

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ
АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.23:537.874.6

РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ
НА ПЛОСКОЙ ДВУПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ

© 2016 г. С. А. Маненков

Московский технический университет связи и информатики

111024 Москва, Авиамоторная ул. 8а

E-mail: mail44471@mail.ru

Поступила в редакцию 16.02.2015 г.

На основе метода дискретных источников разработан алгоритм решения трехмерной задачи рассеяния на плоской решетке, состоящей из акустически мягких или акустически жестких тел. Предложен эффективный алгоритм нахождения периодической функции Грина решетки. Получены численные результаты для различных геометрий элементов решетки. Проведена проверка выполнения закона сохранения энергии и проверка выполнения граничного условия на поверхности центрального элемента решетки.

Ключевые слова: дифракция волн на решетках, метод дискретных источников, аналитическое продолжение волновых полей.

DOI: 10.7868/S0320791916020118

ВВЕДЕНИЕ

В литературе имеется большое число работ, посвященных дифракции и излучению акустических и электромагнитных волн периодическими бесконечными решетками. В частности, в работе [1] рассмотрена двумерная задача об излучении звука элементами периодической решетки, которые разделены зазорами с жесткими стенками. В работе [2] рассмотрена двумерная задача излучения решетки, составленной из стержневых преобразователей. Задача решалась при помощи метода частичных областей. В работе [3] исследована дифракция поля нити тока на бесконечной гребенчатой структуре, с канавками прямоугольной формы, заполненными диэлектриком. Задача решалась при помощи разложения поля в интеграл Фурье с последующим применением метода частичных областей. В работах [4–6] рассмотрены задачи дифракции на решетках, составленных из тонких экранов. В частности, в [4] исследована акустическая задача дифракции на решетке из лент с условиями импедансного типа. При решении этой задачи также использовался метод частичных областей. В работах [5] и [6] при помощи метода задачи Римана–Гильберта рассмотрена дифракция плоской волны на решетках, составленных из экранов различной формы. В работе [7] исследована двумерная задача дифракции плоской волны на многорядной решетке, состоящей из бесконечных круговых цилиндров. Задача решалась с использованием матрицы рассеяния одного ряда решетки. В [8] рассмотрена задача дифракции поля точечного источника и плоской волны на много-

рядной решетке, состоящей из бесконечных цилиндров произвольного сечения. Для решения задачи использовался модифицированный метод нулевого поля. В работах [9–12] рассмотрены задачи рассеяния на плоских решетках различного вида. В [9] исследована задача дифракции плоской волны на решетке, состоящей из бесконечно малых резонаторов, закрепленных на абсолютно жесткой стенке, а в работе [10] рассмотрено рассеяние плоской волны на плоской решетке, состоящей из малых резонаторов Гельмгольца, колеблющихся на упругих стерженьках. В [11] рассмотрена задача дифракции плоской волны на бесконечной регулярной сетке, в узлах которой находятся сферические частицы с монополярным типом колебаний. В работе [12] решалась более общая задача дифракции на многорядной решетке, составленной из нескольких рядов указанных выше регулярных сеток. Заметим, что в последних четырех работах размер элементов решетки был много меньше длины волны. В работе [13] исследована задача дифракции плоской электромагнитной волны на плоской бесконечной решетке, в узлах которой расположены импедансные тела вращения произвольного поперечного сечения. Для решения задачи использовался модифицированный метод дискретных источников (ММДИ) [14–16].

Настоящая работа является продолжением работы [13] применительно к акустической постановке задачи. В работе рассмотрена дифракция плоской волны на плоской решетке, состоящей из одинаковых эквидистантно расположенных

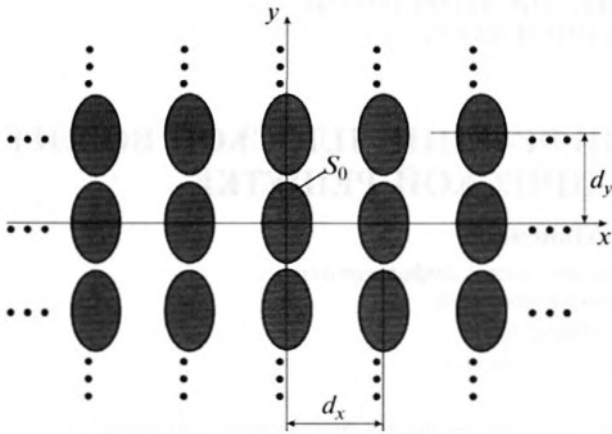


Рис. 1. Геометрия задачи.

тел (не обязательно тел вращения). Предполагается, что “центры” тел располагаются в одной плоскости так, что решетка имеет два периода. Для решения задачи использовался метод дискретных источников (МДИ), причем в случае, когда элементы решетки представляли собой тела вращения, использовался ММДИ.

Существенным отличием данной работы от [13] является метод алгебраизации задачи. В работе [13] для перехода к алгебраической системе использовался метод, учитывающий симметрию вращения элементов решетки. По существу, применялся комбинированный метод, т.е. использовался метод Галеркина и метод коллокации. В рассматриваемом случае проще применять метод коллокации непосредственно к поверхностному интегральному уравнению, к которому сводится исходная задача дифракции. При этом, во-первых, возможно распространение метода на произвольные тела (не тела вращения); во-вторых, в рамках такого метода не требуется находить коэффициенты Фурье для функции Грина (ФГ) решетки.

Еще одно отличие данной работы от работы [13] заключается в способе вычисления ФГ решетки. В работе [13] ряд ФГ решетки разбивался на два слагаемых. Первое слагаемое представляло собой ФГ свободного пространства. Второе слагаемое (т.е. ряд) находилось при помощи преобразования исходного ряда к ряду по сферическим гармоникам. В рамках метода, предложенного в настоящей работе, несколько первых членов ряда ФГ суммировали непосредственно, а остаток ряда определяли при помощи преобразования его к ряду по сферическим гармоникам. При таком подходе повышается скорость сходимости ряда по сферическим гармоникам. Отметим, что предлагаемый алгоритм нахождения ФГ является обобщением метода, предложенного в [17, 18].

