

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.833.5

ИНЕРЦИОННАЯ ПРИСОЕДИНЕННАЯ ДЛИНА ГОРЛА РЕЗОНАТОРОВ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

© 2016 г. А. И. Комкин, А. И. Быков

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
105005 Москва, ул. 2-я Бауманская 5

E-mail: akomkin@mail.ru

Поступила в редакцию 25.08.2015 г.

Исследовалась инерционная присоединенная длина (концевая поправка) горла различных конфигураций резонатора Гельмгольца на основе численных расчетов методом конечных элементов. Вначале определялась собственная частота резонатора, затем на ее основе вычислялась присоединенная длина горла резонатора. Проанализирована зависимость присоединенной длины горла от геометрических параметров резонатора Гельмгольца. Проведена аппроксимация полученных на основе численных расчетов зависимостей аналитическими выражениями.

Ключевые слова: резонатор Гельмгольца, собственная частота, присоединенная длина, расчет, метод конечных элементов.

DOI: 10.7868/S0320791916030096

Данная статья является продолжением цикла статей, посвященных вычислению инерционной присоединенной длины горла резонатора Гельмгольца на стенке канала [1–3]. Эта задача имеет большое практическое значение, так как точное определение собственной частоты резонатора Гельмгольца на стенке канала с целью его эффективного использования на практике так или иначе связано с необходимостью знания присоединенной длины горла резонатора. Действительно, собственная частота f_0 резонатора Гельмгольца с полостью цилиндрической формы с учетом поправки на длину его полости L определяется следующей формулой [4]:

$$f_0 = (c/2\pi)\sqrt{S_0/(l_c V + L^2 S_0/3)}, \quad (1)$$

где c – скорость звука в среде; V – объем резонатора; S_0 – площадь поперечного сечения горла резонатора; l_c – эффективная длина горла резонатора, $l_c = l + l_a$; l – действительная длина горла; l_a – общая присоединенная длина горла, которая в свою очередь складывается из присоединенных длин горла с внутренней l_i и внешней l_e стороны резонатора и которая существенным образом зависит как от конфигурации самого резонатора, так и от конфигурации канала, в котором размещается резонатор. Формула (1) справедлива при $2\pi f_0 L/c \ll 1$.

Следует отметить, что в работах, посвященных расчету резонаторов Гельмгольца, величина присоединенной длины резонатора устанавливается весьма приближенно, без учета особенностей той или иной конфигурации резонатора Гельмгольца. Иногда с этой целью используют присоединен-

ную длину отверстия перегородки [5], а иногда присоединенную длину отверстия в бесконечном экране [6], что может привести к существенным погрешностям в определении характеристик резонатора Гельмгольца. Такое положение дел обусловлено тем обстоятельством, что до настоящего времени в теоретическом плане подробно рассмотрена лишь присоединенная длина отверстия перегородки в канале, а исследование более общих и близких к резонатору Гельмгольца случаев до сих пор практически не проводилось в силу имеющихся на этом пути значительных математических трудностей.

Между тем, в последнее время интенсивное развитие получили численные методы расчета глушителей шума, и в частности, резонаторов Гельмгольца [7, 8], которые позволяют существенно расширить возможности проводимых исследований. Здесь, как и в предыдущих работах авторов, исследования резонаторов Гельмгольца также основывались на численных расчетах с использованием метода конечных элементов. В этой работе при проведении конечно-элементного моделирования был использован программный пакет COMSOL Multiphysics. Последовательно рассмотрены несколько конфигураций резонатора Гельмгольца, начиная с наиболее простого торцевого резонатора Гельмгольца, переходя затем к резонатору Гельмгольца на стенке прямоугольного канала и заканчивая трубчатым резонатором Гельмгольца. Полученные при этом данные по присоединенной длине горла для первых двух типов резонаторов являются обобщением результатов, полученных в [1, 3]. В дальнейшем эти данные были ис-

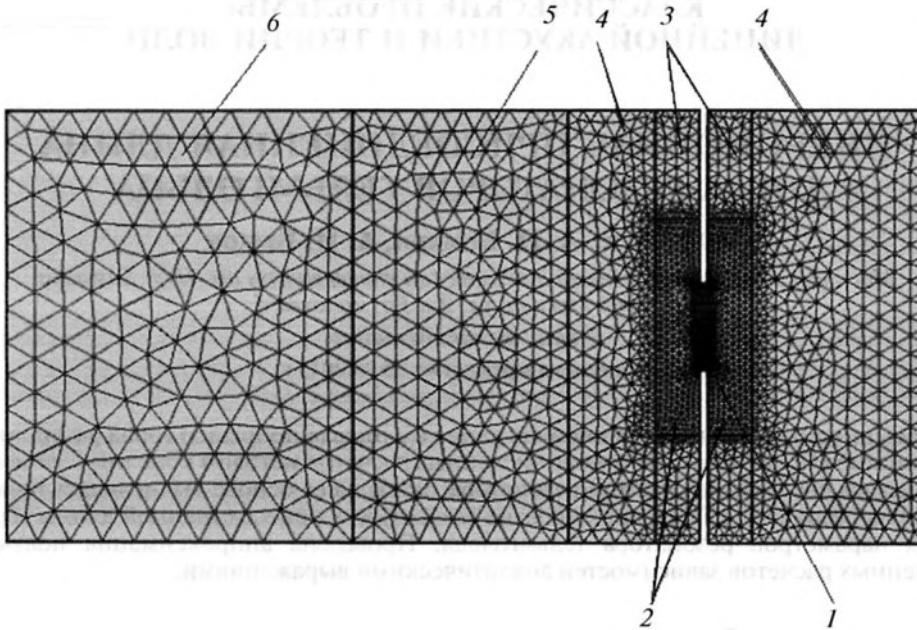


Рис. 1. Конечно-элементная модель перегородки в канале в продольном сечении.

пользованы при определении присоединенной длины горла трубчатого резонатора Гельмгольца.

ТОРЦЕВОЙ РЕЗОНАТОР ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Наиболее простой случай с точки зрения теоретического анализа соответствует резонатору Гельмгольца, располагающемуся на торцевой стенке круглого канала. Основой для определения присоединенной длины горла такой конфигурации резонатора Гельмгольца в канале служит рассмотрение присоединенной длины отверстия в перегородке, расположенной в поперечном сечении круглого канала. Эта задача была теоретически проанализирована, с одной стороны, Фоком [9], а с другой стороны, Каралом [10] и Ингардом [11]. Для перегородки толщиной h с осесимметричным отверстием диаметром d_0 в канале круглого поперечного сечения диаметром d общая присоединенная длина отверстия l_a является функцией параметра $g = d_0/d$. При этом, как показано в [1], оценки Фока и Карала–Ингарда определяют соответственно нижнюю и верхнюю границу интервала, в котором находится действительное значение общей присоединенной длины отверстия в перегородке:

$$0.785F(g)d_0 < l_a < 0.822H(g)d_0, \quad (2)$$

где $F(g)$ – функция Фока, $F(g) \approx (1 - 1.41g + 0.34g^3 + 0.07g^5)$; $H(g)$ – функция Карала, которая описывается бесконечным рядом по функциям Бесселя.

При описании присоединенной длины через функцию Карала с высокой точностью требуется большое число членов ряда, особенно при малых

значениях g . Вместе с тем, с хорошим для практики приближением функция Карала может быть аппроксимирована полиномиальной зависимостью:

$$H_p(g) \approx (1 - 1.33g + 0.17g^2 - 0.135g^3 + 0.29g^4), \quad (3)$$

которая приводит к ошибкам только в третьей значащей цифре после запятой.

