

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.21

ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ АКУСТИЧЕСКИХ МЕТАМАТЕРИАЛОВ С ПОТЕРЯМИ

© 2016 г. Ю. И. Бобровницкий, Т. М. Томилина, М. М. Лактионова

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН

101990 Москва, ул. Грибоедова 4

e-mail: tatiana@imash.ac.ru

Поступила в редакцию 31.07.2015 г.

Для акустических метаматериалов с потерями предложена дискретная модель в виде периодической структуры с ячейками простейшего вида. Эффективные параметры модели определены с помощью критерия, основанного на равенстве дисперсии волн. Исследованы общие свойства модели. Приведен пример моделирования одного из метаматериалов отрицательного типа. Модель полезна при анализе волновых свойств и создании метаматериалов с заданными акустическими свойствами.

Ключевые слова: акустические метаматериалы, нормальные волны, дисперсия, демпфирование, эффективные параметры, мощность поглощения.

DOI: 10.7868/S0320791916010020

1. ВВЕДЕНИЕ

Акустические метаматериалы (АММ), являясь не материалами в традиционном понимании, а ячейстыми периодическими структурами, с волновой точки зрения ведут себя как обычные непрерывные материалы на частотах, где длины волн превышают размеры ячеек. В зависимости от устройства ячеек, имеющих, как правило, много степеней свободы, такие материалы могут продемонстрировать широкий круг ранее не наблюдаемых волновых свойств, полезных для решения целого ряда новых практических задач [1, 2]. Одной из таких актуальных практических задач является создание поглотителя звука нового типа (суперпоглотителя), эффективность которого существенно превышает эффективность известных средств поглощения. Принципиальная возможность создания суперпоглотителя из акустических метаматериалов отмечалась в ряде работ [3–5]. Однако реализация этой возможности затруднена недостаточной изученностью АММ как теоретически, так и в технологическом и экспериментальном плане.

Данная работа направлена на решение одной из теоретических проблем. В ней предложена общая дискретная модель акустических метаматериалов с потерями, которая заметно упрощает анализ их волновых и поглощающих свойств и, главное, позволяет единообразно описывать и сравнивать АММ различной физической природы и конструктивной сложности, что полезно при создании новых АММ с требуемыми свойствами.

Предлагаемая модель является обобщением дискретной модели, разработанной в работах [6, 7] для АММ без потерь. Основная идея моделирования состоит в замене АММ как сложной периодической структуры периодической же структурой простейшего вида, ячейка периодичности которой состоит из минимального числа сосредоточенных механических элементов (масс, упругостей и вязких демпферов), значения которых принимаются в качестве эффективных параметров АММ. Ключевым моментом моделирования является метод вычисления эффективных параметров, названный “волновым сглаживанием”. Согласно этому методу, эффективные параметры находятся из условия равенства дисперсионных уравнений нормальных волн АММ и модели. Ниже показано, что они в явном виде выражаются через характеристики (входные импедансы) одной ячейки периодичности АММ и полностью определяют все волновые свойства АММ (скорости распространения, пространственное затухание нормальных волн и др.), а также некоторые энергетические характеристики, в частности величину мощности потерь в ячейках АММ. Кроме того, эффективные параметры, определенные волновым сглаживанием, позволяют в случае длинных волн легко переходить к непрерывным средам и непрерывным “волновым” уравнениям. Для этого нужно распределить их равномерно по ячейке периодичности.

План статьи следующий. Вначале для произвольного одномерного АММ приводится его дискретная модель и вычисляются ее эффективные параметры. Далее исследуются общие волновые

