

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ

УДК 532.582.3

ДЕМПФИРОВАНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЗОНДА СКАНИРУЮЩЕГО МИКРОСКОПА ВЯЗКИМ СЛОЕМ ПРИПОВЕРХНОСТНОЙ ЖИДКОСТИ

© 2016 г. И. И. Маслеников, Н. В. Решетов

Технологический институт сверхтвердых и новых углеродных материалов,
142190 Москва, Троицк, ул. Центральная 7а

E-mail: nreshetov@yandex.ru

Поступила в редакцию 01.06.2015 г.

Рассматривается задача о движении вязкого жидкого слоя, находящегося между зондом с кончиком в форме парабоида вращения и поверхностью, при работе сканирующего зондового микроскопа в полуконтактном режиме. Наличие такого слоя приводит к диссипации энергии и является одной из причин уменьшения амплитуды колебаний зонда. С использованием уравнения Рейнольдса для движения вязкой жидкости задача решена аналитически. Выведенная формула для потерь сопоставляется с экспериментальными данными, полученными для зондов и слоев с разными радиусами кривизны и вязкостями.

Ключевые слова: сканирующая зондовая микроскопия, профилометрия, демпфирование колебаний вязкой жидкостью, уравнение Рейнольдса.

DOI: 10.7868/S0320791916030102

1. ВВЕДЕНИЕ

Наиболее популярным режимом работы современных сканирующих атомно-силовых микроскопов (АСМ) является полуконтактный режим, при котором прибор как бы “обстукивает” поверхность колеблющимся на резонансной частоте зондом и, контролируя амплитуду этих колебаний, сканирует поверхность. Рассмотрение колебаний зонда часто проводится с использованием модели с сосредоточенными параметрами, и диссипативная сила, обуславливающая потери энергии, предполагается пропорциональной скорости движения зонда [1, 2]. Такая линейная модель позволяет получить аналитическое решение, но дает лишь качественное описание движения зонда. Влияние окружающей жидкости на поведение зонда было рассмотрено в работах [3–6], большинство из них [3–5] не дает явных аналитических выражений, переходя к численному решению полученных уравнений. В некоторых случаях [3, 4] рассмотрение движения зонда основывается на моделях, предполагающих изолированность объекта при его движении в вязкой среде [7, 8], однако такое допущение не соответствует действительности – наличие плоской твердой поверхности вблизи колеблющегося зонда существенно изменяет распределение давления и поле скоростей в жидкости.

В [6] были получены асимптотические формулы для распределения силы и давления при движении зонда, представляющего собой плоскую

балку вблизи поверхности. Оказалось, что сила обратно пропорциональна второй степени расстояния зонд–образец. Стремление вязкой силы к бесконечности по мере приближения зонда к поверхности указывает на необходимость учета сжимаемости жидкости и упругих свойств поверхности, а также конечной кривизны кончика иглы зонда. Наличие сжимаемости было учтено в [9] при рассмотрении задачи о колебаниях цилиндрического поршня в слое жидкости, толщина которого много больше амплитуды колебаний. Существенно, что в [9] предполагалась малость амплитуды колебаний поршня по сравнению с толщиной слоя. Данное обстоятельство позволяло считать временную зависимость давления и поля скоростей в жидкости гармоническими при синусоидальном воздействии, что в свою очередь приводило к возможности аналитического решения. Однако такое приближение является слишком грубым при амплитудах колебаний, сопоставимых с толщиной слоя, когда зависимость давления от времени перестает быть гармонической.

Анализ особенностей упругого и упругопластического взаимодействия острия зонда с сухой исследуемой поверхностью был проведен в работах [10, 11], где было показано, что, используя пьезорезонансные зонды, можно осуществлять картографирование механических свойств сканируемой поверхности.