Устранить имеющуюся неоднозначность в аналитических решениях можно на основе конечно-элементного моделирования перегородки с отверстием в круглом канале. Такая задача была решена в [1] для случая малых отверстий в перегородке ($g < 0.25$), когда присоединенную длину можно считать линейной функцией параметра g . Для обобщения полученных результатов на весь диапазон изменений параметра g в данной работе были проведено дополнительное конечно-элементное моделирование перегородки с осесимметричным отверстием в канале круглого поперечного сечения. Конечно-элементная модель перегородки в канале представлена на рис. 1. Используется неравномерное разбиение рассматриваемой конфигурации на конечные элементы, более подробное в окрестности отверстия и более грубое в остальной части канала. С этой целью все пространство модели разбивалось на несколько областей. Для области 1, в самом отверстии перегородки, характерный размер конечных элементов $\Delta = 0.3$ мм, для области 2, в окрестности отверстия, $\Delta = 0.8$ мм, а для областей с 3 по 6 размер Δ равен соответственно 1.5, 2, 3 и 4 мм.

При моделировании с одной стороны канала, перед перегородкой, в рассматриваемом частотном диапазоне возбуждались плоские звуковые волны. На другом конце канала, за перегородкой,

задавалось граничное условие в виде согласованной нагрузки с импедансом $Z = \rho c$, где ρ – плотность среды; c – скорость звука в ней. При проведении конечно-элементного моделирования в расчетной точке на оси канала в его левой части на расстоянии $x = 60$ мм от передней плоскости перегородки определялись комплексные амплитуды звукового давления P_x и продольной колебательной скорости V_x , а затем и нормированный акустический импеданс в этой точке $\xi_x = P_x/(V_x \rho c)$. Далее это значение импеданса пересчитывалось во входной импеданс перегородки $\xi_{\text{вх}}$, соответствующий точке, непосредственно примыкающей к передней плоскости перегородки ($x = 0$). При этом $\xi_{\text{вх}} = (\xi_x \cos kx + i \sin kx) / (\cos kx + i \xi_x \sin kx)$.

С теоретической точки зрения [10, 12], входной импеданс перегородки $\xi_{\text{вх}}$ определяется формулой $\xi_{\text{вх}} = 1 + ik(l + l_a)/g^2$, которая соответствует низкочастотному приближению с условием $kl \ll 1$, где k – волновое число. Отсюда получаем выражение $l_a = (g^2/k) \text{Im} \xi_{\text{вх}} - l$, которое связывает искомую присоединенную длину отверстия в перегородке с определяемым по результатам численных расчетов входным импедансом перегородки.

Численные расчеты присоединенной длины отверстия были проведены при различных значениях параметра g . Варьирование этого параметра осуществлялось путем изменения диаметра канала. При этом важное значение имеет правильный выбор диаметра отверстия перегородки, что обусловлено особенностями конечно-элементного моделирования рассматриваемой конфигурации канала с перегородкой. С одной стороны, для повышения точности расчетов размер элементов разбиения должен быть существенно меньше поперечного размера канала. С этой точки зрения для получения достоверных результатов при малых g , когда $d \gg d_0$, диаметр отверстия перегородки следует уменьшать, в противном случае количество элементов разбиения в конечно-элементной модели станет чрезмерно большим, что затруднит проведение вычислений. С другой стороны, для вычислений при больших g , когда $d \approx d_0$ и присоединенная длина отверстия становится малой величиной, диаметр отверстия перегородки следует увеличивать. В противном случае присоединенная длина отверстия, пропорциональная его диаметру, может стать значительно меньше действительной длины отверстия, что существенно затруднит вычисление присоединенной длины отверстия по результатам численных расчетов. Таким образом, при установлении диаметра отверстия перегородки приходим к противоречивым требованиям. По результатам расчетов было определено, что целесообразно при моделировании установить диаметр отверстия перегородки $d_0 = 10$ мм.

Графическая зависимость относительной присоединенной длины отверстия с одной стороны перегородки $\bar{l}_{a0} = l_a/(2d_0)$ от параметра g для перегородки толщиной 1 мм, полученная по результа-

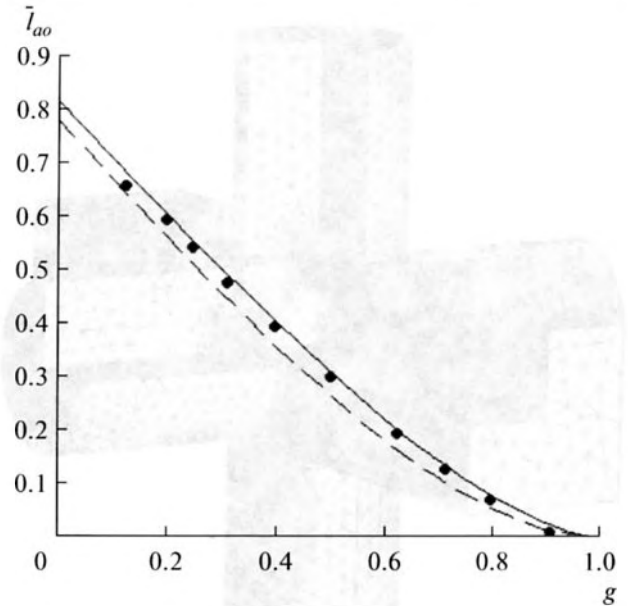


Рис. 2. Оценки зависимости присоединенной длины отверстия перегородки от отношения его диаметра к диаметру канала: Фока (—); Карала–Ингарда (—); численный расчет (•).

там численных расчетов, отмечена на рис. 2 точками. Там же представлены еще две кривые, соответствующие, согласно (2), теоретическим оценкам Фока и Карала–Ингарда. Сравнение этих данных показывает, что результаты численных расчетов в интервале $0.1 < g < 0.9$ хорошо совпадают с оценкой Карала–Ингарда. На границах интервала численные значения несколько ниже этих теоретических значений. Для малых g это обусловлено снижением точности расчетов при таких конфигурациях перегородки, а для больших g – тем, что присоединенная длина отверстия при этом становится малой в сравнении с толщиной самой перегородки. Отметим, что при увеличении толщины перегородки численные результаты будут еще больше приближаться к аналитической оценке Карала–Ингарда, что является подтверждением правомерности использования функции Карала для определения присоединенной длины отверстия в перегородке. На практике целесообразно использовать полиномиальную аппроксимацию (3) этой функции. При этом присоединенная длина с одной стороны перегородки запишется в виде

$$l_{a0} = \alpha H_p(g) d_0 / 2, \quad (4)$$

где постоянный коэффициент α будет зависеть, как показано в [1], от толщины перегородки, несколько уменьшая свое значение по сравнению с выражением в правой части (2) при переходе к малым толщинам перегородки l .