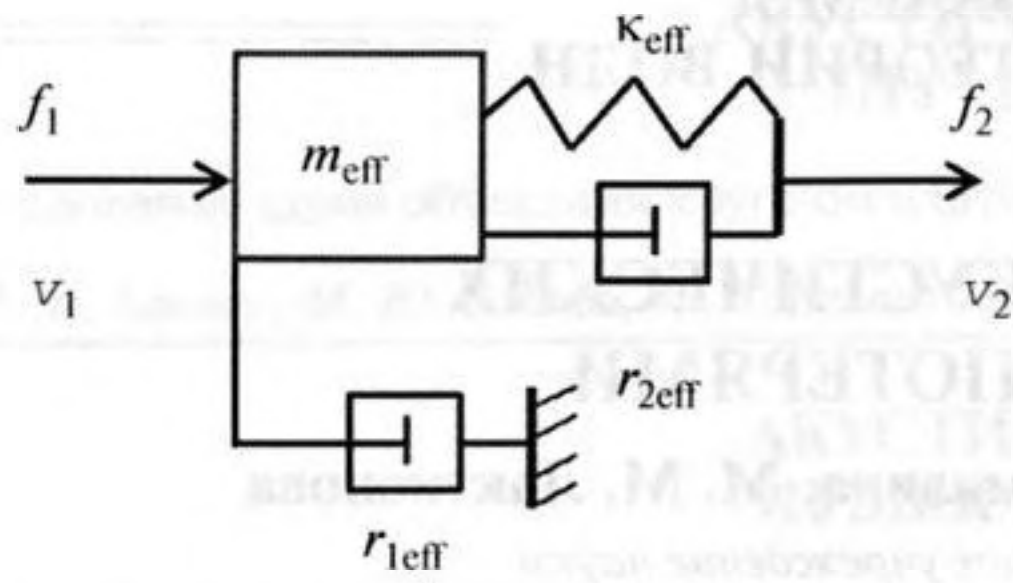


Рис. 1. Ячейка периодичности одномерной дискретной модели АММ с потерями.

свойства модели, и затем в качестве примера дается анализ распространения волн в одном из отрицательных АММ с потерями.

2. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим одномерный метаматериал акустического типа, представляющий собой периодическую структуру (цепочку), ячейкой периодичности которой является линейная демпфированная колебательная система с N степенями свободы. На число N не накладывается каких-либо ограничений. Условием “акустичности” цепочки, т.е. существования в ней нормальных волн только одного типа [6], является наличие у ячейки периодичности двух входов, посредством которых она соединяется с соседними ячейками. Предполагается, что ячейка описывается системой линейных уравнений

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + R\dot{\mathbf{u}}(t) + K\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (1)$$

где $\mathbf{u}(t)$ — это N -вектор смещений, M — положительно определенная инерционная матрица, R и K — неотрицательные матрицы вязких демпферов и упругостей. Все матрицы квадратные, порядка N , симметричные. Точки вверху означают дифференцирование по времени. Рассматривая далее гармоническое движение и опуская множитель $\exp(-i\omega t)$, связь между силами и перемещениями (1) представим в виде алгебраических уравнений

$$\mathbf{f} = Z\mathbf{v}, \quad Z = R + iX, \quad X = \frac{1}{\omega}K - \omega M. \quad (2)$$

Здесь Z — это полная $N \times N$ -матрица импедансов ячейки, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$ — вектор комплексных амплитуд скоростей. Так как ячейка имеет только два входа, то у N -вектора сил \mathbf{f} отличны от нуля только компоненты на этих двух входах. Положим, что их номера равны 1 и 2. Тогда, представив векторы \mathbf{f} , \mathbf{v} и матрицу Z в блочном виде как

$$\mathbf{v} = [\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta]^T, \quad \mathbf{f} = [\mathbf{f}_\alpha, 0]^T, \quad Z = \begin{bmatrix} Z_{\alpha\alpha} & Z_{\alpha\beta} \\ Z_{\beta\alpha} & Z_{\beta\beta} \end{bmatrix},$$

где α и β обозначают индексы (1, 2) и (3, ..., N), а верхний индекс T — транспонирование, уравнения (2) можно представить в виде

$$\mathbf{f}_\alpha = Z_\alpha \mathbf{v}_\alpha, \quad \mathbf{v}_\alpha = [v_1, v_2]^T, \quad \mathbf{f}_\alpha = [f_1, f_2]^T. \quad (3)$$

Матрица второго порядка

$$Z_\alpha = Z_{\alpha\alpha} - Z_{\alpha\beta} Z_{\beta\beta}^{-1} Z_{\beta\alpha} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \quad (4)$$

является симметричной комплексной матрицей входных импедансов ячейки периодичности относительно двух “рабочих” входов. Она выражается через блоки полной матрицы (2) и называется дополнением Шура [8]. Эта матрица считается известной: она может быть рассчитана по полной матрице или измерена экспериментально на одной изолированной ячейке периодичности.