Как известно [19], ряд ФГ решетки сходится чрезвычайно медленно при условии, что точка на-

блюдения и точка источника близки друг к другу. С использованием формулы суммирования Пуассона ряд ФГ преобразуется в ряд по гармоникам Флоке. Однако при указанном выше условии [19] сходимость этого ряда не лучше, чем у исходного. Предлагаемый алгоритм нахождения ФГ решетки обладает двумя преимуществами. Во-первых, ряд по сферическим гармоникам сходится достаточно быстро при правильном выборе соответствующего параметра, определяющего число членов ряда ФГ, которые суммируются непосредственно (см. ниже). Во-вторых, коэффициенты этого ряда представляют собой величины, зависящие только от параметров решетки, но не от геометрии ее элементов. Указанные коэффициенты могут быть вычислены заранее, т.е. до вычисления элементов матрицы соответствующей алгебраической системы, что существенно сокращает время счета на ЭВМ.

С целью уменьшения размера соответствующей алгебраической системы, т.е. для ускорения сходимости метода, в данной работе, как и в работах [15, 16] использованы различные системы координат для построения носителя дискретных источников, в частности, применяли сферические, сфероидальные и тороидальные координаты.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим плоскую решетку, составленную из одинаковых тел, имеющую два периода d_x и d_y (см. рис. 1). Введем декартову систему координат, причем ось z направим перпендикулярно плоскости решетки. Начало координат выберем внутри центрального элемента решетки. Обозначим через S_0 поверхность центрального элемента решетки. Считаем, что структура облучается плоской волной вида

$$U^0 = \exp(-ikr(\sin \theta_0 \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_0) + \cos \theta_0 \cos \theta)), \quad (1)$$

где k – волновое число, (r, θ, φ) – сферические координаты, θ_0, φ_0 – углы падения. Предполагаем, что окружающее решетку пространство полностью однородной средой так, что рассеянное поле U^1 вне решетки удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta U^1 + k^2 U^1 = 0. \quad (2)$$

На поверхности каждого элемента решетки выполнено условие Дирихле

$$U = 0, \quad (3)$$

либо Неймана

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0, \quad (4)$$

где $\partial/\partial n$ – производная по нормали, внешней к поверхности тела, $U = U^0 + U^1$ – полное поле вне области, занимаемой решеткой.

Вторичное поле в области вне решетки удовлетворяет условиям периодичности Флоке:

$$U^1(x + d_x, y, z) = U^1(x, y, z) \exp(-ih_x), \quad (5)$$

$$U^1(x, y + d_y, z) = U^1(x, y, z) \exp(-ih_y), \quad (6)$$

где $h_x = kd_x \sin \theta_0 \cos \varphi_0$, $h_y = kd_y \sin \theta_0 \sin \varphi_0$ – параметры Флоке. На бесконечности полное поле удовлетворяет условиям излучения:

$$U(x, y, z) = U^0(x, y, z) + \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_{pq}^- \exp(-i\mathbf{\kappa}_{pq}^- \mathbf{r}), \quad z < z_{\min}, \quad (7)$$

$$U(x, y, z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_{pq}^+ \exp(-i\mathbf{\kappa}_{pq}^+ \mathbf{r}), \quad z > z_{\max}. \quad (8)$$

Здесь $\mathbf{\kappa}_{pq}^{\pm} = u_p \mathbf{i}_x + v_q \mathbf{i}_y \pm \Gamma_{pq} \mathbf{i}_z$, $u_p = \frac{h_x + 2\pi p}{d_x}$, $v_q = \frac{h_y + 2\pi q}{d_y}$, $\Gamma_{pq} = \sqrt{k^2 - u_p^2 - v_q^2}$, знак квадратного корня выбирается из условия неположительности его мнимой части. В формулах (7) и (8) z_{\min} и z_{\max} – минимальное и максимальное значение координаты z поверхности элемента решетки, A_{pq}^+ и A_{pq}^- – неизвестные коэффициенты. Заметим, что величины $|R_0| = |A_{00}^-|$ и $|T_0| = |A_{00}^+|$ представляют собой модули коэффициентов отражения и прохождения плоской волны (1).

ВЫВОД ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ И СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Будем решать поставленную задачу с помощью метода вспомогательных токов, который в дальнейшем сводится к МДИ либо ММДИ [13–16]. Для этого представим волновое поле вне области, занимаемой решеткой, в виде

$$U(\mathbf{r}) = U^0(\mathbf{r}) + \int_{\Sigma} J(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds'. \quad (9)$$

Здесь Σ – вспомогательная поверхность, расположенная внутри исходной поверхности центрального элемента решетки S_0 , а J – неизвестная функция, заданная на поверхности Σ . Функция G представляет собой периодическую ФГ решетки, которая имеет вид [19]

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_0(R_{pq}) \exp(-iph_x - iqh_y), \quad (10)$$

где

$$G_0(R_{pq}) = \frac{\exp(-ikR_{pq})}{4R_{pq}}, \quad (11)$$

$$R_{pq} = \sqrt{(x - x' - pd_x)^2 + (y - y' - qd_y)^2 + (z - z')^2}.$$

Таким образом, рассеянное поле, записанное в виде (9), удовлетворяет условиям периодичности Флоке.

Рассмотрим вопрос о построении носителя для неизвестной функции J . В случае, если поверхность центрального элемента решетки является поверхностью вращения, то для построения вспомогательной поверхности необходимо задать поверхность S_0 в подходящей ортогональной системе координат вращения:

$$x = \rho(\alpha, \beta) \cos \varphi, \quad y = \rho(\alpha, \beta) \sin \varphi, \quad z = z(\alpha, \beta), \quad (12)$$

где (ρ, φ, z) – цилиндрические координаты. Пусть $\alpha = \alpha(\beta)$ – уравнение поверхности S_0 в данной системе координат. Тогда для вспомогательной поверхности Σ справедливы следующие уравнения [15, 16]:

$$x_{\Sigma} = \text{Im } \xi \cos \varphi, \quad y_{\Sigma} = \text{Im } \xi \sin \varphi, \quad z_{\Sigma} = \text{Re } \xi, \quad (13)$$

где ξ является некоторой функцией переменной $\eta(\beta) = \alpha(\beta + i\delta) + i(\beta + i\delta)$ (см. ниже). Координаты α_{Σ} и β_{Σ} “образа” точки (α, β, φ) на исходной поверхности центрального элемента решетки находятся из соотношений

$$\alpha_{\Sigma} = \text{Re } \eta, \quad \beta_{\Sigma} = \text{Im } \eta. \quad (14)$$

В формуле для функции $\eta(\beta)$ положительный параметр δ отвечает за степень деформации поверхности центрального элемента решетки. Выбор параметра δ подробно описан в работах [15, 16]. Отметим, что при увеличении величины δ точки вспомогательной поверхности удаляются внутрь элемента решетки, двигаясь по ортогональным траекториям.