Целью данной работы является получение аналитических зависимостей, описывающих си-

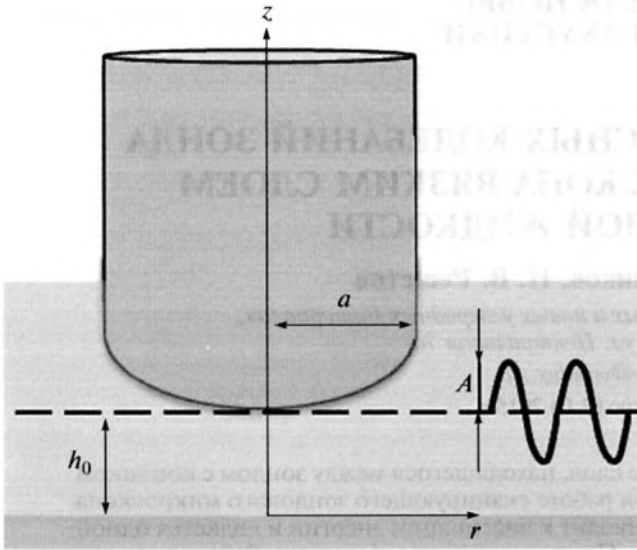


Рис. 1. Острие зонда в приповерхностном слое жидкости.

лы, препятствующие свободному гармоническому движению кончика зонда сканирующего зондового микроскопа (СЗМ) в слое жидкости, находящемся на поверхности образца. Рассмотрение проводилось на примере СЗМ “НаноСкан”, существенно отличающегося по конструкции от классических АСМ и использующего в качестве зонда пьезорезонансный датчик, фиксирующий контакт острия с исследуемой поверхностью по сдвигу резонансной частоты и уменьшению амплитуды автоколебаний зонда [12, 13]. СЗМ “НаноСкан” обладает широкими функциональными возможностями в плане исследования вязкоупругих свойств поверхности и тонких слоев вещества и позволяет работать с поверхностями, покрытыми тонким слоем смазки в режиме сканирующего зондового микроскопа. Последнее обстоятельство делает этот прибор пригодным для определения шероховатости и механических свойств материалов и покрытий в условиях промышленного производства и технологического контроля изделий машиностроения.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ ПРИ ЗАДАННОМ ЗАКОНЕ ДВИЖЕНИЯ ЗОНДА

Предполагается, что в слой жидкости толщиной h_0 погружен только кончик зонда, обладающий параболической формой (рис. 1), описываемой уравнением

$$H(r, 0) = h_0 + \beta r^2. \quad (1)$$

Эта часть зонда постоянно находится в жидкости и совершает гармонические колебания согласно уравнению

$$H(r, t) = h_0 + \beta r^2 - A \sin(\omega t). \quad (2)$$

При увеличении расстояния от кончика острия форма зонда становится цилиндрической с радиусом a . Рассмотрим цилиндрическую систему координат, выбрав начало отсчета на пересечении поверхности образца с осью симметрии острия зонда.

Рассмотрим движение жидкости при колебательном движении острия зонда в приближении тонкого слоя жидкости:

$$\kappa H \ll 1, \quad (3)$$

где κ – средняя кривизна поверхности острия зонда. Как следует из [14, 15], для такого случая уравнения движения жидкости могут быть упрощены до дифференциальных уравнений Рейнольдса для смазочного слоя с вязкостью μ , которые в цилиндрических координатах имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\mu \partial^2 v_r}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Уравнение непрерывности имеет форму

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

Здесь p – давление, v_z и v_r – вертикальная и радиальная компоненты скорости жидкости. Из (4) и (5) с использованием граничных условий

$$\begin{cases} v_r|_{z=H(r,t)} = 0, \\ v_z|_{z=H(r,t)} = \frac{\partial H}{\partial t}, \\ v_r|_{z=0} = 0, \\ v_z|_{z=0} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

может быть получено уравнение для распределения давления:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r H^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 12 \mu \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (7)$$

При $r \geq a$ (см. рис. 1) поверхность является свободной, т.е. параболическая часть тела всегда полностью погружена в воду, соответствующее условие для распределения давления таково:

$$p(a) = 0. \quad (8)$$

Считаем, что искомое распределение давления не имеет расходимости при $r = 0$ в любой момент времени. Тогда, учитывая (8), получаем решение (7):

$$p(r, t) = \frac{3A\mu\omega \cos(\omega t)}{2\beta} (H(r, t)^{-2} - H(a, t)^{-2}). \quad (9)$$