Пусть в цепочке распространяется нормальная волна

$$\mathbf{v}_\alpha(n) = \mathbf{v}_\alpha(0) \exp(i\gamma n - i\omega t), \quad (5)$$

где n — номер ячейки, $\gamma = \beta + i\delta$ — комплексная постоянная распространения, β — волновое число, δ — коэффициент пространственного затухания. Используя условие жесткого соединения ячеек, из (3)–(5) нетрудно получить следующее дисперсионное уравнение:

$$z_{11} + z_{22} + 2z_{12} \cos \gamma = 0, \quad (6)$$

которое определяет зависимость от частоты двух различающихся знаком постоянных распространения нормальных волн, распространяющихся и затухающих в противоположных направлениях. При этом их волновые числа определены неоднозначно, $\pm\beta + 2\pi q$, q — целое число. Относительно выбора нужной ветви дисперсии см. [9, 10].

В качестве модели описанного акустического метаматериала здесь предлагается простейшая дискретная периодическая структура с тем же пространственным периодом l , что и моделируемый АММ, с ячейкой периодичности, изображенной на рис. 1. Ячейка состоит из двух реактивных элементов (эффективной массы m_{eff} и эффективной упругости k_{eff}) и двух сосредоточенных вязких демпферов. Демпфер $r_{1\text{eff}}$ учитывает т.н. внешнее трение: сила его вязкого сопротивления пропорциональна скорости v_1 . Демпфер $r_{2\text{eff}}$ учитывает внутренние потери: сила его сопротивления пропорциональна скорости деформаций, т.е. разности скоростей $v_1 - v_2$. Введение двух демпферов в модель продиктовано необходимостью учета всех возможных потерь, которые могут иметь место в реальных АММ. Модель, таким образом, имеет четыре эффективных параметра.

Симметричная комплексная матрица второго порядка ячейки на рис. 1 имеет вид (4), три ее элемента равны