В настоящей работе используются сферические, сфероидальные (вытянутые и сплюснутые) и тороидальные координаты. В этих координатах справедливы следующие формулы, связывающие комплексные переменные ξ и η [15]:

$$\xi(\beta) = \exp(\eta(\beta)), \quad \beta \in [0, \pi] \quad (15)$$

в сферических координатах;

$$\xi(\beta) = f \text{ch}(\eta(\beta)), \quad (16)$$

$$(\xi(\beta) = f \text{sh}(\eta(\beta))), \quad \beta \in [0, \pi]$$

в вытянутых (сплюснутых) сфероидальных координатах;

$$\xi(\beta) = if \text{cth}\left(\frac{\eta(\beta)}{2}\right), \quad \beta \in [0, 2\pi] \quad (17)$$

в тороидальных координатах. Заметим, что в случае сферических координат мы обозначили $\alpha = \ln r$, $\beta = \theta$.

В случае произвольного элемента решетки, т.е. не тела вращения, вспомогательную поверхность удобно строить исходя из параметрических уравнений поверхности S_0 . Пусть уравнения поверхности S_0 имеют вид

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v). \quad (18)$$

Тогда уравнения вспомогательной поверхности можно определить так, чтобы эта поверхность проходила эквидистантно от поверхности S_0 :

$$x_\Sigma = x - \delta n_x, \quad y_\Sigma = y - \delta n_y, \quad z_\Sigma = z - \delta n_z, \quad (19)$$

где $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z) = \frac{\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v}{|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|}$ — единичная нормаль к поверхности S_0 . Здесь $\dot{\mathbf{r}}_u$ и $\dot{\mathbf{r}}_v$ — производные радиус-вектора по координатам u и v , δ — как и выше, положительный параметр.

В силу периодичности рассматриваемой структуры и падающего поля задача сводится к определению функции J только на поверхности Σ центрального элемента решетки. Для нахождения этой функции подставим выражение для волнового поля в виде (9) в граничные условия (3) или (4) на поверхности центрального элемента решетки. В результате получим следующее интегральное уравнение:

$$\int_{\Sigma} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J(\mathbf{r}') ds' = -U^0(\mathbf{r}), \quad (20)$$

либо

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} J(\mathbf{r}') ds' = -\frac{\partial U^0(\mathbf{r})}{\partial n}, \quad \mathbf{r} \in S_0 \quad (21)$$

соответственно в случае условия Дирихле или Неймана. Сделаем замену неизвестной функций J по формуле [15, 16]:

$$I = J h_\phi h_\Sigma \sqrt{1 + (\dot{\alpha}_\Sigma)^2} \quad (22)$$

в случае, когда решетка состоит из тел вращения, и

$$I = J |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| \quad (23)$$

в общем случае. В формуле (22) h_ϕ и $h_\Sigma = h_\alpha = h_\beta$ — коэффициенты Ламе соответствующей системы координат в точке с координатами $(\alpha_\Sigma, \beta_\Sigma, \phi)$ на вспомогательной поверхности Σ . Точка в формуле (22) означает дифференцирование по β_Σ .

АЛГЕБРАИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ФГ РЕШЕТКИ

В отличие от работы [13] будем решать интегральное уравнение (20) или (21) непосредственно, не разлагая неизвестные токи в ряд Фурье. Применим метод коллокации. Очевидно, что поверхностные интегралы в (20) и (21) могут быть заменены на двойные интегралы по прямоугольнику $[0, \beta_{\max}] \times [0, 2\pi]$ в случае, когда элемент решетки — тело вращения, либо $[0, u_{\max}] \times [0, v_{\max}]$ в общем случае. Выберем в области интегрирования прямоугольную сетку:

$$\beta_n = \frac{\beta_{\max}}{N} \left(n - \frac{1}{2} \right), \quad n = \overline{1, N}, \quad (24)$$

$$\varphi_m = \frac{2\pi}{M} \left(m - \frac{1}{2} \right), \quad m = \overline{1, M},$$

либо

$$u_n = \frac{u_{\max}}{N} \left(n - \frac{1}{2} \right), \quad n = \overline{1, N}, \quad (25)$$

$$v_m = \frac{v_{\max}}{M} \left(m - \frac{1}{2} \right), \quad m = \overline{1, M}.$$

Далее заменим двойные интегралы в формуле (20) или (21) суммами Римана. Приравняем полученные равенства в точках коллокации, которые выберем следующим образом:

$$x_{v\mu}^* = \rho(\alpha(\beta_v), \beta_v) \cos \varphi_\mu, \quad (26)$$

$$y_{v\mu}^* = \rho(\alpha(\beta_v), \beta_v) \sin \varphi_\mu, \quad z_{v\mu}^* = z(\alpha(\beta_v), \beta_v)$$

в случае тела вращения и

$$x_{v\mu}^* = x(u_v, v_\mu), \quad y_{v\mu}^* = y(u_v, v_\mu), \quad z_{v\mu}^* = z(u_v, v_\mu) \quad (27)$$

в общем случае произвольного элемента решетки.

Здесь $v = \overline{1, N}$ и $\mu = \overline{1, M}$. В результате перейдем от интегрального уравнения к следующей алгебраической системе относительно неизвестных значений функции I в точках \mathbf{r}_{nm} на вспомогательной поверхности центрального элемента решетки:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M A_{nm}^{v\mu} c_{nm} = b^{v\mu}. \quad (28)$$

Здесь

$$A_{nm}^{v\mu} = G(\mathbf{r}_{v\mu}^*, \mathbf{r}_{nm}), \quad b^{v\mu} = -U^0(\mathbf{r}_{v\mu}^*) \quad (29)$$

в случае граничного условия (3) и

$$A_{nm}^{v\mu} = \frac{\partial G(\mathbf{r}_{v\mu}^*, \mathbf{r}_{nm})}{\partial n}, \quad b^{v\mu} = -\frac{\partial U^0(\mathbf{r}_{v\mu}^*)}{\partial n} \quad (30)$$

в случае условия (4). В формуле (28) $c_{nm} = I(\mathbf{r}_{nm})\sigma$, где σ — площадь элементарных ячеек, на которые разбивается область интегрирования в уравнении (20) или (21). Точки \mathbf{r}_{nm} в (29) и (30) выбираются с использованием формул (12)–(19). Отметим, что переход от интегрального уравнения к алгебраической системе означает переход к дискретным источникам вторичного поля, т.е. переход к МДИ.