Для торцевого резонатора Гельмгольца в канале внешняя присоединенная длина горла резонатора l_e будет описываться формулой (4). Внутренняя присоединенная длина горла l_i цилиндрического торце-

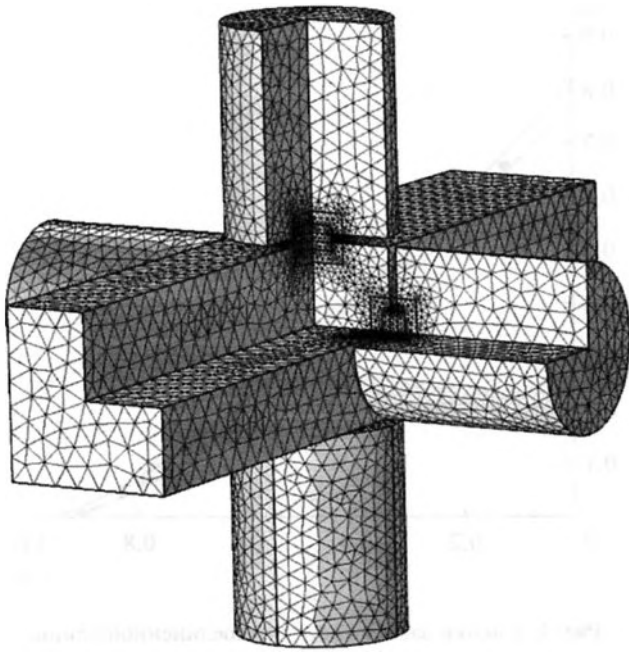


Рис. 3. Конечно-элементная модель резонаторов Гельмгольца на стенках квадратного канала в разрезе.

вого резонатора Гельмгольца с диаметром полости D и длиной L может быть также описана с помощью формулы (4), только при этом в нее вместо параметра g будет входить параметр $g_i = d_0/D$.

Следует, однако, иметь в виду, что такое описание остается справедливым до тех пор, пока размеры полости резонатора удовлетворяют соотношению $\bar{L} = L/D > 0.2$. В противном случае задняя стенка резонатора начинает влиять на присоединенную длину l_i и для ее описания следует использовать обобщенную функцию Карала [1]

$$H(g, \bar{L}) = \frac{3\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\alpha_n g)}{g \alpha_n^3 J_0^2(\alpha_n)} \operatorname{ctg}(2\alpha_n \bar{L}),$$

где J_0, J_1 – функции Бесселя соответственно нулевого и первого порядков; α_n – нули функции Бесселя первого порядка.

РЕЗОНАТОР ГЕЛЬМГОЛЬЦА НА СТЕНКЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО КАНАЛА

Более сложный для анализа случай соответствует цилиндрическому резонатору Гельмгольца, располагающемуся на боковой поверхности прямоугольного канала. При этом внутренняя присоединенная длина горла резонатора остается такой же, как для случая торцевого резонатора, а его внешняя присоединенная длина существенно меняется. В [2] дана теоретическая оценка этой величины в предположении поршневого движения воздуха в горле резонатора. Однако, как показали дальнейшие исследования, такая модель

движения воздуха в горле резонатора справедлива далеко не всегда, что может приводить к значительным погрешностям в вычислениях [3]. В связи с этим основным подходом к определению присоединенной длины горла такого резонатора Гельмгольца является использование численных методов расчета. При этом решается, по сути, обратная задача: на основе конечно-элементного моделирования резонатора Гельмгольца в канале определяется его собственная частота, затем с помощью формулы (1) вычисляется присоединенная длина горла резонатора. Таким способом определялась присоединенная длина четвертьволнового резонатора, расположенного на стенке круглого канала [13] или внутри камеры расширения [14, 15].

В [3] результатами конечно-элементного моделирования резонатора Гельмгольца на стенке прямоугольного канала показано, что в общем случае зависимость внешней присоединенной длины горла резонатора l_{ae} от отношения диаметра горла к поперечному размеру канала может быть описана аналитически достаточно точно полиномом третьей степени. В данной работе эти результаты обобщены для случая, когда на стенке квадратного канала в его поперечном сечении располагается несколько резонаторов Гельмгольца. Конечно-элементная модель такой системы для случая четырех резонаторов представлена на рис. 3. Как и ранее, используется неравномерное разбиение рассматриваемой конфигурации на конечные элементы, более подробное в окрестности горла резонаторов. При проведении исследований вычислялись потери передачи в рассматриваемой системе $TL = 10 \lg(W_u/W_d)$, где W_u, W_d – звуковые мощности соответственно падающей волны в канале перед резонатором и прошедшей волны за резонатором. В качестве собственной частоты резонатора Гельмгольца принималась частота, соответствующая максимуму на графике потерь передачи TL такого резонатора.

Графики потерь передачи резонаторов Гельмгольца на стенках канала в зависимости от их числа n представлены на графиках рис. 4, из которых следует, что собственная частота резонаторов существенно возрастает с увеличением n . Расчеты были проведены для квадратного канала с размером стенок $b = 40$ мм, толщиной стенки $h = 2$ мм и резонаторами с диаметром горла $d_0 = 10$ мм, диаметром цилиндрического объема резонатора $D = 40$ мм и его длиной $L = 50$ мм. Этот результат наглядно показывает, какое большое влияние может оказывать присоединенная длина горла на собственную частоту резонатора Гельмгольца. Действительно, в данном случае все резонаторы одинаковы, изменение их собственной частоты происходит исключительно за счет изменения наружной присоединенной длины горла резонаторов, которая в свою очередь зависит от конфигурации канала. Если на стенке канала расположен один резонатор, то на него приходится весь объем канала квадратного поперечного сечения.

Если имеется два резонатора, размещенных на противоположных стенках, то в силу симметрии конфигурации ее можно свести к варианту с одним резонатором на стенке канала, но с уже вдвое меньшим поперечным сечением. Тогда, согласно [3], внешняя присоединенная длина горла резонатора уменьшится и, следовательно, собственная частота резонатора возрастет. Если два резонатора располагаются не на противоположных, а на смежных стенках, то присоединенная длина горла резонаторов при такой перестановке изменяется незначительно. Аналогичным образом уменьшается внешняя присоединенная длина горла резонаторов, когда их число увеличивается до 4. При этом на один резонатор приходится уже четверть объема канала с треугольным поперечным сечением.

Далее была получена зависимость внешней присоединенной длины горла резонатора l_e от отношения d_0/b . При этом параметр d_0/b менялся путем изменения размера канала, а диаметр горла, как и размеры самого резонатора, оставались неизменными. Вначале на основе численного моделирования определялась собственная частота резонатора, а затем и внешняя присоединенная длина его горла. Для этого использовалась формула (1), в которой для внутренней присоединенной длины горла использовалась оценка (3). Вычисленные значения внешней присоединенной длины горла резонаторов отмечены на рис. 5 точками. Следует отметить, что для случая трех и четырех резонаторов вычисления ограничивались диапазоном $d_0/b \leq 0.25$. Данное обстоятельство обусловлено особенностью геометрии этих двух случаев, когда поперечный размер канала b не может быть меньше диаметра резонатора D . Конечно, для расширения диапазона вычислений можно уменьшать диаметр резонатора. Однако при этом возникает другая трудность, заключающаяся в том, что при неизменном диаметре горла d_0 это приведет к уменьшению отношения d_0/D , что в свою очередь увеличивает погрешность определения присоединенной длины горла с помощью формулы (1). Поэтому, как показали расчеты, для получения достоверных результатов конфигурация резонатора должна удовлетворять соотношению $d_0/D \geq 0.4$. Затем с помощью регрессионного анализа проводилась аппроксимация полученных расчетных данных полиномом третьей степени. Построенные по результатам аппроксимации кривые, отображенные на рис. 5 сплошными линиями, при уменьшении отношения d_0/b стремятся, как и следовало ожидать, к одному предельному значению $\alpha \approx 0.815$, что для данной длины горла резонатора $l = 2$ мм согласуется с данными работы [1].