$$z_{11} = \hat{z}_k + \hat{z}_m, \quad z_{22} = -z_{12} = \hat{z}_k,$$

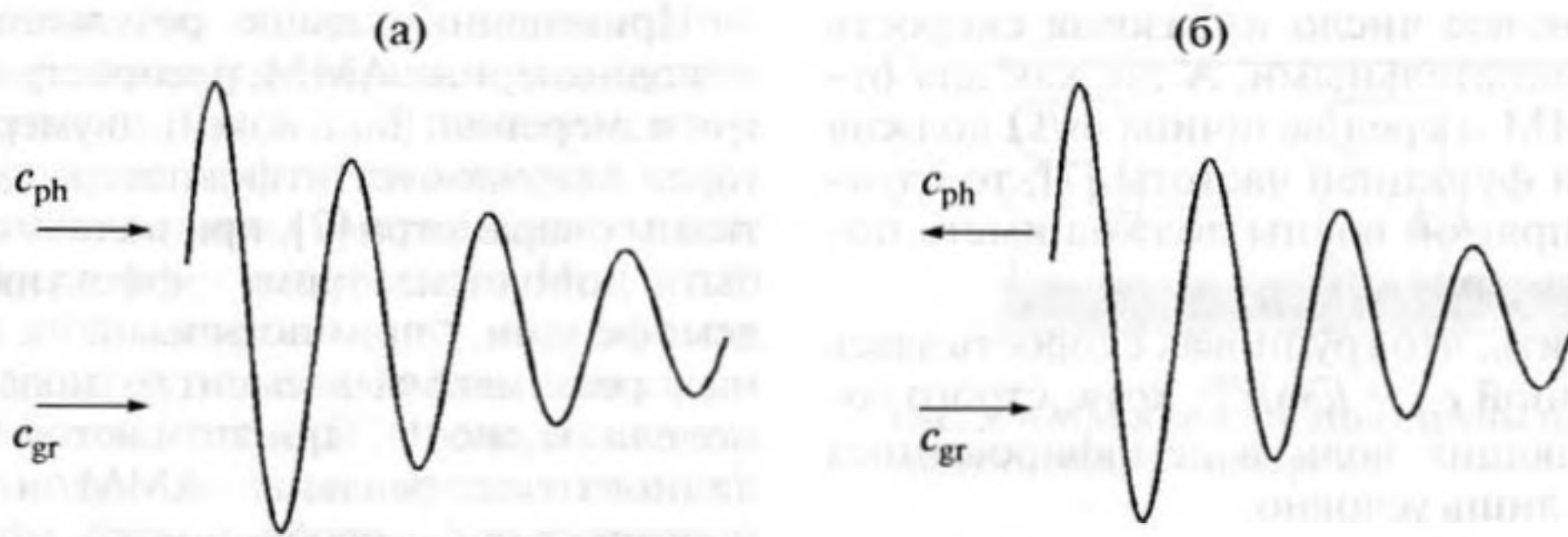


Рис. 2. Форма прямой нормальной волны в демпфированном акустическом метаматериале (а) положительного и (б) отрицательного типов.

где комплексные импедансы

$$\begin{aligned} \hat{z}_m &= r_{1\text{eff}} + z_m = r_{1\text{eff}} - i\omega m_{\text{eff}}, \\ \hat{z}_\kappa &= r_{2\text{eff}} + z_\kappa = r_{2\text{eff}} + \frac{i\kappa_{\text{eff}}}{\omega} \end{aligned} \quad (7)$$

введены для удобства анализа: внешнее трение объединено с инерционным элементом, а внутреннее трение – с упругим элементом. Такое объединение, помимо удобства, имеет и физическое обоснование [11, 12].

Дисперсионное уравнение нормальных волн модели записывается аналогично (6), как

$$\hat{z}_m + 2\hat{z}_\kappa - 2\hat{z}_\kappa \cos(\gamma) = 0. \quad (8)$$

Следуя общей идее “волнового сглаживания” [6], дисперсионные уравнения АММ и модели, (6) и (8), должны быть одинаковы, откуда следует, что эффективные параметры модели следующим образом выражаются через входные импедансы ячейки периодичности АММ (4):

$$\begin{aligned} m_{\text{eff}} &= -\frac{1}{\omega} \text{Im}(\text{sum}(Z_\alpha)), \\ \kappa_{\text{eff}} &= -\omega \text{Im}(z_{12}), \quad r_{1\text{eff}} = \text{Re}(\text{sum}(Z_\alpha)), \\ r_{2\text{eff}} &= -\text{Re}(z_{12}). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\text{sum}(Z_\alpha)$ – это сумма всех четырех элементов матрицы (4). Эффективные параметры (9), в зависимости от устройства ячейки периодичности АММ, могут принимать любые действительные значения.

3. СВОЙСТВА МОДЕЛИ

Приведем некоторые общие свойства модели. Найдем, прежде всего, в явном виде решение дисперсионного уравнения (8). Представим его в виде

$$\cos(\gamma) = a \text{ или } \lambda^2 - 2a\lambda + 1 = 0, \lambda = \exp(i\gamma), \quad (10)$$

где

$$a = 1 + \frac{\hat{z}_m}{2\hat{z}_\kappa} = 1 - \frac{\omega^2}{2\Omega^2} \frac{1 + i\frac{d_1}{\omega}}{1 - id_2\omega},$$

$$\Omega^2 = \frac{\kappa_{\text{eff}}}{m_{\text{eff}}}, \quad d_1 = \frac{r_{1\text{eff}}}{m_{\text{eff}}}, \quad d_2 = \frac{r_{2\text{eff}}}{\kappa_{\text{eff}}}.$$

Два корня уравнения (10) равны $\lambda_{1,2} = a \pm (a^2 - 1)^{1/2}$, а соответственные постоянные распространения, различающиеся знаком, для двух нормальных волн (5), прямой и обратной, можно представить как

$$\gamma_{1,2} = \varphi_{1,2}(\omega) + i\delta_{1,2}(\omega) = \pm(\varphi - i\ln|A|), \quad (11)$$

где $A = a^2 + (a^2 - 1)^{1/2} = A_1 + iA_2 = |A|e^{i\varphi}$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$.