Вычислим силу, действующую на зонд в процессе его движения. Компоненты тензора напряжений имеют вид

$$p_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad p_{\varphi\varphi} = -p + 2\mu \frac{v_r}{r},$$

$$p_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad p_{r\varphi} = 0, \quad p_{z\varphi} = 0, \quad (10)$$

$$p_{zr} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right).$$

Уравнения (4)–(6) и (10) позволяют вычислить компоненты скорости v_z и v_r , а затем вычислить силу p_z , действующую на единицу поверхности острия зонда в вертикальном направлении:

$$p_z = \frac{3A\pi r\mu\omega \cos(\omega t)}{(h+a^2\beta)^2(h+r^2\beta)^2\sqrt{1+4r^2\beta^2}} \times$$

$$\times (2a^2h(1+4r^2\beta^2+16r^4\beta^4) +$$

$$+ a^4(\beta+4r^2\beta^3+16r^4\beta^5) +$$

$$+ r^2(-2h-r^2\beta+4h^2(\beta+4r^2\beta^3))). \quad (11)$$

Здесь введено обозначение

$$h = h_0 - A\sin(\omega t). \quad (12)$$

Вертикальная составляющая давления существенно возрастает при $A \rightarrow h_0$. На рис. 2 приведен пример распределения величины p_z при $h_0 = 100$ нм, $\beta = 0.05$ мкм⁻¹, $\omega = 10^5$ рад/с, $a = 100$ мкм, $t = 2.4$ мкс. Пунктирной и сплошной линиями показаны графики для случаев $A = 0.99 h_0$ и $A = 0.995 h_0$ соответственно. Параметр a не оказывает существенного влияния на данные распределения, если его значение значительно больше области, в которой наблюдается падение давления.

Учитывая параболическую аппроксимацию (2), можно заметить, что для выполнения условия тонкости слоя (3) достаточно выполнения неравенства

$$\frac{2\beta H}{(1+4\beta^2 r^2)^{3/2}} \ll 1. \quad (13)$$

Из условия выполнения данного неравенства для всех $r > 0$ следует

$$2\beta h \ll 1. \quad (14)$$

Учитывая (11), вычисление единственной ненулевой компоненты вектора силы, действующей на зонд в вертикальном направлении, приводит к результату

$$F(t) = -\frac{3a^4\pi\mu \left(\frac{dh}{dt}\right)}{2h(h+a^2\beta)^2} (1 + o(\beta h)). \quad (15)$$

Можно заметить, что данное уравнение с точностью до $o(\beta h)$ совпадает с интегралом от давле-

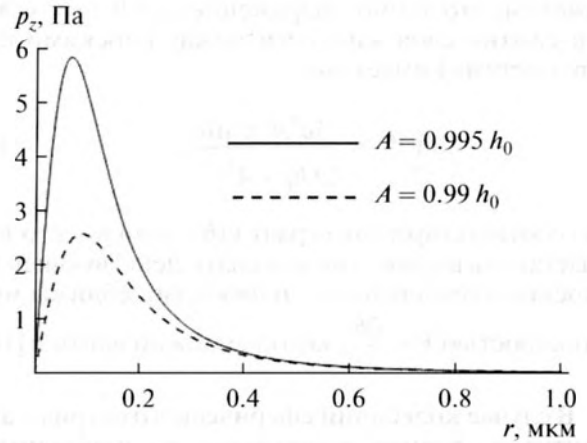


Рис. 2. Зависимость вертикальной компоненты давления, действующей на зонд, от радиальной координаты.

ния $-\int_0^a 2\pi r p(r, t) dr$, что обусловлено малостью

компоненты $2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}$ в уравнении (9) и малой кривизной поверхности, позволяющей не учитывать компоненту p_{zr} при вычислении силы. Таким образом, учет вязких напряжений, действующих в жидкости, при выполнении условия $\beta h \ll 1$ является несущественным. В дальнейшем будем использовать полученное выражение для силы с точностью до слагаемых первого порядка малости $o(\beta h)$

Из полученной зависимости видно, что при колебаниях с амплитудой, равной толщине слоя ($h_0 = A$), вычисленная сила уходит в бесконечность.