Рассмотрим вопрос о вычислении ФГ решетки. Как было указано выше, функция $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ представляется двойным рядом (10). Разобьем этот ряд на две суммы:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{|p| \leq Q} \sum_{|q| \leq Q} G_0(R_{pq}) \exp(-iph_x - iqh_y) + \sum_{|p| > Q \vee |q| > Q} G_0(R_{pq}) \exp(-iph_x - iqh_y). \quad (31)$$

Пояснение относительно выбора параметра Q приведено ниже. Далее используем теорему сложения для функции $G_0(R_{pq})$ [20]:

$$G_0(R_{pq}) = \frac{k}{4\pi i} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=-s}^s (2s+1) \frac{(s-l)!}{(s+l)!} \Psi_{sl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \tilde{\Psi}_{sl}(\mathbf{r}_{pq}), \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_{sl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= j_s(kR)P_s^l(\cos \Theta) \exp(il\Phi), \\ \tilde{\Psi}_{sl}(\mathbf{r}_{pq}) &= h_s^{(2)}(k\rho_{pq})P_s^l(0) \exp(-il\varphi_{pq}), \end{aligned} \quad (33)$$

причем $\rho_{pq} \cos \varphi_{pq} = pd_x$, $\rho_{pq} \sin \varphi_{pq} = qd_y$, а R , Θ , Φ — сферические координаты вектора $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $P_s^l(x)$ — присоединенные функции Лежандра, $j_s(x)$, $h_s^{(2)}(x)$ — сферические функции Бесселя и Ханкеля. Данное разложение справедливо при условии, что $\rho_{pq} > R$. Учитывая, что аргумент присоединенной функции Лежандра у величины $\tilde{\Psi}_{sl}(\mathbf{r}_{pq})$ равен нулю, замечаем, что в формуле (32) индексы s и l одинаковой четности [20]. Подставим далее разложение (32) в ряд в формуле (31). В результате получим

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \sum_{|p| \leq Q} \sum_{|q| \leq Q} G_0(R_{pq}) \exp(-iph_x - iqh_y) + \\ &+ \frac{k}{4\pi i} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=-s}^s (2s+1) \frac{(s-l)!}{(s+l)!} W_{sl} \Psi_{sl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} W_{sl} &= \sum_{|p| \leq Q} \sum_{|q| > Q} \tilde{\Psi}_{sl}(\mathbf{r}_{pq}) \exp(-iph_x - iqh_y) + \\ &+ \sum_{|p| > Q} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_{sl}(\mathbf{r}_{pq}) \exp(-iph_x - iqh_y). \end{aligned} \quad (35)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению сумм (35). Отметим, что, в отличие от работы [13], в рассматриваемом подходе мы выделили в (31) сразу несколько первых членов ряда (10), а не только ФГ элемента в отсутствие решетки. При таком способе нахождения суммы ряда (34) удается обойтись суммированием достаточно малого числа членов этого ряда для достижения приемлемой точности вычислений.

С использованием техники, описанной в [13], можно получить следующее разложение сферической гармоники:

$$\begin{aligned} h_s^{(2)}(kr)P_s^l(0) \exp(-il\varphi) &= \frac{i^{s-l}}{\pi k^{|l|+1}} \times \\ &\times \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{P}_s^l(w/k) (i \operatorname{sign}(l) \kappa \pm \chi)^{|l|} \times \\ &\times \exp(-ikx - i\chi|y|) \frac{d\kappa}{\chi} = \frac{i^{s-l}}{\pi k^{|l|+1}} \times \\ &\times \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{P}_s^l(w/k) (\kappa \pm i \operatorname{sign}(l) \chi)^{|l|} \exp(-iky - i\chi|x|) \frac{d\kappa}{\chi}, \end{aligned} \quad (36)$$

где $\chi = \sqrt{k^2 - \kappa^2 - w^2}$, а

$$\tilde{P}_s^l(x) = \frac{d^l P_s(x)}{dx^l}, \quad (37)$$

$$\tilde{P}_s^{-l}(x) = (-1)^l \frac{(s-l)!}{(s+l)!} \tilde{P}_s^l(x), \quad l \geq 0.$$

Верхние знаки в (36) относятся к случаям, когда $y > 0$ и $x > 0$ соответственно.

Используем полученные разложения для суммирования рядов в (35). Представим величины W_{sl} в виде

$$\begin{aligned} W_{sl} &= \sum_{|p| \leq Q} \sum_{q=Q+1}^{\infty} \tilde{\Psi}_{sl}(\mathbf{r}_{pq}) \exp(-iph_x - iqh_y) + \\ &+ \sum_{|p| \leq Q} \sum_{q=-\infty}^{-Q-1} \tilde{\Psi}_{sl}(\mathbf{r}_{pq}) \exp(-iph_x - iqh_y) + \\ &+ \sum_{p=Q+1}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_{sl}(\mathbf{r}_{pq}) \exp(-iph_x - iqh_y) + \\ &+ \sum_{p=-\infty}^{-Q-1} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_{sl}(\mathbf{r}_{pq}) \exp(-iph_x - iqh_y) \equiv \\ &\equiv W_{sl}^I + W_{sl}^{II} + W_{sl}^{III} + W_{sl}^{IV}. \end{aligned} \quad (38)$$

Положим $r = \rho_{pq}$, $\varphi = \varphi_{pq}$ в формулах (36) и подставим первые интегралы в этих формулах в первые два ряда (38), а вторые — в третий и четвертый. Меняя местами суммирование и интегрирование, можно показать, что первые две суммы в (38) преобразуются в интегралы:

$$\begin{aligned} W_{sl}^{I,II} &= \frac{i^{s-l}}{\pi k^{|l|+1}} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{P}_s^l(w/k) (i \operatorname{sign}(l) \kappa \pm \chi)^{|l|} \times \\ &\times \frac{1 - g^{2Q+1} \exp(-iQ_1(d_y \chi \pm h_y))}{g^Q (1-g) (1 - \exp(-i(d_x \chi \pm h_x)))} \frac{d\kappa}{\chi}, \end{aligned} \quad (39)$$

где верхний и нижний знаки относятся к W_{sl}^I и W_{sl}^{II} соответственно. В формуле (39) обозначено $Q_1 = Q + 1$ и $g = \exp(i(h_x - wd_x))$. Третью и четвертую суммы в (38) преобразуем, используя формулу суммирования Пуассона по индексу q . В результате получим

$$\begin{aligned} W_{sl}^{III,IV} &= \frac{2i^{s-l}}{k^{|l|+1} d_y} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \tilde{P}_s^l(w/k) (-v_q \pm i \operatorname{sign}(l) \chi_q)^{|l|} \times \\ &\times \frac{\exp(-iQ_1(d_x \chi_q \pm h_x))}{1 - \exp(-i(d_x \chi_q \pm h_x))} \frac{dw}{\chi_q}, \end{aligned} \quad (40)$$

