}}\sqrt{2}\int\limits_0^{\sqrt{ky}}\exp\left(i\tau^2\right)d\tau.$$

Функция $P(kx,ky)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца и нулевому граничному условию на экране. В (1) пространственная производная звукового давления имеет интегрируемую особенность на кромке экрана, в то время как для самого звукового давления эта особенность скрыта интегрированием по направлению, параллельному волновым фронтам падающей плоской волны. Расчеты четной по x части поля по формуле (1) дают те же численные результаты, что и по формулам Зоммерфельда [2, 3]. Эта часть поля при $y\to-\infty$ стремится к $-i\rho c^2\sin kx\,\mathrm{sign}(x)$.

В статьях [5–13] для решения задачи дифракции волн, в частности на полуплоскости и клине, используются дифференциальные операторы более сложные, чем операция дифференцирования вдоль фронта падающей волны, вопрос же о скрытых интегрированием источниках дифрагированного поля и принцип Юнга не обсуждаются и в этих статьях. Как и в статьях [5–13], в предлагаемом подходе решения задач дифракции выражаются через частные решения (embedding formula), в данном случае частным решением оказывается производная полного поля вдоль фронта падающей плоской волны. Это и позволяет включить в рассмотрение скрытые интегрированием сосредоточенные источники дифрагированного поля, когда особенности поля имеются, но они достаточно слабые, чтобы быть интегрируемыми по фронту падающей плоской волны. Демонстрация такой возможности и соответственная модернизация принципа Юнга является целью данной работы.

Интеграл в (1) сходится медленно. Однако он сводится к быстро сходящемуся виду с учетом асимптотической периодичности экспоненты в (1). При этом

$$P(kx,ky;Q)=$$
$$=\frac{1-i}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{ky-Q\pi}^{ky}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{(kx)^2+u^2}}\left(1+\frac{u}{\sqrt{(kx)^2+u^2}}\right)}\times$$
$$\times\exp\left(i\sqrt{(kx)^2+u^2}\right)du=\frac{1-i}{2\sqrt{\pi}}\times$$
$$\times\int\limits_0^{\pi}\sum_{q=0}^{Q-1}(-i)^q R(kx,ky,q,u)\,du,$$

где

$$R(kx,ky,q,u)=$$
$$=\sqrt{\frac{1}{\sqrt{(kx)^2+(ky-q\pi-u)^2}}\left(1+\frac{ky-q\pi-u}{\sqrt{(kx)^2+(ky-q\pi-u)^2}}\right)}\exp\left[i\frac{(kx)^2+(ky-u)(ky-u-2q\pi)}{\sqrt{(kx)^2+(ky-q\pi-u)^2}+q\pi}\right].$$

При произвольном угле φ_0 между фронтом набегающей на экран волны $\exp[ik(-x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0)]$ и плоскостью экрана текущие координаты ξ, η связаны с координатами x, y точки наблюдения соотношением $\xi(\eta) = x - (y - \eta)\,\mathrm{tg}\varphi_0$. При этом

$$dP(k\xi,k\eta) = \frac{1}{\cos\varphi_0}\frac{1+i}{2}H^{(1)}_{1/2}(kr)\sin\frac{\psi}{2}kd\eta = \\ = \frac{1-i}{2\cos\varphi_0}\sqrt{\frac{1}{\pi k\sqrt{\xi^2+\eta^2}}}\left(1+\frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\right)\times \\ \times\exp\left(ik\sqrt{\xi^2+\eta^2}\right)kd\eta,$$

$$P(kx,ky,\varphi_0) = \frac{1-i}{2\sqrt{\pi}\cos\varphi_0}\times \\ \times\int\limits_{ky-kx\cot\varphi_0}^{ky}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\varsigma^2(u)+u^2}}}\left\{1+\frac{u}{\sqrt{\varsigma^2(u)+u^2}}\right\}\times \\ \times\exp\left(i\sqrt{\varsigma^2(u)+u^2}\right)du,$$

где

$$\varsigma(u) = kx - (ky-u)\,\mathrm{tg}\varphi_0,$$
$$\varsigma^2(u) = (kx)^2 + \left(u^2 - 2uky + k^2y^2\right)\mathrm{tg}^2\varphi_0 - \\ - 2kx(ky-u)\,\mathrm{tg}\varphi_0,$$

а полное поле равно

$$\frac{1}{2}[P(kx,ky,\varphi_0) + P(-kx,ky,\ -\varphi_0)] - \\ - i\sin(kx\cos\varphi_0)\exp(iky\sin\varphi_0).$$

В случае акустически жесткого экрана четная по x часть падающей волны $\exp(-ikx)$ равна $\cos kx$, остальная часть полного поля должна быть нечетной по x, а ее производная равной $\frac{\partial}{k\partial y}\times$ $\times\ P(kx,ky) = \frac{1+i}{2}H^{(1)}_{1/2}(kr)\cos\frac{\psi}{2}$, где $\cos\frac{\psi}{2} = \sqrt{(1+\cos\psi)\frac{1}{2}}\mathrm{sign}(x) = \sqrt{\left(1-\frac{y}{r}\right)\frac{1}{2}}\mathrm{sign}(x)$, откуда

$$P(kx,ky) = \mathrm{sign}(x)\frac{1-i}{2\sqrt{\pi}}\times \\ \times\int\limits_{ky}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{(kx)^2+u^2}}}\left(1-\frac{u}{\sqrt{(kx)^2+u^2}}\right)\times \\ \times\exp\left(i\sqrt{(kx)^2+u^2}\right)du.$$