Следует, однако, отметить, что при использовании полиномиальной аппроксимации даже небольшие изменения в исходных данных могут приводить к значительным изменениям в значениях коэффициентов полинома, хотя вид получаемых аппроксимирующих кривых практически

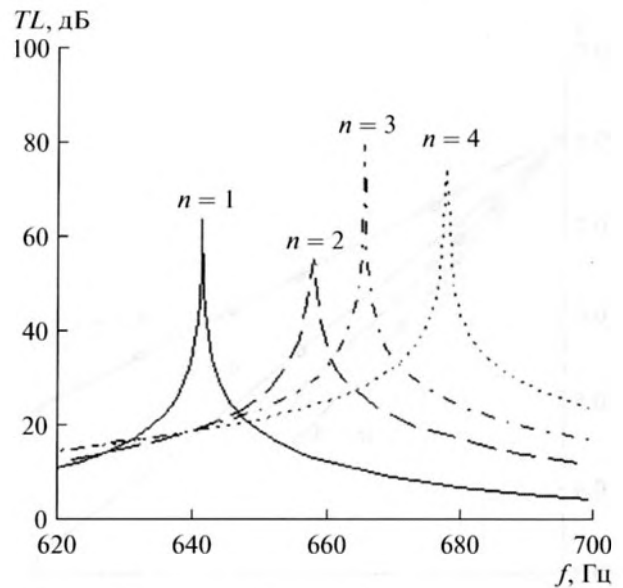


Рис. 4. Потери передачи для различного числа резонаторов n в поперечном сечении канала.

не изменяется. Поэтому сами по себе значения коэффициентов аппроксимирующего кубического полинома не могут служить для однозначного описания присоединенной длины. С другой стороны, как следует из рассмотрения рис. 5, полученные зависимости в первом приближении с достаточной для практики точностью можно считать линейными. С учетом этого указанные зависимости целесообразно аппроксимировать линейной функцией вида

$$l_e = [\alpha - \beta(d_0/b)]d_0/2. \quad (5)$$

Регрессионный анализ приводит в последнем выражении к значению $\alpha = 0.81$, при этом коэффициент β в зависимости от числа резонаторов n на стенке канала принимает следующие значения:

| n | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---------|-------|------|------|------|
| β | 0.625 | 0.99 | 1.18 | 1.39 |

Отметим, что соответствующее линейной аппроксимации значение α меньше более точного значения α , которое дает аппроксимация кубическим полиномом. Вместе с тем, на практике отношение d_0/b , как правило, изменяется в интервале $0.05 < d_0/b < 0.5$, в котором линейная аппроксимация дает достаточно высокую точность.

Заметим также, что полученные выше результаты можно использовать и при других длинах горла резонаторов, при этом коэффициент β линейной аппроксимации остается неизменным, а коэффициент α возрастает с увеличением длины горла, стремясь в пределе к значению 0.82 и при-

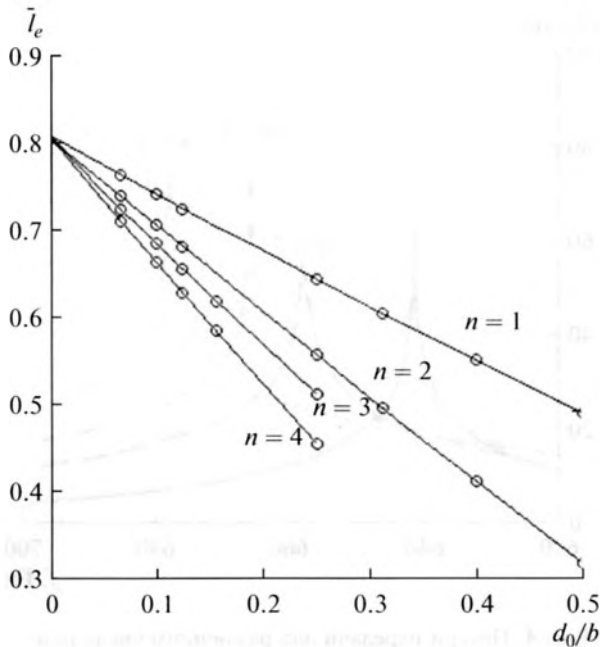


Рис. 5. Зависимость внешней присоединенной длины горла от отношения d_0/b для различного числа n резонаторов Гельмгольца.

нимая в зависимости от длины горла l следующие значения:

| | | | | |
|----------|-------|------|------|-------|
| l , мм | 0.5 | 1 | 2 | 5 |
| α | 0.795 | 0.80 | 0.81 | 0.815 |

ТРУБЧАТЫЙ РЕЗОНАТОР ГЕЛЬМГОЛЬЦА

В трубчатом концентрическом резонаторе Гельмгольца горло резонатора также образовано отверстием на стенке канала. Однако здесь камера резонатора, обычно круглого поперечного сечения, располагается на одной продольной оси с каналом. Часто при расчете такого резонатора предполагают [5], что присоединенная длина его горла равна рассмотренной выше присоединенной длине отверстия перегородки в канале. В действительности правомерность такого предположения далеко не очевидна, хотя бы в силу разной геометрии поверхностей, на которых располагаются эти два отверстия.

Основным инструментом исследования в этом случае также являлся метод конечно-элементного моделирования. Как и ранее, для получения достоверных результатов концентрический резонатор Гельмгольца при формировании его конечно-элементной модели разбивался, как это представлено на рис. 6, на несколько областей, каждая из которых характеризуется своей подробностью разбиения на конечные элементы.

Вначале была определена зависимость общей присоединенной длины горла резонатора l_a от

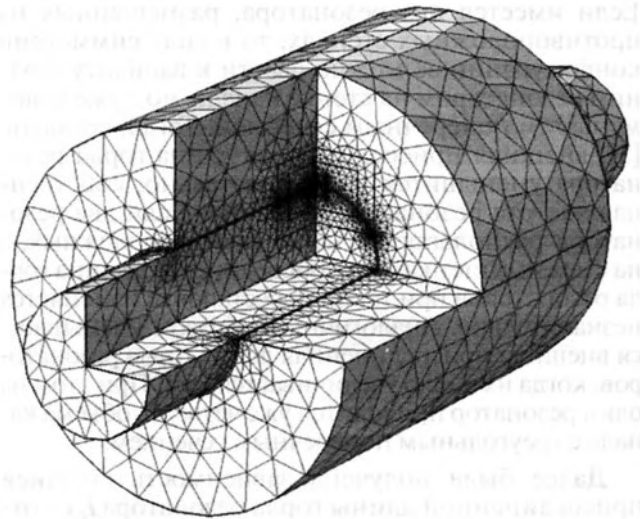


Рис. 6. Конечно-элементная модель трубчатого резонатора Гельмгольца в разрезе.

ношения диаметра горла d_0 к диаметру канала d : $g = d_0/d$. При этом диаметр горла резонатора оставался неизменным, $d_0 = 5$ мм, а изменялся диаметр канала. По результатам численных расчетов находили собственную частоту резонатора и затем определяли общую присоединенную длину горла резонатора. Расчеты проводились при толщине стенки канала $h = 0.5$ мм, диаметре камеры резонатора $D = 200$ мм и длине резонатора $L = 100$ мм. Такая длина трубчатого резонатора оставалась неизменной и во всех последующих расчетах. Общий вид полученной искомой зависимости и ее линейная аппроксимация представлены на рис. 7а, где по оси ординат отложен безразмерный параметр $\bar{l}_a = l_a/d_0$. Как и для резонатора Гельмгольца на стенке прямоугольного канала, в данном случае присоединенная длина горла уменьшается с уменьшением значений параметра g , причем в интервале $0.1 \leq g \leq 0.5$ зависимость присоединенной длины горла резонатора от параметра g близка к линейной. Вместе с тем, для трубчатого резонатора Гельмгольца имеют место несколько характерных особенностей.