Какая из этих двух нормальных волн является прямой (т.е. уходящей от источника в сторону положительных n), а какая обратной, зависит от знака коэффициента пространственного затухания $\delta(\omega)$, так как в силу закона сохранения энергии волны должны экспоненциально затухать при удалении от их источника. Для наглядности рассмотрим случай малого демпфирования. Из (10) и (11) в этом случае следует

$$\gamma_{1,2} \approx \pm \frac{\omega}{\Omega} \left[1 + \frac{i}{2} \left(\frac{d_1}{\omega} + \omega d_2 \right) \right]. \quad (12)$$

Если исследуемый АММ относится к классу положительных сред, т.е. если его эффективные масса и упругость положительны, $m_{\text{eff}} > 0$, $\kappa_{\text{eff}} > 0$, то величины Ω , d_1 и d_2 также положительны, так что прямой нормальной волне соответствует постоянная распространения (12) со знаком “+”. При этом его волновое число и фазовая скорость также положительны. А поскольку для положительных АММ и сред величина ω/Ω должна быть возрастающей функцией частоты [7], то и групповая скорость прямой волны также положительна (рис. 2а).

Если исследуемый АММ отрицателен ($m_{\text{eff}} < 0$, $\kappa_{\text{eff}} < 0$), то величина Ω остается положительной, а d_1 и d_2 становятся отрицательными. Поэтому прямой волне в этом случае соответствует постоянная распространения (12) со знаком “-”. Соот-

ветственно, волновое число и фазовая скорость оказываются отрицательными. А так как для отрицательных АММ и сред величина ω/Ω должна быть убывающей функцией частоты [7], то групповая скорость прямой волны должна иметь положительный знак (рис. 2б).

Следует заметить, что групповая скорость здесь принимается равной $c_{gr} = l\partial\omega/\partial\beta$, хотя, строго говоря, для затухающих волн в демпфированных средах это верно лишь условно.

Знание эффективных параметров АММ позволяет точно вычислить не только дисперсию и пространственное затухание, но и некоторые энергетические характеристики волн АММ. Такова, в частности, мощность потерь нормальной волны в одной ячейке периодичности. По определению, эта мощность равна

$$D = \frac{1}{2} \mathbf{v}^* R \mathbf{v}, \quad (13)$$

где \mathbf{v} — это N -вектор комплексных амплитуд скоростей всех степеней свободы ячейки АММ и R — полная матрица демпфирования, см. (2). Воспользовавшись соотношениями (7) и одним из свойств матричного дополнения Шура (4), именно, $\mathbf{v}^* Z \mathbf{v} = \mathbf{v}_\alpha^* Z_\alpha \mathbf{v}_\alpha$ (см. [6, 13]), нетрудно выразить мощность потерь (13) через эффективные параметры:

$$D = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{v}_\alpha^* Z_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = \frac{1}{2} r_{1\text{eff}} |v_1|^2 + \frac{1}{2} r_{2\text{eff}} |v_2 - v_1|^2. \quad (14a)$$

Учитывая, что в нормальной волне $v_2 = v_1 \exp(i\gamma)$, эту мощность можно записать также через амплитуду волны $|v_1|$ и постоянную распространения:

$$D = \frac{|v_1|^2}{2} [r_{1\text{eff}} + r_{2\text{eff}} (1 - e^{-\delta} \cos(\beta) + e^{-2\delta})]. \quad (14b)$$

Приведем еще дифференциальное уравнение колебаний эффективной непрерывной среды, которой эквивалентен исследуемый АММ в диапазоне частот, где его нормальные волны являются длинными по сравнению с размером ячейки периодичности и слабо затухающими, $|\gamma|^2 \ll 1$. Это уравнение следует из дисперсионного уравнения (8) и соответствует равномерному распределению эффективных параметров (9) по ячейке:

$$K_{\text{eff}}(\omega)(1 - i\omega d_2) \frac{d_2 u}{dx^2} + \rho_{\text{eff}}(\omega)(\omega^2 + i\omega d_1)u = 0, \quad (15)$$

где $K_{\text{eff}}(\omega) = \kappa_{\text{eff}} l$ — эффективный модуль упругости, $\rho_{\text{eff}}(\omega) = \frac{m_{\text{eff}}}{l}$ — эффективная линейная плотность, u — смещение. Когда потерь нет и эффективные параметры не зависят от частоты, оно, очевидно, совпадает с обычным уравнением Гельмгольца для акустической среды.