где $\chi_q = \sqrt{k^2 - v_q^2 - w^2}$, а знаки “+” и “-” относятся к W_{sl}^{III} и W_{sl}^{IV} соответственно. Таким образом, величины W_{sl} представляют собой сумму двойных интегралов (39) и рядов (40). Исследуя асимптотики членов рядов (40), можно показать, что они

Таблица 1. Сравнение значений ФГ решетки, полученных двумя методами

	$\theta_0 = 0$	$N_{1,2}$	$\theta_0 = 85^\circ$	$N_{1,2}$
$\gamma = 0.01$	$18.06092407 - i0.268910574$	903452	$17.11820347 - i2.689488794$	907116
	$18.06092412 - i0.268910554$	242	$17.11820353 - i2.689488774$	331
$\gamma = 0.05$	$5.076064862 - i0.258705164$	43030	$4.182555647 - i1.557155450$	43842
	$5.076064871 - i0.258705144$	265	$4.182555651 - i1.557155421$	374
$\gamma = 0.1$	$3.319285638 - i0.22766101$	11608	$2.434339849 - i1.373365097$	12030
	$3.319285646 - i0.22766099$	265	$2.434339852 - i1.373365077$	397
$\gamma = 0.5$	$1.520281977 + i0.249972020$	546	$0.662631631 - i0.707491635$	642
	$1.520281985 + i0.249972041$	265	$0.662631633 - i0.707491614$	421

быстро убывают с ростом номера q , что подтверждается численными экспериментами. Заметим, что способ вычисления величин $W_{sl}^I, W_{sl}^{II}, W_{sl}^{III}$ и W_{sl}^{IV} полностью аналогичен методу, который подробно рассмотрен в [13] и здесь не приводится. Как видно из формул (39) и (40), величины W_{sl} зависят только от периодов решетки и параметров Флоке, т.е. не зависят от координат.

Сделаем замечание относительно выбора параметра Q . Следуя работе [18], в которой приведен алгоритм нахождения периодической ФГ для двумерной задачи дифракции на периодически неровной поверхности, величину Q следует выбирать из условия $L/(Qd) < 0.5$, где L – диаметр элемента решетки, а $d = \min(d_x, d_y)$. Более точный выбор параметра Q осуществляется при помощи численных экспериментов (см. ниже). При этом в качестве критерия выбора может служить, например, проверка точности выполнения закона сохранения энергии.

В качестве выходных характеристик задачи рассмотрим амплитуды пространственных гармоник, обусловленных дифракцией на решетке. Для нахождения этих величин преобразуем ФГ решетки при помощи формулы Пуассона [19]:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{i}{2d_x d_y} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \exp(-iu_p(x-x') - i v_q(y-y') - i\Gamma_{pq}|z-z'|) / \Gamma_{pq}. \quad (41)$$

Далее подставим формулу (41) в соотношение (9). В результате получим представление волнового поля по плоским волнам вида (7) и (8). При этом амплитуды плоских волн, распространяющихся в верхнем и нижнем полупространствах, будут иметь вид

$$A_{pq}^+ = \delta_{p0} \delta_{q0} - \frac{i}{2d_x d_y \Gamma_{pq}} \int_{\Sigma} J(\mathbf{r}') \exp(i\mathbf{k}_{pq}^+ \mathbf{r}') ds', \quad (42)$$

$$A_{pq}^- = -\frac{i}{2d_x d_y \Gamma_{pq}} \int_{\Sigma} J(\mathbf{r}') \exp(i\mathbf{k}_{pq}^- \mathbf{r}') ds', \quad (43)$$

где δ_{pq} – символ Кронекера.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Для проверки корректности и иллюстрации преимуществ разработанного метода нахождения ФГ решетки было проведено сравнение результатов расчета ФГ по описанному выше алгоритму с результатами расчета ФГ при помощи формулы (41). В табл. 1 приведены значения ФГ, полученные указанными методами для значения параметра $d/\lambda = 0.99$, где λ – длина волны. Рассматривалось два угла падения плоской волны: нормальное падение и $\theta_0 = 85^\circ$, $\varphi_0 = 0$. Верхняя строка таблицы соответствует результатам расчета ФГ по формуле (41), а нижняя – по формуле (34). Значения ФГ приведены для разных значений величины $\gamma = |z - z'|/d$. Параметры задачи имели следующие значения. Периоды решетки $d_y = 2d_x$, координаты точки источника и точки наблюдения $\rho = \rho' = 0.5d_x$, $\varphi = 0$, $\varphi' = 3.14159$. В табл. 1 приведено также число N_1 членов ряда (41) и число N_2 членов в формуле (34) (с учетом первой суммы), требуемое для стабилизации результатов в восьмом знаке после запятой. Параметр $Q = 5$. Как следует из таблицы, относительная разница значений ФГ, полученных при помощи обеих методик, не превосходит 3×10^{-8} , т.е. имеется хорошая точность вычисления ФГ. Видно также, что требуемое число членов ряда (41) на 3–4 порядка превосходит число членов в формуле (34) при условии, что $\gamma = |z - z'|/d$ мало. Таким образом, имеется существенное преимущество предлагаемого подхода перед способом, основанным на использовании ряда (41).

С целью проиллюстрировать непригодность ряда (41) при малых γ для вычисления ФГ решетки был проведен численный эксперимент. А именно, была рассмотрена дифракция плоской волны на решетке, составленной из сплюснутых сфероидов с отношением полуосей $a/c = 1.5$. Величина $2a = 0.9d_x$, частотный параметр $d/\lambda = 0.499$, отношение периодов решетки $d_y = 2d_x$. Волна падала под углами $\varphi_0 = 0$ и $\theta_0 = 45^\circ$. Число дискретных

Таблица 2. Проверка выполнения закона сохранения энергии и максимальные значения невязки для разных геометрий элементов решетки