Вычислим вязкие потери, связанные с наличием слоя жидкости. Для соответствующей оценки найдем работу, совершаемую вязкой силой за период:

$$W = \int_S (\mathbf{F} ds) = \omega A \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F(t) \cos(\omega t) dt, \quad (16)$$

где использовано соотношение $ds = \frac{dh(t)}{dt} dt = -A\omega \cos(\omega t) dt$. Используя приближение (15), данный интеграл может быть вычислен аналитически. Соответствующее выражение имеет вид

$$W = \frac{\mu\omega}{\beta^2} 3\pi^2 \times$$

$$\times \left(\frac{a^2 h_0 \beta + h_0^2 - A^2}{\sqrt{h_0^2 - A^2 + 2a^2 h_0 \beta + a^4 \beta^2}} - \sqrt{h_0^2 - A^2} \right). \quad (17)$$

Заметим, что данное выражение при $\beta \rightarrow \infty$ (случай сжатия слоя жидкости между плоскими поверхностями) имеет вид

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} W = \frac{3a^4 A^2 \pi^2 \mu \omega}{2(h_0^2 - A^2)^{3/2}}, \quad (18)$$

что соответствует интегралу (16), если вместо $F(t)$ подставить выражение для силы, действующей на плоские параллельные плоскости, сближаемые со скоростью $V = \frac{\partial h}{\partial t}$, которое можно найти в [14].

В случае колебаний сферического острия с амплитудой, равной расстоянию до поверхности ($A = h_0$), сила стремится к бесконечности в момент прикасания острия зонда к поверхности, однако, несмотря на данный факт, работа за период имеет конечную величину:

$$W = \frac{3aA\pi^2 \mu \omega}{\sqrt{\beta^3(2A + a^2\beta)}}. \quad (19)$$

Анализ выражения (19) при $\beta \rightarrow 0$, как и прямое обращение к (18), показывает, что в случае плоских поверхностей работа до момента касания зонда с поверхностью оказывается бесконечной. Это обстоятельство является одним из факторов, объясняющих высокую удерживающую способность тонкого слоя масла в подшипниках скольжения. В случае тела с параболической формой закругления кончика, при условии равенства нулю нормальной составляющей скорости в момент касания поверхности, потери, связанные с наличием слоя жидкости, оказываются конечной величиной.

Этот аналитический результат имеет существенное значение и позволяет объяснить причину резкого ослабления резонансных колебаний зонда при его жестком контакте с поверхностью, покрытой жидким вязким слоем. Принципиальным моментом является обращение работы вязких сил в бесконечность при ударе зонда о поверхность и ее конечность при плавном касании. Поскольку практически на любой поверхности при работе в воздухе присутствует слой адсорбированной воды, то рассмотренный вязкий механизм потерь надо учитывать при анализе данных о механических свойствах сканируемой поверхности, получаемых различными СЗМ-методами.

Таким образом, даже не рассматривая эффекты, связанные с влиянием сжимаемости жидкости и упругопластической деформации поверхности образца и острия зонда, можно за счет вязких сил объяснить существенное уменьшение амплитуды резонансных колебаний зондов СЗМ при приближении их остриев к поверхности образца, покрытого тонким слоем вязкой жидкости.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ПОЛУЧЕННЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Экспериментальное исследование потерь, возникающих при осциллирующем движении тела с закругленным наконечником, погруженного в вязкий слой жидкости, было осуществлено на сканирующем нанотвердомере “НаноСкан” в ФГБНУ ТИСНУМ. Для данных исследований было изготовлено две модификации пьезорезонансного зонда с установленными на них сапфировыми остриями. Использовались зонд, радиус кривизны острия которого составлял 17 мкм (на рисунках полученные с его помощью данные маркируются надписью “острый зонд”), и зонд с радиусом кривизны острия 54 мкм (“тупой зонд”). Макроформа зондов соответствовала остро заточенному цилиндру диаметром 0.5 мм и длиной 1.5 мм.