Приведенные выше результаты, полученные для одномерных АММ, распространяются на два и три измерения. Так, модель двумерного АММ, которая в случае отсутствия потерь имеет три эффективных параметра [7], при наличии потерь должна быть дополнена тремя эффективными вязкими демпферами, “приписанными” к трем эффективным реактивным элементам модели (аналогично модели на рис. 1). При этом источники потерь различного типа реальных АММ, в зависимости от конструктивных особенностей, могут при моделировании попасть как в “инерционное” демпфирование (как в первом соотношении (7)), так и в “упругое” демпфирование (как во втором соотношении (7)) — см. ниже пример.

Одно из важных и полезных свойств предложенной дискретной модели состоит в том, что она позволяет выявить и детально исследовать особенности дисперсионных зависимостей, необходимые для понимания волновых свойств демпфированных АММ.

Известно, что демпфирование сглаживает и делает слабо различимыми многие характеристики реальных колебательных систем. Так, в случае колебаний инженерных конструкций такими характеристиками являются собственные частоты и формы. Извлечь эти характеристики из экспериментально измеренных данных — сложная задача, для решения которой разработано целое научное направление — модальный анализ, со своими экспериментальными, теоретическими и вычислительными методами и средствами [14].

В случае с распространением волн в акустических метаматериалах и более общих периодических структурах имеет место та же ситуация. Волновые свойства этих структур характеризуются полосами пропускания и непропускания, их частотными границами, типами нормальных волн, дисперсионными и некоторыми другими параметрами. Как правило, извлечь эти характеристики из экспериментальных данных, измеренных на реальных, а значит, демпфированных структурах — задача, по сложности близкая к модальному анализу. Использование предложенной в этой работе дискретной модели позволяет заметно упростить ее решение.

Выше указывалось, что для вычисления эффективных параметров модели достаточно измерить матрицу входных импедансов одной изолированной ячейки периодичности демпфированной АММ. Как видно из (9), построение модели фактически означает также разделение параметров демпфирования и структурных (инерционных и упругих) параметров, что дает возможность исследовать на модели отдельно эффекты, обусловленные демпфированием и структурой как таковой. В частности, многие детали и особенности дисперсии волн в исследуемом АММ можно получить на модели с нулевыми потерями. Более того, некоторые важные волновые характеристики

можно найти с помощью экспресс-анализа одних только знаков эффективных инерционных и упругих параметров модели. Так, в [6, 7] показано, что в полосах непропускания эффективная масса и эффективная жесткость должны иметь разные знаки, а в полосах пропускания – одинаковые. При этом, если оба знака положительны, то исследуемая структура эквивалентна по своим волновым свойствам обычной “положительной” среде, а если отрицательны – то отрицательной среде, имеющей отрицательную фазовую скорость. Более полную информацию о волновых свойствах исследуемого АММ можно получить, построив дисперсионные зависимости для волн в модели без потерь, т.е. решив дисперсионное уравнение (8), положив в нем $r_{1\text{eff}} = r_{2\text{eff}} = 0$.

4. ПРИМЕР МОДЕЛИРОВАНИЯ

В качестве примера рассмотрим моделирование одномерного АММ, схематически показанного на рис. 3. Это бесконечная струна, сжатая силой $Q > 0$, на периодически расположенных упругих опорах. Сжатую струну, вместо обычной натянутой, впервые использовал Х. Лэмб в придуманной им непрерывной искусственной среде [15], которая считается исторически первой метасредой отрицательного типа. В АММ на рис. 3 потери внутреннего типа содержатся в опорах и представлены известной моделью Кельвина–Фохта [16], т.е. параллельным соединением пружины с жесткостью k и сосредоточенного вязкого демпфера с коэффициентом демпфирования r . Гармонические колебания однородной струны описываются уравнением

$$u''(x) - k^2 u(x) = 0, \quad k^2 = \frac{\rho \omega^2}{Q},$$

(ρ – линейная плотность), которое имеет только экспоненциально возрастающие или убывающие решения $\exp(\pm kx - i\omega t)$. Ячейка периодичности АММ описывается матрицей импедансов (4) с элементами

$$z_{11} = -iz_0 \frac{\text{ch}(\sigma)}{\text{sh}(\sigma)}, \quad z_{12} = z_{21} = iz_0 \frac{1}{\text{sh}(\sigma)},$$

$$z_{22} = r + \frac{iz_0}{\text{sh}(\sigma)} \left[\left(\frac{\kappa l}{Q} \right) \frac{\text{sh}(\sigma)}{\sigma} - \text{ch}(\sigma) \right],$$