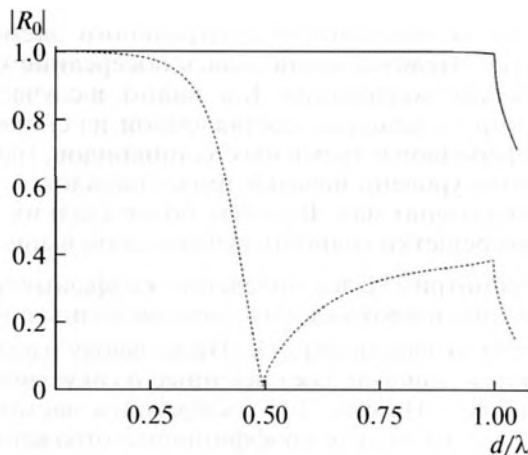
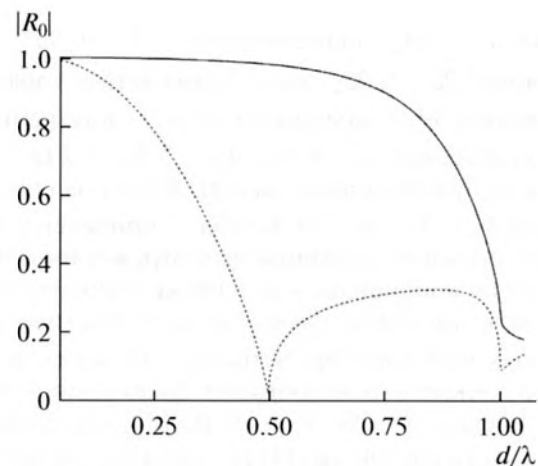
Форма элемента решетки		$ R_0 $	$ T_0 $	относительная ошибка выполнения (44)	максимальное значение невязки
Сфера	$d/\lambda = 0.75$	0.09570941	0.8019428	5.481×10^{-10}	1.26×10^{-6}
	$d/\lambda = 0.99$	0.2574638	0.6809818	6.545×10^{-8}	1.34×10^{-6}
Сфероид	$d/\lambda = 0.75$	0.1929387	0.7886600	1.03×10^{-4}	0.0205
	$d/\lambda = 0.99$	0.3240981	0.6408552	1.542×10^{-4}	0.0158
Тор	$d/\lambda = 0.75$	0.2038698	0.7760832	4.555×10^{-9}	3.47×10^{-5}
	$d/\lambda = 0.99$	0.3466273	0.6237944	5.113×10^{-9}	5.04×10^{-5}
Трехосный эллипсоид	$d/\lambda = 0.75$	0.1671849	0.8294257	4.905×10^{-5}	0.018
	$d/\lambda = 0.99$	0.2809132	0.6932175	6.717×10^{-5}	0.0215

источников составляло $N = 14$, $M = 21$, т.е. было небольшим. Рассчитывались модули коэффициентов отражения и прохождения плоской волны при помощи алгоритма нахождения ФГ, описанного выше, и при помощи формулы (41). Полученные результаты различались в 5–6 знаке после запятой. Однако время счета по обоим алгоритмам различалось на порядок: в случае использования формулы (34) оно составило примерно 20 с, а при использовании формулы (41) – около 10 мин. При дальнейшем увеличении отношения полуосей сфероидов метод, основанный на использовании формулы (41), становится полностью непригодным, так как время счета по этому методу измеряется часами. Очевидно, медленная сходимость ряда (41) обусловлена малостью величины γ для рассматриваемой геометрии элементов решетки.

Для тестирования разработанной методики решения задачи дифракции было проверено выполнение закона сохранения энергии, который в рассматриваемом случае имеет вид

$$P_0 = \sum_{p,q} \left(|A_{pq}^+|^2 + |A_{pq}^-|^2 \right) \Gamma_{pq}, \quad (44)$$

где $P_0 = \cos \theta_0$ – мощность падающей на решетку плоской волны. В формуле (44) суммирование ведется по всем распространяющимся плоским волнам. Точность выполнения закона сохранения энергии была опробована для решетки из акустически мягких сфер, сплюснутых сфероидов, круговых торов, а также решетки, составленной из трехосных эллипсоидов. Параметры геометрии задачи имели следующие значения: период ре-

**Рис. 2.** Частотная зависимость коэффициента отражения для решетки из сфер.**Рис. 3.** Частотная зависимость коэффициента отражения для решетки из трехосных эллипсоидов.

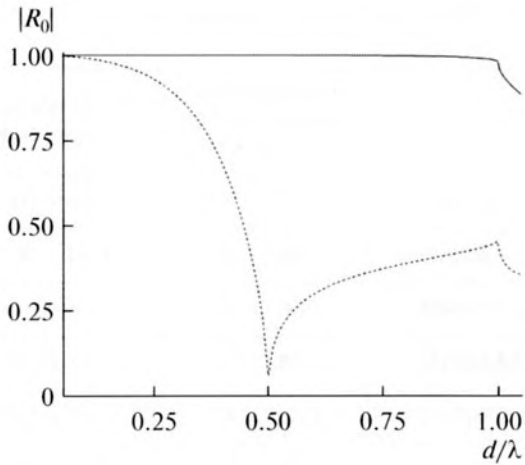


Рис. 4. Частотная зависимость коэффициента отражения для решетки из круговых торов.

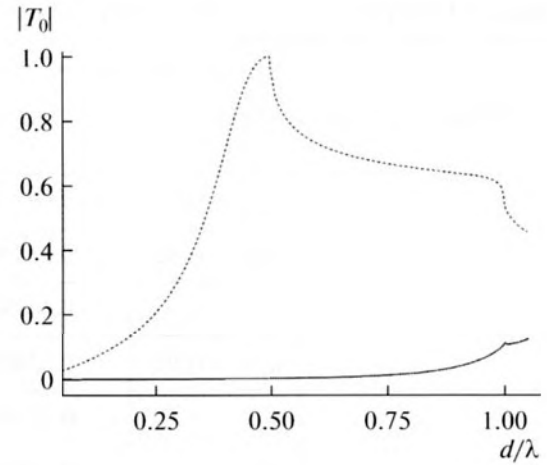


Рис. 5. Частотная зависимость коэффициента прохождения для решетки из сфер.

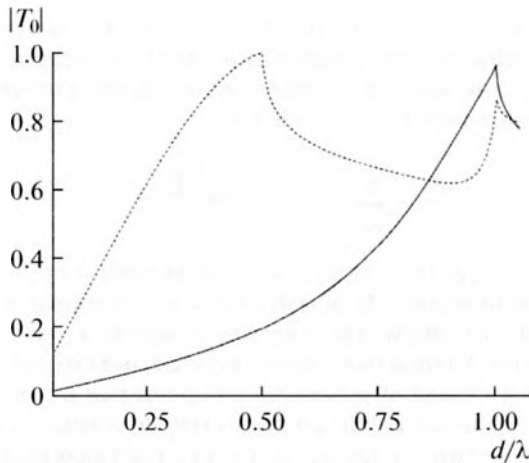


Рис. 6. Частотная зависимость коэффициента прохождения для решетки из трехосных эллипсоидов.