Частота резонансных колебаний зонда находилась в интервале 12–13 кГц, амплитуда свободных колебаний во время эксперимента – 40 нм, уровень ограничения сигнала в электронном тракте (запас по усилению) в отдельных экспериментах достигал 30 раз, типичная величина не превышала трех раз. Вид амплитудной характеристики ограничителя, входящего в состав автогенератора, таков, что на начальном участке возбуждения зависимость амплитуды колебаний от усиления в тракте, а значит и вязких потерь в области контакта, линейная.

Конструкция прибора “НаноСкан” позволяет осуществлять контролируемый подвод колеблющегося пьезорезонансного зонда к исследуемой поверхности. Это так называемый режим “кривых подвода” [10, 11], который обычно используется для измерения модуля Юнга исследуемого материала. Данная методика основана на модели Герца взаимодействия двух упругих тел и позволяет по скорости увеличения резонансной частоты зонда при прижиге определять модуль Юнга материала. В данном случае интерес представляла не скорость ухода резонансной частоты, а изменение амплитуды колебаний зонда по мере его приближения к поверхности. Режим “кривых подвода” был выбран из-за того, что в нем остановка встречного движения зонда и поверхности осуществляется по факту достижения заданного частотного сдвига или срыва режима автогенерации. Использование такого рода контроля момента останова исключает повреждение острия зонда и поверхности в ходе эксперимента. Формально такого же рода исследования можно было осуществить, используя режим инструментального индентирования, когда остановка процесса внедрения происходит по достижении заданного усилия или глубины внедрения острия зонда в поверхность. При таком режиме практически всегда остается след от индентирования, и тем самым становится затруднительным обеспечение идентичности условий подвода при многократном индентиро-

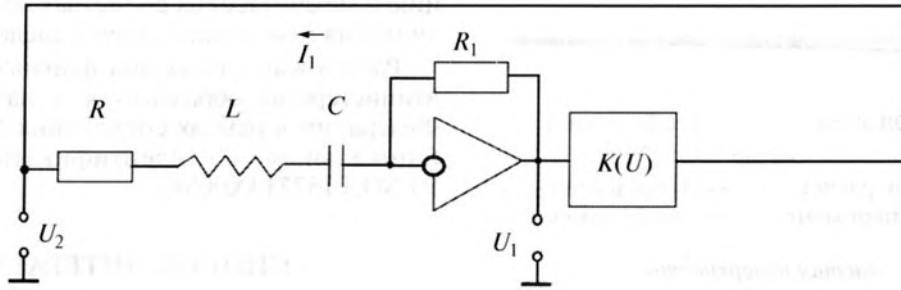


Рис. 3. Принципиальная схема работы пьезорезонансного датчика.

вании, поэтому был выбран более мягкий неразрушающий поверхность образца режим “кривых подвода”. В данном режиме “НаноСкан” регистрирует частоту и амплитуду колебаний зонда, среднюю силу взаимодействия между зондом и поверхностью, перемещение образца навстречу зонду.

Для сопоставления экспериментальных данных с предложенным подходом рассмотрим электрическую модель работы зонда.

Зонд включен в автогенераторную схему в качестве элемента, задающего частоту резонансных колебаний; R, L, C – параметры эквивалентной электрической схемы; U_1 – напряжение на выходе ограничителя; I_1 – сигнал, соответствующий регистрируемой амплитуде колебаний зонда; U_2 – напряжение на входе зонда. Ограничитель имеет передаточную характеристику следующего вида:

$$K(U) = U_0 \arctg \left[\frac{U_1}{U_{\text{орп}}} \right]. \quad (20)$$

Дифференциальное уравнение для тока в такой схеме может быть записано в виде

$$L \ddot{I}_1 + \left(R - \frac{U_0}{U_{\text{орп}}} \frac{R_1}{1 + \left(\frac{I_1 R_1}{U_{\text{орп}}} \right)^2} \right) \dot{I}_1 + \frac{I_1}{C} = 0. \quad (21)$$