На плоскости, параллельной фронту падающей на жесткий экран и проходящей через точку наблюдения x, y волны $\exp[ik(-x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0)]$, текущие координаты ξ, η по-прежнему связаны соотношением $\xi(\eta) = x + (\eta - y)\,\mathrm{tg}\varphi_0$. При этом

$$dP(k\xi,k\eta) = \frac{1}{\cos\varphi_0}\frac{1+i}{2}H^{(1)}_{1/2}\left(k\sqrt{\xi^2+\eta^2}\right)\times \\ \times\cos\frac{\psi}{2}kd\eta = \mathrm{sign}(x)\frac{1-i}{2\cos\varphi_0}\times \\ \times\sqrt{\frac{1}{\pi k\sqrt{\xi^2+\eta^2}}}\left(1-\frac{k\eta}{k\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\right)\exp(ik\sqrt{\xi^2+\eta^2})kd\eta,$$

и полное поле равно

$$\mathrm{sign}(x)\frac{P(kx,ky,\varphi_0) + P(-kx,ky,-\varphi_0)}{2} + \\ + \cos(kx\cos\varphi_0)\exp(iky\sin\varphi_0),$$

где

$$P(kx,ky,\varphi_0) = \frac{1-i}{2\sqrt{\pi}\cos\varphi_0}\times \\ \times\int\limits_{ky}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\varsigma^2(u)+u^2}}}\left\{1-\frac{u}{\sqrt{\varsigma^2(u)+u^2}}\right\}\times \\ \times\exp\left(i\sqrt{\varsigma^2(u)+u^2}\right)du.$$

При дифракции волны $\exp(-ikx)$ на акустически мягком клине, образованном гранями $\psi = \pm\alpha$, четная по x часть полного поля в области $\alpha \le \psi \le 2\pi - \alpha$ равна

$$P(kx,ky) = \\ = \frac{1}{M}\int\limits_{ky}^{\infty}H^{(1)}_{\nu}\left(\sqrt{(kx)^2+u^2}\right)\sin[(\psi-\alpha)\nu]du,$$

где $\nu = \frac{\pi}{2\pi - 2\alpha}$, $M = \int_0^\infty H^{(1)}_\nu(u)du$. В случае акустически жесткого клина нечетная по x часть полного поля равна

$$P(kx,ky) = \\ = \frac{1}{M}\int\limits_{ky}^{\infty}H^{(1)}_{\nu}\left(\sqrt{(kx)^2+u^2}\right)\cos[(\psi-\alpha)\nu]du.$$

Предпринятая модернизация принципа Юнга применительно к формированию дифрагированного поля состоит в конструировании производной этого поля сосредоточенными источниками, расположенными на рассеивающих кромках экранов и ребрах клиньев с последующим интегрированием сконструированного поля по направлениям, параллельным волновым фронтам падающей плоской волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малюжинец Г.Д.* Развитие представлений о явлениях дифракции (к 130-летию со дня смерти Томаса Юнга) // УФН. 1959. Т. 69. № 10. С. 321–334.

2. *Sommerfeld A.* Optics (Lectures Theoretical Physics, v. 4). Academic Press,1964. 383 p.

3. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2. М.: ИЛ, 1960. 886 с.

4. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1962. 1094 с.

5. *Williams M.H.* Diffraction by a finite strip // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1982. V. 35. P. 103–124.

6. *Martin P.A., Wickham G.R.* Diffraction of elastic waves by a penny-shaped crack: analytical and numerical results // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1983. V. 390. P. 91–129.

7. *Biggs N.R.T., Porter D., Stirling D.S.G.* Wave diffraction through a perforated breakwater // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2000. V. 53. P. 375–391.

8. *Biggs N.R.T., Porter D.* Wave diffraction through a perforated barrier of nonzero thickness // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2001. V. 54. P. 523–547.

9. *Biggs N.R.T., Porter D.* Wave scattering by a perforated duct // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2002. V. 55. P. 249–272.

10. *Biggs N.R.T., Porter D.* Wave scattering by an array of perforated barriers // IMA J. Appl. Math. 2005. V. 70. P. 908–936.

11. *Craster R.V., Shanin A.V., Doubravsky E.M.* Embedding formulae in diffraction theory // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 2003. V. 459. P. 2475–2496.

12. *Craster R.V., Shanin A.V.* Embedding formula for diffraction by wedge and angular geometries // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 2005. V. 461. P. 2227–2242.

13. *Shanin A.V., Craster R.V.* Pseudo-differential operators for embedding formulae // J. Comput. Appl. Math. 2010. V. 234. P. 1637–1646.