$$z_0 = (\rho Q)^{1/2}, \quad \sigma = kl.$$

Эффективные параметры (9) рассматриваемой структуры равны

$$m_{\text{eff}} = \rho l \left[\frac{2(\text{ch}(\sigma) - 1)}{\sigma \text{sh}(\sigma)} - \left(\frac{\kappa l}{Q} \right) \frac{1}{\sigma^2} \right], \quad (16)$$

$$\kappa_{\text{eff}} = -\frac{Q}{l} \frac{\sigma}{\text{sh}(\sigma)}, \quad r_{1\text{eff}} = r, \quad r_{2\text{eff}} = 0,$$

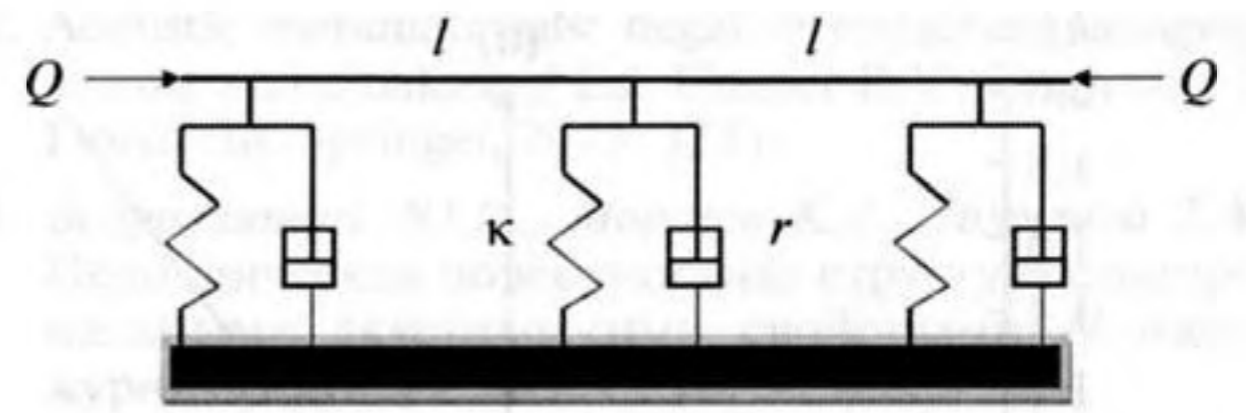


Рис. 3. АММ в виде сжатой струны на периодических упругих опорах с потерями.

а дисперсионное уравнение (8) записывается как

$$\cos(\gamma) = \left[\text{ch}(\sigma) - \left(\frac{\kappa l}{2Q} \right) \frac{\text{sh}(\sigma)}{\sigma} \right] + i \left(\frac{r}{2z_0} \right) \text{sh}(\sigma). \quad (17)$$

Из соотношений (16) видно, что из двух демпферов модели на рис. 1 отличным от нуля является только первый демпфер с коэффициентом демпфирования $r_{1\text{eff}}$. Внутренние потери опор, таким образом, при моделировании оказались отнесенными к потерям внешнего типа. Это, впрочем, не противоречит физике и вызвано особенностями конструкции АММ: один из двух входов элемента Кельвина–Фохта неподвижен (“заземлен”), а второй соединен непосредственно с эффективной массой.

В соответствии со сказанным выше об анализе волновых свойств, рассмотрим сначала дисперсию волн в модели без потерь.

Как видно из (16), эффективная жесткость отрицательна на всех частотах (из-за того, что струна сжата, а не натянута), а эффективная масса является монотонно возрастающей функцией частоты, имеющей один нуль на некоторой частоте σ_0 . Выше этой частоты знаки массы и жесткости противоположны. Поэтому на частотах $\sigma > \sigma_0$ нормальная волна недемпфированной модели (и структуры) имеет чисто мнимую постоянную распространения и экспоненциально убывает или возрастает с расстоянием. Ниже частоты σ_0 знаки m_{eff} и κ_{eff} совпадают и, следовательно, эта частота является верхней границей полосы пропускания, где нормальная волна является распространяющейся. Можно показать, что нижняя граница полосы пропускания совпадает с нулевой частотой, если жесткость опор невелика:

$$0 \leq \kappa \leq \frac{4Q}{l}. \quad (18)$$

Для более жестких опор она отлична от нуля. При увеличении жесткости κ полоса пропускания смещается в сторону высоких частот, а ее ширина стремится к нулю.