Далее будем считать, что электрическим параметрам соответствуют их механические аналоги ($L \rightarrow m, C \rightarrow \frac{1}{k}, R \rightarrow \gamma, I_1 \rightarrow h_0 - h$, где m – масса, k – жесткость, γ – коэффициент демпфирования) и добавим в левую часть полученного уравнения гидродинамические потери, обусловленные силой (15). Применяя к полученному уравнению метод усреднения Ван-дер-Поля [15], можно получить укороченные уравнения для изменения амплитуды и фазы. Стационарное уравнение для амплитуды имеет вид

$$\begin{aligned} \pi \omega R A^2 + W(A) = \\ = 2 \pi \omega U_0 \frac{U_{\text{орп}}}{R_1} \left(-1 + \sqrt{\frac{R_1^2 A^2}{U_{\text{орп}}^2} + 1} \right), \end{aligned} \quad (22)$$

где $W(A)$ определено формулой (17). Можно заметить, что в отсутствие вязкой жидкости

$$A = 2 \frac{U_0}{R} \sqrt{1 - \frac{R U_{\text{орп}}}{R_1 U_0}}. \quad (23)$$

Для получения количественных зависимостей были использованы типичные механические характеристики зонда СЗМ “НаноСкан”: $\omega = 10^5$ рад/с, $a = 100$ нм, $L \rightarrow m = 10^{-5}$ кг, $1/C \rightarrow k = 10^5$ Н/м. Параметр β для острий с радиусами кривизны 17 и 54 мкм составляет 0.12 и 0.037 мкм⁻¹ соответственно. Величина $R \rightarrow \gamma = 2 \times 10^{-2}$ кг/с, определяющая собственные потери, была оценена из АЧХ свободного зонда, добротность которого составляет ~50.

Отношение $\frac{R_1}{U_{\text{орп}}} = 10^9 \frac{1}{\text{м}}$ было определено эмпирически по изменению уровня амплитуды свободного зонда с изменением уровня возбуждения при помощи формулы (23); с использованием этой же формулы при $\frac{U_{\text{орп}}}{R_1} \rightarrow 0$ по амплитуде

установившихся колебаний был определен параметр $U_0 = 4.5 \times 10^{-10}$ мкг/с.

На рис. 4 и 5 приведены типичные кривые подвода, полученные для случаев, когда поверхность покрыта слоем масла и вазелина.

Таким образом, проведенная экспериментальная проверка показала правильность предположения о существенном влиянии вязкого слоя жидкости на поведение колеблющегося зонда и продуктивность принятого подхода. Продемонстрировано удовлетворительное совпадение экспериментальных данных и основных закономерностей, полученных теоретически. В дальнейшем планируется рассмотрение гидродинамических потерь, возникающих при контакте с вязким слоем острия пирамидальной формы, имеющего сферический кончик, и оценка влияния сжимаемости вязкой жидкости и упругой деформации поверхности на поведение пьезорезонансного зонда, используемого в СЗМ “НаноСкан”. Необходимо также проведение сопоставления полученных данных о потерях с поведением стандартных

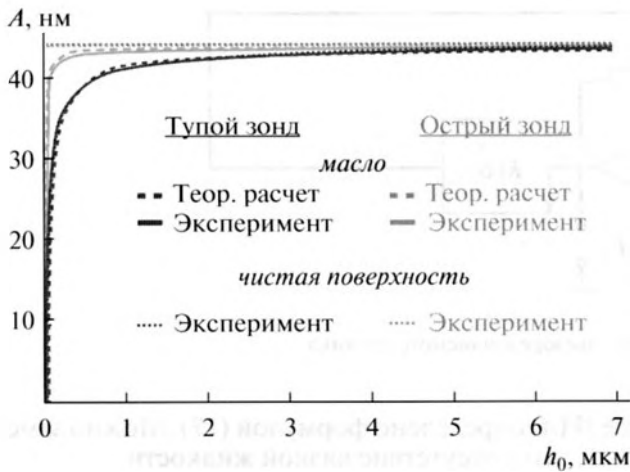


Рис. 4. Зависимость амплитуды колебаний зонда от расстояния до чистой поверхности и поверхности, покрытой слоем масла; значение вязкости 0.02 П.