Во-первых, когда значения безразмерного параметра становятся меньше, $g < 0.1$, происходит резкое возрастание присоединенной длины горла резонатора. При этом диаметр канала начинает приближаться к диаметру камеры резонатора и, следовательно, такое поведение присоединенной длины горла обусловлено влиянием на нее стенки камеры трубчатого резонатора, подобно тому как это имеет место и в торцевом резонаторе Гельмгольца [1]. Для оценки влияния диаметра камеры резонатора D на присоединенную длину его горла были проведены численные расчеты торцевых резонаторов Гельмгольца с различными диаметрами камеры, когда остальные геометрические размеры

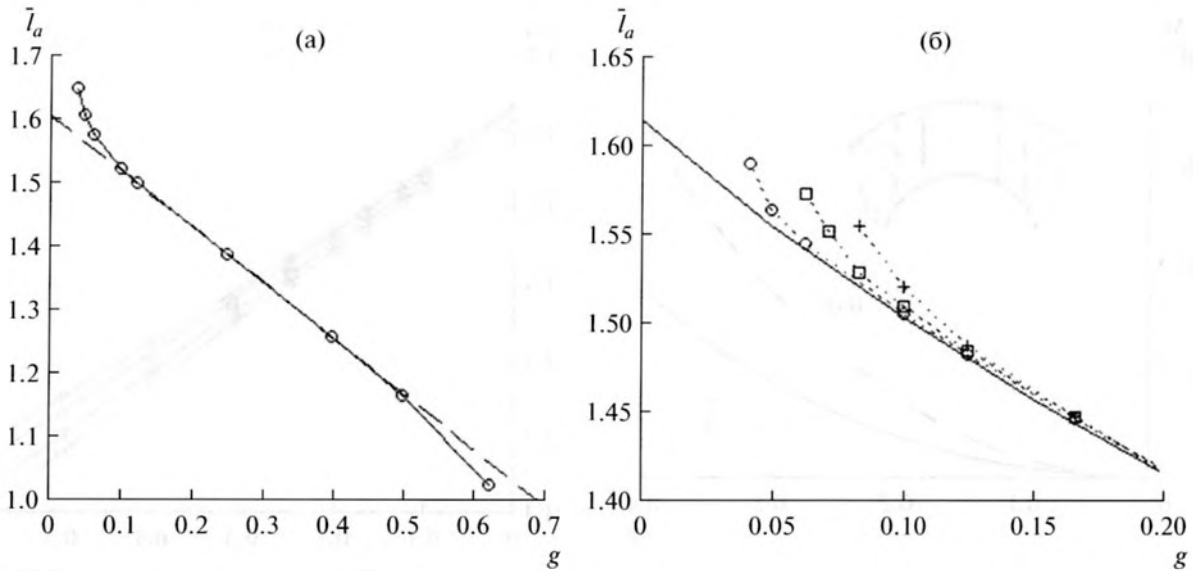


Рис. 7. Зависимости присоединенной длины горла резонатора от отношения его диаметра к диаметру канала: численный расчет при диаметрах D полости резонатора, равных 200 мм (○), 130 мм (□), 100 мм (+); (—) линейная аппроксимация; (—) полиномиальная аппроксимация.

резонаторов оставались такими же, как и в предыдущем расчете. Полученные зависимости для малых значений g представлены на рис. 7б и показывают явление резкого возрастания длины горла с уменьшением значений параметра g . Сплошной линией на этом рисунке показана полиномиальная экстраполяция исследуемой зависимости в область малых значений g , полученная на основе расчетных данных в интервале $0.0625 \leq g \leq 0.4$ для диаметра $D = 200$ мм. Эти данные показывают, что исследуемое явление имеет место при $D/d < 2.5$. Все последующие расчеты трубчатого резонатора велись при диаметре камеры $D = 200$ мм.

Во-вторых, при значениях $g > 0.4$, как следует из рис. 7а, отклонение от линейности наблюдаются в другую сторону, так что с увеличением g происходит более интенсивное, чем при линейной зависимости, снижение присоединенной длины горла. Заметим, что для резонатора на стенке квадратного канала изменение присоединенной длины горла при таких значениях g , как было показано выше, наоборот, становится менее интенсивным.

Еще одна особенность рассматриваемой задачи заключается в том, что, в отличие от рассмотренных выше резонаторов, для трубчатого резонатора Гельмгольца длина его горла не является точно определенной, так как она в силу кривизны поверхности канала будет меняться по периметру горла, причем эти изменения будут зависеть от диаметра горла. Действительно, если рассмотреть поперечное сечение круглого канала с внутренним радиусом r с размещенным на его стенке толщиной h отверстием радиуса r_0 и ввести безразмерные параметры $\bar{h} = h/r$ и $g = r_0/r$, то относительное приращение длины отверстия в этом сечении

определится выражением: $\Delta \bar{h} = \Delta h/r = ((1 + \bar{h})^2 - g^2)^{1/2} - (1 - g^2)^{1/2} - \bar{h}$. Соответствующие графические зависимости представлены на рис. 8 и показывают, что приращение длины отверстия существенно возрастает при больших значениях g , так же как и при увеличении параметра \bar{h} . Следует иметь в виду, что в поперечном сечении канала будут максимальные изменения длины отверстия, а усредненные по периметру отверстия такого рода изменения будут, конечно, меньше. В связи с этим представлялось бы целесообразным, приняв в качестве длины горла трубчатого резонатора толщину стенки канала, определять по результатам численных расчетов общую присоединенную длину горла l_a , не разделяя ее на внутреннюю и внешнюю.

Далее была исследована зависимость общей присоединенной длины горла трубчатого резонатора Гельмгольца от длины его горла, т.е. от толщины стенки канала h . Искомые зависимости, полученные по результатам численных расчетов для диаметра горла $d_0 = 5$ мм, представлены на рис. 9 и показывают, что с увеличением толщины стенки присоединенная длина горла возрастает, при этом происходит не только некоторое смещение кривых по оси ординат, но и заметное изменение их угла наклона.

Регрессионный анализ, проведенный в интервале $0.1 < d_0/d < 0.5$, приводит в зависимости от толщины стенки h к следующим значениям коэффициентов линейной аппроксимации в формуле (5):

| h , мм | 0.5 | 1 | 2 | 3 |
|----------|-------|-------|------|------|
| α | 1.615 | 1.625 | 1.64 | 1.64 |
| β | 0.86 | 0.84 | 0.81 | 0.77 |

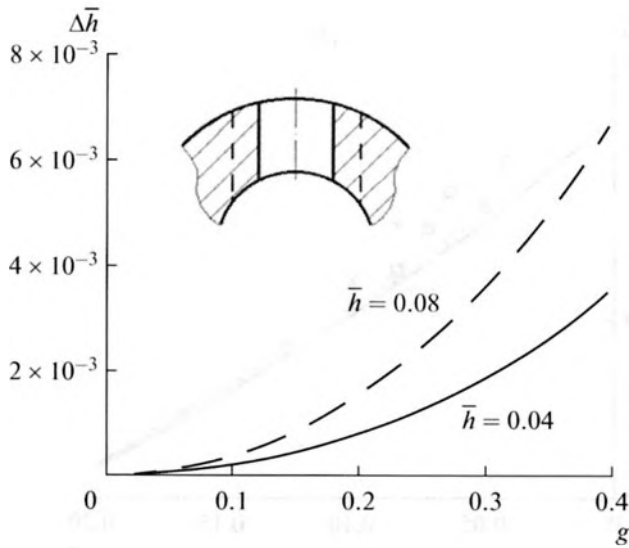


Рис. 8. Относительное увеличение длины отверстия в поперечном сечении круглого канала.