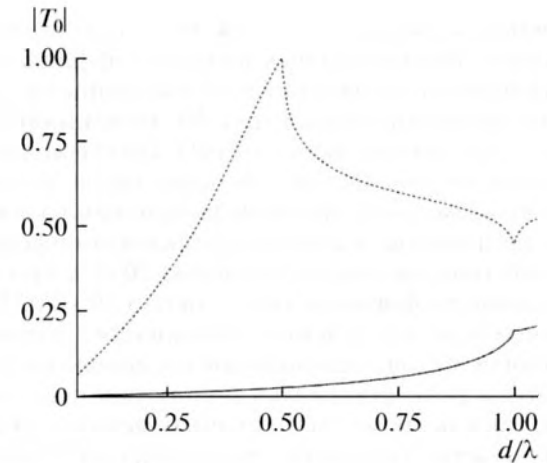


Рис. 7. Частотная зависимость коэффициента прохождения для решетки из круговых торов.

шетки $d_y = 2d_x$; диаметр сферы $2a = 0.9d_x$; оси сфероида $2a = 0.9d_x$, $a/c = 3$; диаметры тора составляли $0.9d_x$ – внешний и $0.3d_x$ – внутренний; оси эллипсоида $2a = 0.9d_x$, $a/c = 3$, $b/c = 2$ (c – полюсь эллипсоида вдоль оси z). Волна падала под углами $\theta_0 = 45^\circ$, $\varphi_0 = 0$. В табл. 2 приведены значения модулей коэффициента отражения и прохождения плоской волны, а также относительная разность правой и левой частей в формуле (44) для двух значений параметра d/λ . Во всех случаях число дискретных источников было одинаковым и составляло $N = 30$, $M = 45$. Видно, что правая и левая части равенства (44) различаются менее чем на 2×10^{-4} . В последнем столбце табл. 2 приведены максимальные значения невязки краевого усло-

вия (3) на поверхности центрального элемента решетки. Невязка вычислялась посередине между точками коллокации. Как видно, в случае дифракции на решетке, составленной из сплюснутых сфероидов и трехосных эллипсоидов, максимальный уровень невязки имеет порядок 1–2%, т.е. достаточно мал. В случае более гладких элементов решетки точность существенно выше.

Рассмотрим далее поведение коэффициентов отражения и прохождения плоской волны в зависимости от параметра d/λ . Ниже всюду рассматриваются решетки, составленные из акустически мягких тел. На рис. 2–7 изображены частотные зависимости модуля коэффициента отражения и прохождения плоской волны при дифракции на решетке из сфер (рис. 2, 5), трехосных эллипсоидов (рис. 3, 6) и круговых торов (рис. 4, 7). Рас-

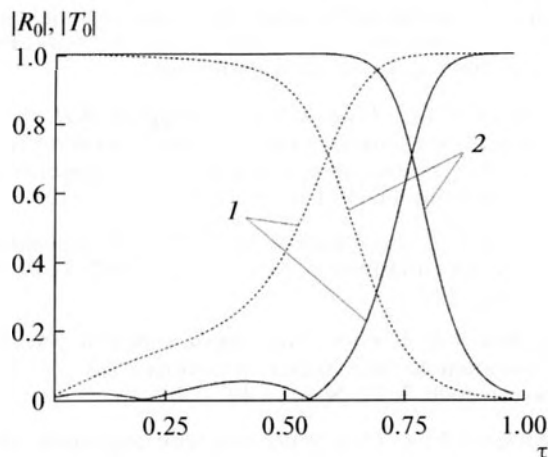


Рис. 8. Зависимость коэффициентов отражения и прохождения от коэффициента заполнения решетки. Решетка из сфер.

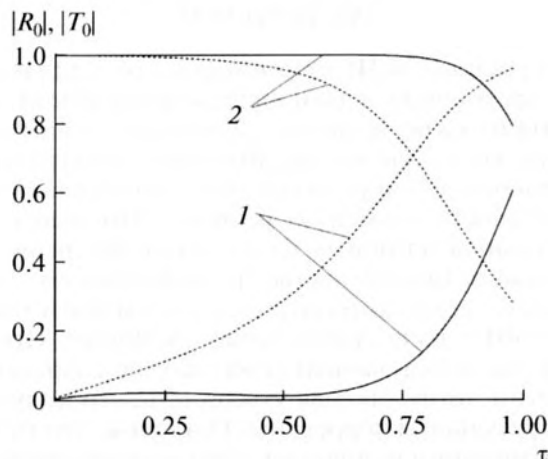


Рис. 9. Зависимость коэффициентов отражения и прохождения от коэффициента заполнения решетки. Решетка из трехосных эллипсоидов.

сматривалось нормальное падение плоской волны. Диаметр сферы $2a = 0.9d$, оси эллипсоида $2a = 0.9d$, $a/c = 3$, $b/c = 2$, диаметры тора — $0.9d$ внешний и $0.3d$ внутренний. Сплошные кривые соответствуют случаю, когда периоды решетки одинаковы, а штриховые кривые — $d_y = 2d_x$. Как видно, имеются критические значения волнового параметра d/λ , которые соответствуют возникновению новых распространяющихся (не затухающих) пространственных гармоник. При нормальном падении плоской волны данные критические значения волнового параметра находятся из соотношения

$$\frac{d}{\lambda} = \sqrt{\left(\frac{pd}{d_x}\right)^2 + \left(\frac{qd}{d_y}\right)^2}, \quad p, q = 0, 1, 2, \dots \quad (45)$$

Видно также, что имеется существенное отличие в поведении коэффициентов отражения и прохождения для дифракции на решетке, составленной из трехосных эллипсоидов. В этом случае имеется достаточно большой “зазор” между элементами решетки, и поэтому модуль коэффициента отражения принимает меньшие значения, чем для решеток из сфер и круговых торов в рассматриваемом диапазоне изменения волнового параметра.