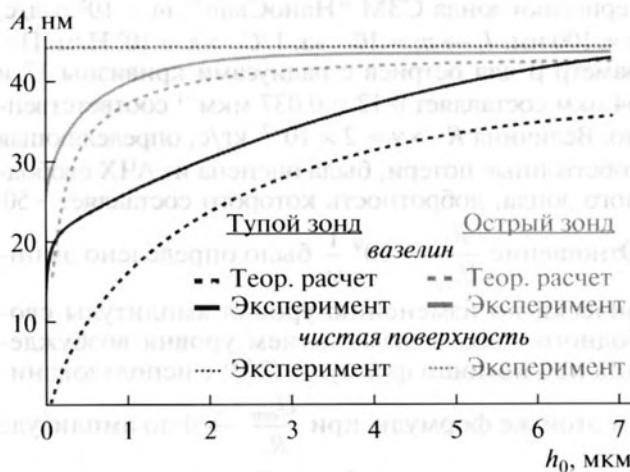


Рис. 5. Зависимость амплитуды колебаний зонда от расстояния до чистой поверхности и поверхности, покрытой слоем вазелина; значение вязкости 0.5 П.

кремниевых кантилеверов при работе в жидкости и на воздухе.

Полученные результаты указывают на существенное влияние возможных загрязнений исследуемой поверхности на амплитуду резонансных колебаний СЗМ-зондов и указывают на предпочтительность использования режима работы “по сдвигу резонансной частоты” для приборов, использующих пьезорезонансные зонды для контроля контакта с поверхностью. Используя такие приборы в режиме сканирования и определения шероховатости изделий машиностроения, целесообразно обеспечивать упругий контакт острия с поверхностью, а из данных об амплитуде колебаний и силе прижима зонда извлекать информа-

цию о механических свойствах поверхности и наличии на ней вязких слоев и следов смазки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках соглашения № 14.577.21.0088 (уникальный идентификатор проекта RFMEFI57714X0088).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sarid D. Exploring scanning probe microscopy with “Mathematica”. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1997. 311 p.
2. Миронов В.Л. Основы сканирующей зондовой микроскопии. Москва: Техносфера, 2005. 112 с.
3. Sader J. Frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope // J. Appl. Phys. 1998. V. 84. № 1. P. 64–76.
4. Green C.P., Sader J.E. Torsional frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope // J. Appl. Phys. 2002. V. 92. № 10. P. 6262.
5. Green C.P., Sader J.E. Small amplitude oscillations of a thin beam immersed in a viscous fluid near a solid surface // Phys. Fluids. 2005. V. 17. № 7.
6. Vinogradova O.I., Butt H.-J., Yakubov G.E., Feuillebois F. Dynamic effects on force measurements. I. Viscous drag on the atomic force microscope cantilever // Rev. Sci. Instrum. 2001. V. 72. № 5. P. 2330.
7. Stokes G. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums // Trans. Cambridge Philos. Soc. 1851. V. 9. P. 8–106.
8. Rosenhead L. Laminar Boundary Layers. Oxford: Clarendon, 1963. 688 p.
9. Хаясака Т. Электроакустика. Москва: Мир, 1982. 246 с.
10. Maslenikov I.I., Reshetov V.N., Loginov B.A., Useinov A.S. Mapping of mechanical properties of nanostructured materials using a piezoresonance probe // Instruments Exp. Tech. 2015. V. 58. № 3. P. 438–443.
11. Maslenikov I.I., Reshetov V.N., Useinov A.S. Mapping the elastic modulus of a surface with a NanoScan 3D // Instruments Exp. Tech. 2015. V. 58. № 5. P. 711–717.
12. Гоголинский К.В., Львова Н.А., Усеинов А.С. Применение сканирующих зондовых микроскопов и нанотвердомеров для измерения механических свойств твердых материалов на наноуровне // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2007. Т. 73. № 6. С. 28.
13. Useinov A., Gogolinskiy K., Reshetov V. Mutual consistency of hardness testing at micro- and nanometer scales // Int. J. Materials Research. 2009. № 7. P. 968.
14. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1955. 521 с.
15. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. Регулярные и хаотические автоколебания. Синхронизация и влияние флуктуаций. Издательский дом “Интеллект”, 2009. 312 с.