В данном случае, в отличие от случая резонатора на стенке прямоугольного канала, при изменении толщины стенки канала изменяются оба коэффициента линейной аппроксимации, что обусловлено, как отмечалось выше, кривизной поверхности круглого канала. С увеличением толщины стенки до 2 мм и далее коэффициент α достигает предельного значения 1.64 и перестает возрастать, так что в дальнейшем изменяется, уменьшаясь, только коэффициент β , т.е. меняется только наклон кривых. Заметим, что, как показано выше, для резонатора Гельмгольца на стенке квадратного канала предельное значение α достигается при существенно больших толщинах стенки канала, чем для случая трубчатого резонатора. Кроме того, полученное предельное значение α соответствует, как и следовало ожидать, теоретическому значению относительной присоединенной длины отверстия \bar{l}_a в неограниченной перегородке.

Наглядное представление о различии в характере изменения присоединенной длины горла резонатора, размещенного на плоской и цилиндрической поверхностях, можно получить из рассмотрения четвертьволнового резонатора на стенке квадратного и круглого каналов. Преимущество использования такого резонатора состоит в том, что здесь имеется только одна присоединенная длина, которая, как можно предположить, должна быть близка к значению внешней присоединенной резонатора Гельмгольца. Для этих двух случаев на рис. 10 сплошными линиями представлены зависимости присоединенной длины четвертьволновых резонаторов \bar{l}_a от параметра $g = d_0/d_3$, где $d_3 = d$ для круглого канала и $d_3 = b(2/\pi^{1/2})$. Введение d_3 обеспечивает сравнение присоединенной длины резонаторов при равной площади поперечных сечений круглого и квад-

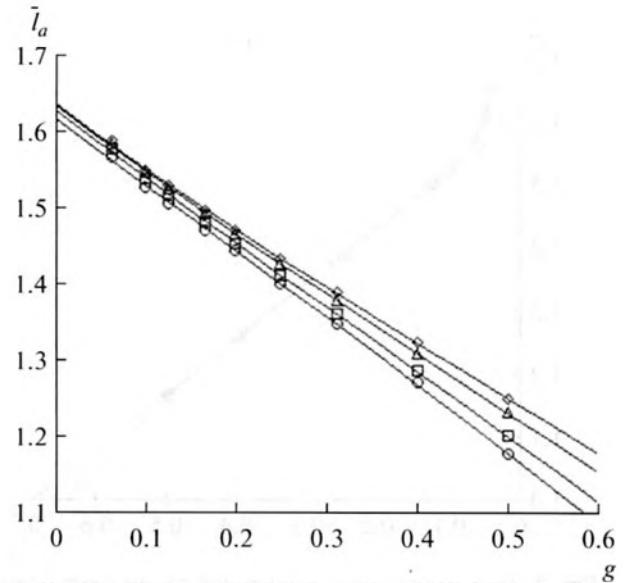


Рис. 9. Зависимости присоединенной длины горла трубчатого резонатора от отношения его диаметра к диаметру канала при длине горла 0.5 мм (○), 1 мм (□), 2 мм (△), 3 мм (◇).

ратного каналов. Заметим, что при моделировании четвертьволнового резонатора на стенке круглого канала его длина определялась как разность между расстоянием от задней стенки резонатора до центра канала и радиусом канала.

Как следует из рис. 10, присоединенные длины четвертьволновых резонаторов на стенках круглого и квадратного каналов равны только на границах интервала изменений параметра g , при $g = 0$ и $g = 1$. В самом интервале присоединенная длина резонатора в круглом канале заметно больше, чем в квадратном. Это является следствием того, что на этом интервале функция $\bar{l}_a(g)$ для круглого канала является выпуклой, а для квадратного канала — вогнутой.

На рис. 10 точечными линиями представлены также аналогичные зависимости для внешней присоединенной длины горла резонатора Гельмгольца. При этом внутренняя присоединенная длина резонатора вычислялась в соответствии с (4), а длина самого горла резонатора равнялась 2 мм (для резонатора на стенке круглого канала она определялась как разность между расстоянием от внутренней стенки горла резонатора до центра канала и радиусом канала). Полученные результаты показывают, что внешняя присоединенная длина резонатора Гельмгольца на стенке квадратного канала лишь незначительно меньше соответствующей величины для четвертьволнового резонатора, что обуславливается описанной выше зависимостью присоединенной длины от длины самого горла резонатора. В случае круглого канала разница во внешней присоединенной длине горла для резонатора Гельмгольца и четверть-

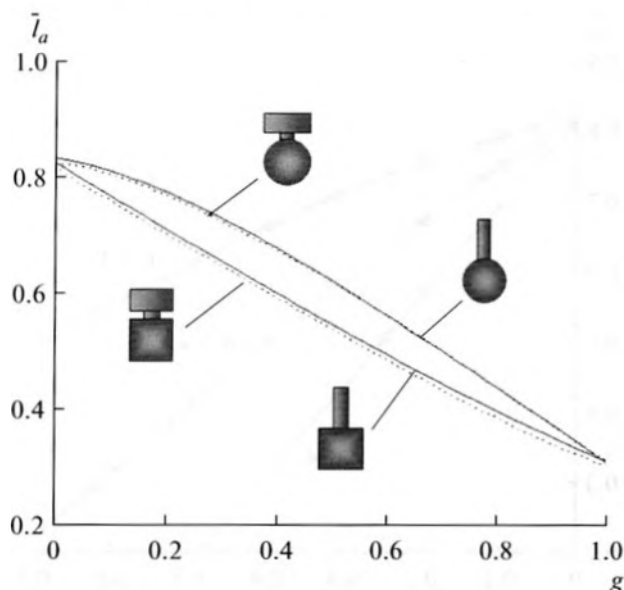


Рис. 10. Присоединенная длина четвертьволнового резонатора и резонатора Гельмгольца на стенке канала квадратного и круглого поперечных сечений.

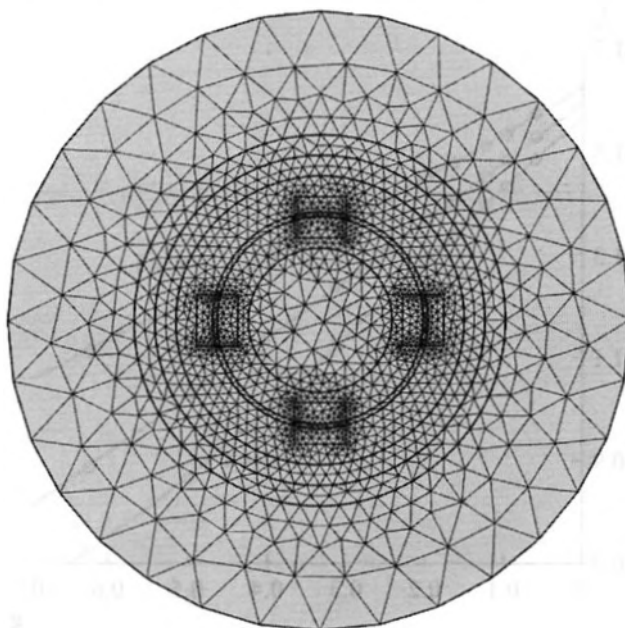


Рис. 11. Поперечное сечение конечно-элементной модели трубчатого резонатора Гельмгольца с четырьмя отверстиями.