На рис. 8–10 изображены зависимости модулей коэффициента отражения (кривые 1) и прохождения (кривые 2) плоской волны для решеток, составленных из описанных выше элементов, от коэффициента заполнения решетки τ , т.е. от отношения диаметра тела к периоду решетки (при этом $d_x = d_y$). Рассматривалось нормальное падение плоской волны. Волновой параметр $d/\lambda = 0.99$ (сплошные кривые на рисунках) и $d/\lambda = 0.75$

(штриховые кривые). Соотношения между размерами тел были такими же, как и для рис. 2–7. Как видно из рисунков, относительно небольшое изменение волнового параметра приводит к существенному изменению зависимостей коэффициентов отражения и прохождения. Во-первых, с ростом параметра τ модуль коэффициента отражения возрастает (приближается к единице в случае решеток из тел вращения), а модуль коэффициента прохождения убывает (стремится к нулю для решеток из сфер и торов). Во-вторых, диапазон, в котором коэффициент прохождения решетки близок по модулю к единице, шире в случае, когда параметр $d/\lambda = 0.99$, т.е. волновой параметр близок к критическому значению.

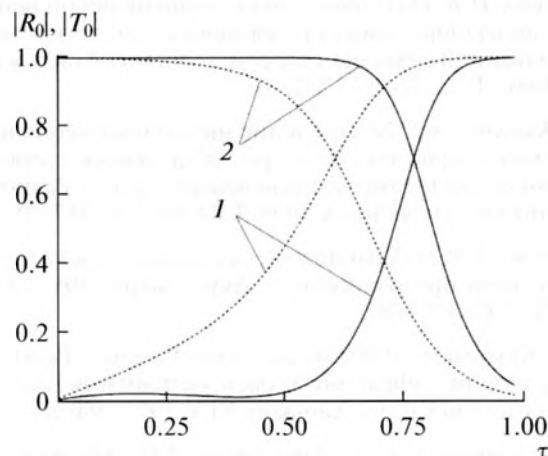


Рис. 10. Зависимость коэффициентов отражения и прохождения от коэффициента заполнения решетки. Решетка из круговых торов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе МДИ разработан подход для решения трехмерной задачи дифракции плоской волны на плоской решетке, состоящей из идеально отражающих элементов. Выведено интегральное уравнение для двух типов граничных условий на поверхности элементов решетки. Приведен эффективный алгоритм нахождения ФГ решетки. Показано преимущество разработанного алгоритма по сравнению со стандартным представлением ФГ в виде суммы гармоник Флоке. Проведена проверка выполнения закона сохранения энергии, позволяющая утверждать, что полученные результаты корректны. Показано, что невязка граничного условия на поверхности центрального элемента решетки принимает малые значения при небольшом количестве дискретных источников. Приведены зависимости модуля коэффициента отражения и прохождения плоской волны от волнового параметра и коэффициента заполнения для решеток, составленных из акустически мягких сфер, трехосных эллипсоидов и круговых торов. Показано наличие особенностей у частотных зависимостей коэффициентов отражения и прохождения при критических значениях волнового параметра. Продемонстрирован тот факт, что решетка становится более “прозрачной” для значительного волнового параметра, близких к критическому.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-02-00976.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кудашиева О.А., Севрюгова Н.В.* Излучение звука бесконечной периодической решеткой с зазорами // Акуст. журн. 1976. Т. 22. № 3. С. 385–392.
2. *Вовк И.В.* Излучение звука периодической решеткой из стержневых преобразователей, звукоизолированной с тыльной стороны слоем // Акуст. журн. 1980. Т. 26. № 4. С. 522–527.
3. *Кюркчан А.Г.* Возбуждение нитью тока периодической ребристой структуры, обладающей свойствами искусственно жесткой поверхности // Радиотехника и электроника. 1999. Т. 44. № 7. С. 787–793.
4. *Вовк И.В.* Дифракция звука на решетке из лент конечной прозрачности // Акуст. журн. 1985. Т. 32. № 3. С. 378–381.
5. *Шестопалов В.П.* Метод задачи Римана–Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Харьков: ХГУ, 1971. 400 с.
6. *Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г.* Дифракция волн на решетках. Харьков: ХГУ, 1973. 288 с.
7. *Yasumoto K., Toyama H., Kushta T.* Accurate analysis of two-dimensional electromagnetic scattering from multilayered periodic arrays of circular cylinders using lattice sums technique // IEEE Trans. Antennas Propagat. 2004. V. 52. № 10. P. 2603–2611.
8. *Кюркчан А.Г., Маненков С.А., Смирнов В.И.* Анализ дифракции плоской волны и поля точечного источника на многорядной решетке // Радиотехника и электроника. 2011. Т. 56. № 9. С. 1057–1068.
9. *Лапин А.Д.* Поглощение звука решеткой резонаторов с диссипацией // Акуст. журн. 2002. Т. 48. № 3. С. 428–429.
10. *Лапин А.Д.* Поглощение звука плоской решеткой монополюльно-дипольных рассеивателей // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 4. С. 497–501.
11. *Кобелев Ю.А.* Рассеяние плоской звуковой волны сферическими частицами с монополюльным типом колебаний, расположенными в узлах плоской безграничной сетки с одинаковыми ячейками // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 1. С. 3–12.
12. *Кобелев Ю.А.* Многократное рассеяние звуковых волн сферическими частицами с монополюльным типом колебаний, расположенными в узлах трехмерной решетки с одинаковыми ячейками // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 4. С. 432–441.
13. *Маненков С.А.* Дифракция плоской электромагнитной волны на трехмерной плоской решетке // Радиотехника и электроника. 2010. Т. 55. № 4. С. 405–414.
14. *Кюркчан А.Г., Маненков С.А., Негорожина Е.С.* Решение задачи дифракции электромагнитного поля на телах вращения при помощи модифицированного метода дискретных источников // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51. № 11. С. 1285–1293.
15. *Kyurkchan A.G., Manenkov S.A.* Application of different orthogonal coordinates using modified method of discrete sources for solving a problem of wave diffraction on a body of revolution // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2012. V. 113. P. 2368–2378.
16. *Маненков С.А.* Новая версия модифицированного метода дискретных источников применительно к задаче дифракции на теле вращения // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 2. С. 129–136.
17. *Маненков С.А.* Применение сплайн-аппроксимации для решения задачи дифракции на периодической решетке, расположенной над киральным полупространством // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54. № 10. С. 1196–1206.
18. *Маненков С.А.* Решение задачи дифракции на периодически неровной границе кирального полупространства // Радиотехника и электроника. 2011. Т. 56. № 8. С. 923–931.
19. *Васильев Е.Ю.* Возбуждение тел вращения М.: Радио и связь, 1987. 272 с.
20. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами.* Под ред. Абрамовица М. и Стигана И.М. М.: Наука, 1979. 832 с.