волнового резонатора еще меньше и наблюдается только при малых g . Последнее объясняется увеличением действительной длины горла резонатора Гельмгольца с ростом g в круглом канале, а вследствие этого увеличением и внешней присоединенной длины горла резонатора Гельмгольца.

Был рассмотрен и более общий случай трубчатого резонатора, когда горло резонатора образовано не одним, а несколькими одинаковыми отверстиями в поперечном сечении канала (рис. 11). Расчеты проводились при толщине стенки канала $h = 2$ мм и диаметре отверстий $d_0 = 5$ мм. Зависимости общей присоединенной длины отверстия от параметра g для различного числа отверстий в трубчатом резонаторе ($n = 1, 2, 4$) представлены на рис. 12, из которого следует, что при $g < 0.5$ эти зависимости можно в первом приближении считать линейными. Характерной особенностью представленных кривых является то, что при $g \rightarrow 0$ они не стремятся, как ожидалось, в одну точку, и как это имело место для квадратного канала. Еще более сложный характер исследуемые кривые начинают принимать при дальнейшем увеличении числа отверстий в трубчатом резонаторе.

Для того чтобы понять причины этого явления, была построена конечно-элементная модель с несколькими резонаторами Гельмгольца в поперечном сечении круглого канала, как это было сделано выше для квадратного канала. Такими же, как для случая квадратного канала, оставались и геометрические размеры резонаторов Гельмгольца. По результатам численных расчетов находилась общая присоединенная длина горла резонатора в круглом канале, а затем по известной внутренней присоединенной длине резонатора определялась

и его внешняя присоединенная длина. Полученные при этом результаты для различного числа резонаторов Гельмгольца на стенке круглого канала представлены на рис. 13. Они показывают, что внешняя присоединенная длина горла резонаторов с уменьшением g увеличивается и при $g \rightarrow 0$, независимо от их числа на стенке канала, стремится к одному значению, близкому к 0.82. Отсюда следует, что отсутствие сходимости кривых на рис. 12 при $g \rightarrow 0$ к одному пределу обусловлено особенностями поведения внутренней присоединенной длины горла в трубчатом резонаторе.

Полученный результат дает возможность определить и внутреннюю присоединенную длину горла трубчатого резонатора, полагая, что при переходе от резонатора Гельмгольца на стенке круглого канала к трубчатому резонатору с таким же диаметром канала внешняя присоединенная длина горла остается неизменной. Это подтверждается данными, приведенными выше на рис. 10. Вместе с тем, следует отметить, что здесь использование резонаторов Гельмгольца имеет существенное ограничение, связанное со сложностью размещения большого числа таких резонаторов на стенке круглого канала, так как это приводит к вынужденному уменьшению поперечных размеров резонаторов. В связи с этим была рассмотрена модифицированная конечно-элементная модель трубчатого резонатора с несколькими отверстиями, в которой горло резонатора образовано только одним отверстием в канале, а объем резонатора

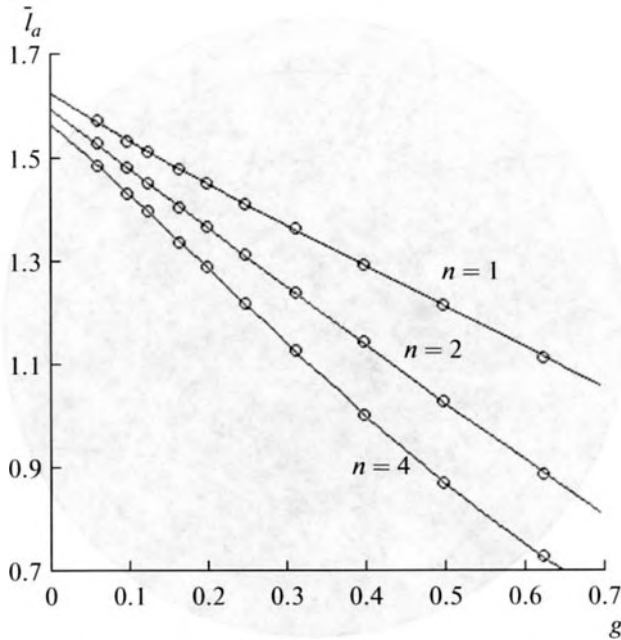


Рис. 12. Зависимость общей присоединенной длины горла от параметра g для различного числа отверстий n в трубчатом резонаторе.

соответствовал объему, приходящемуся на одно отверстие в соответствующем трубчатом резонаторе (рис. 14). В такой модели внешняя присоединенная длина отверстия оставалась всегда постоянной, а внутренняя равнялась внутренней присоединенной длине отверстия в трубчатом резонаторе с определенным числом отверстий. Такая модель оказывается проще общей модели трубчатого резонатора и упрощает исследование особенностей поведения внутренней присоединенной длины отверстия для трубчатых резонаторов с различным числом отверстий.

Результаты расчетов внутренней присоединенной длины отверстий \bar{l}_i для такого типа трубчатых резонаторов представлены на рис. 15. Они показывают, что зависимость \bar{l}_i от параметра g в значительной степени определяется количеством отверстий n в трубчатом резонаторе. При $n \leq 4$ функция $\bar{l}_i(g)$ является убывающей, причем с увеличением n она становится все более пологой. Дальнейшее увеличение n приводит к тому, что функция $\bar{l}_i(g)$ меняет свой характер, и при $n > 6$ она становится практически линейно возрастающей. Еще одной особенностью поведения функции $\bar{l}_i(g)$ является то, что ее предельное значение при $g \rightarrow 0$ зависит от количества отверстий n в трубчатом резонаторе и, по-видимому, уменьшается с ростом n , все более отличаясь от классического предела 0.822, характерного для отверстия в неограниченном экране. Вследствие этого такая же особенность характерна и для общей присоединенной длины отверстий в трубчатом резонаторе.

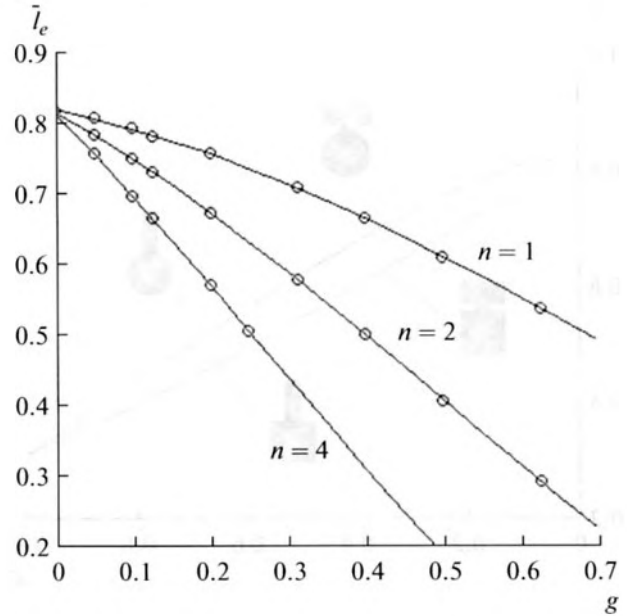


Рис. 13. Зависимость внешней присоединенной длины горла от параметра g для различного числа n резонаторов Гельмгольца в круглом канале.

Заметим, что такое поведение функции $\bar{l}_i(g)$ отчасти напоминает зависимость присоединенной длины отверстия перегородки в прямоугольном канале от соотношения его сторон [2]. Но, безусловно, этот вопрос заслуживает отдельного теоретического рассмотрения.

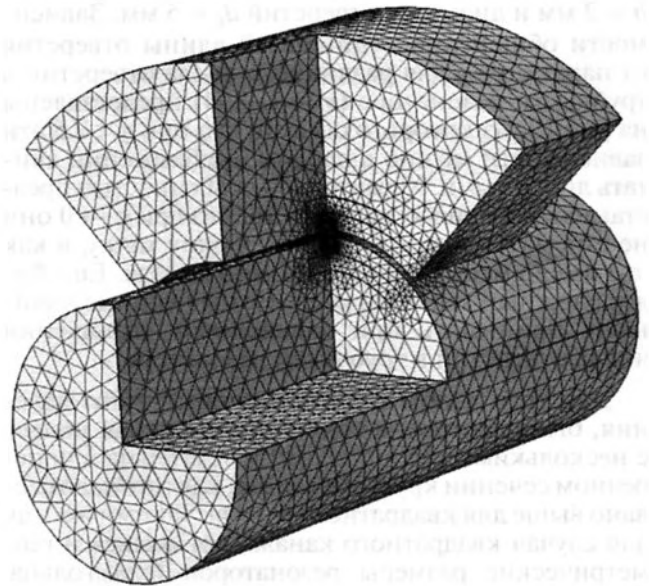


Рис. 14. Конечно-элементная модель в разрезе для определения внутренней присоединенной длины отверстия в трубчатом резонаторе.

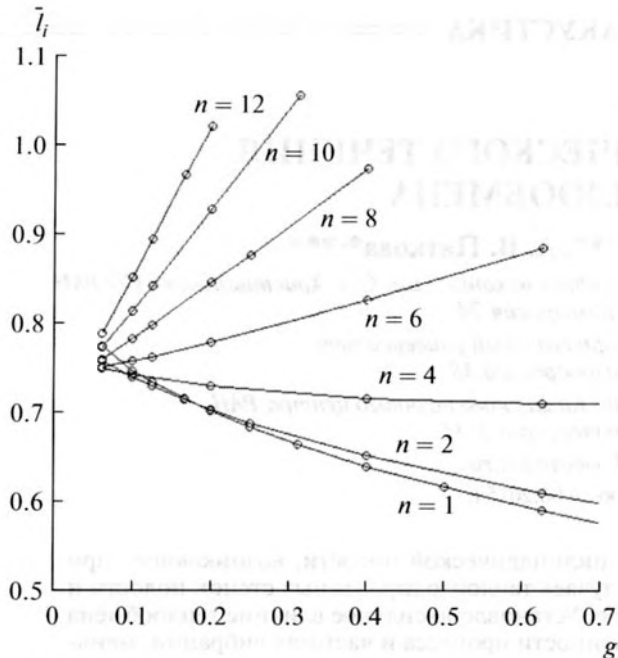


Рис. 15. Зависимость внутренней присоединенной длины горла от параметра g для различного числа отверстий n в трубчатом резонаторе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методом конечно-элементного моделирования показано, что присоединенную длину отверстия перегородки в круглом канале следует определять, используя полиномиальную аппроксимацию (3) функции Карала, по формуле (4), в которой значение постоянного множителя зависит от толщины перегородки.

Установлено, что зависимость внешней присоединенной длины горла резонаторов Гельмгольца, размещенных на стенках квадратного канала в его поперечном сечении, от отношения диаметра горла резонатора к поперечному размеру канала аппроксимируется линейной функцией (5). При этом коэффициенты аппроксимации для различного числа резонаторов n определяют семейство прямых линий, выходящих из одной точки, наклон которых увеличивается с ростом числа резонаторов.

В трубчатом резонаторе с диаметром канала d , в котором имеется только одно отверстие диаметром d_0 , зависимость общей присоединенной длины горла от параметра $g = d_0/d$ при $g < 0.5$ также аппроксимируется линейной функцией (5), причем с увеличением толщины стенки меняются оба коэффициента линейной аппроксимации. Такая линейная зависимость справедлива, пока на присоединенную длину горла не начинает влиять стенка камеры трубчатого резонатора, что имеет место, когда диаметры канала d и камеры D удовлетворяют соотношению $D/d < 2.5$.

Для трубчатого резонатора с несколькими отверстиями в поперечном сечении канала предложен способ выделения внутренней и внешней

присоединенных длин отверстий, образующих горло резонатора. Установлено, что зависимость общей присоединенной длины отверстия от параметра g существенным образом зависит от количества отверстий n в резонаторе, так что при $n > 4$ эта зависимость начинает существенно отличаться от линейной.

Представляется целесообразным проведение дополнительного теоретического исследования особенностей формирования присоединенной длины горла в трубчатых резонаторах Гельмгольца.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 14-08-00703).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Комкин А.И., Миронов М.А., Юдин С.И. О присоединенной длине отверстий // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 6. С. 677–682.
2. Комкин А.И., Миронов М.А. Импеданс излучения поршня на стенке прямоугольного канала // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 3. С. 257–260.
3. Комкин А.И., Миронов М.А., Юдин С.И. Собственная частота резонатора Гельмгольца на стенке прямоугольного канала // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 2. С. 145–151.
4. Panton R.L., Miller J.M. Resonant frequencies of cylindrical Helmholtz resonators // J. Acoust. Soc. Am. 1975. V. 57. № 6. Pt. 2. P. 1533–1535.
5. Selamet A., Ji Z.L. Circular asymmetric Helmholtz resonators // J. Acoust. Soc. Am. 2000. V. 107. № 5. P. 2360–2369.
6. Seo S.-H., Kim Y.-H. Silencer design by using array resonators for low-frequency band noise reduction // J. Acoust. Soc. Am. 2005. V. 118. № 4. P. 2332–2338.
7. Selamet A., Radovich P.M., Dickey N.S., Novak J.M. Circular concentric Helmholtz resonator // J. Acoust. Soc. Am. 1997. V. 101. № 1. P. 41–51.
8. Федотов Е.С., Пальчиковский В.В. Исследование работы резонатора Гельмгольца в волноводе прямоугольного сечения // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. 2014. № 38. С. 107–126.
9. Фок В.А. Теоретическое исследование проводимости круглого отверстия в перегородке, поставленной поперек трубы // Докл. АН СССР. 1941. Т. 31. № 9. С. 875–878.
10. Karal F.C. The analogous acoustical impedance for discontinuities and constrictions of circular cross section // J. Acoust. Soc. Am. 1953. V. 25. № 2. P. 327–334.
11. Ingard U. On the theory and design of acoustic resonators // J. Acoust. Soc. Am. 1953. V. 25. № 6. P. 1037–1061.
12. Комкин А.И., Юдин С.И. Акустический импеданс перфорированной перегородки в канале // Сб. трудов XX сессии РАО. Т.1. М.: ГЕОС, 2008. С. 246–250.
13. Ji Z.L. Acoustic length correction of closed cylindrical side-branched tube // J. Sound Vib. 2005. V. 283. № 3. P. 1180–1186.
14. Kang Z.X., Ji Z.L. Acoustic length correction of duct extension into a cylindrical chamber // J. Sound Vib. 2008. V. 310. № 4–5. P. 782–791.
15. Chaitanya P., Munjal M.L. Effect of wall thickness on the end correction of the extended inlet and outlet of a double-tuned expansion chamber // Appl. Acoust. 2011. V. 72. № 1. P. 41–51.