На рис. 4 представлена дисперсия прямой нормальной волны, т.е. волны, распространяющейся или убывающей в сторону положительных x , для двух значений коэффициента жесткости опор. На графиках видно, что в полосе пропускания, где групповая скорость положительна, фазовая ско-

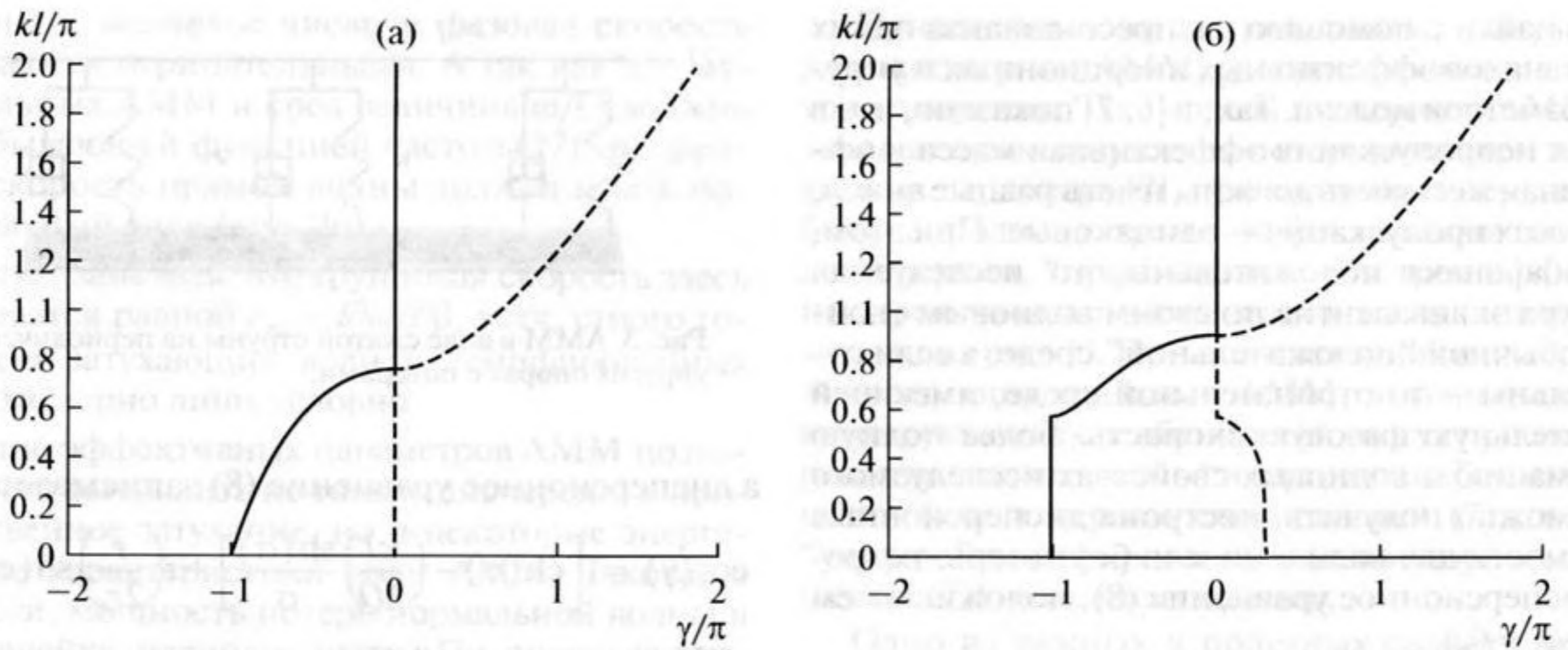


Рис. 4. Дисперсия прямой нормальной волны в АММ на рис. 3 без потерь: жесткость опор равна (а) $\kappa = 4Q/l$ и (б) $5Q/l$. Обозначения: kl/π – безразмерная частота, $\gamma = \beta + i\delta$ – постоянная распространения, β – волновое число (сплошные линии), δ – коэффициент пространственного затухания (штриховые линии).

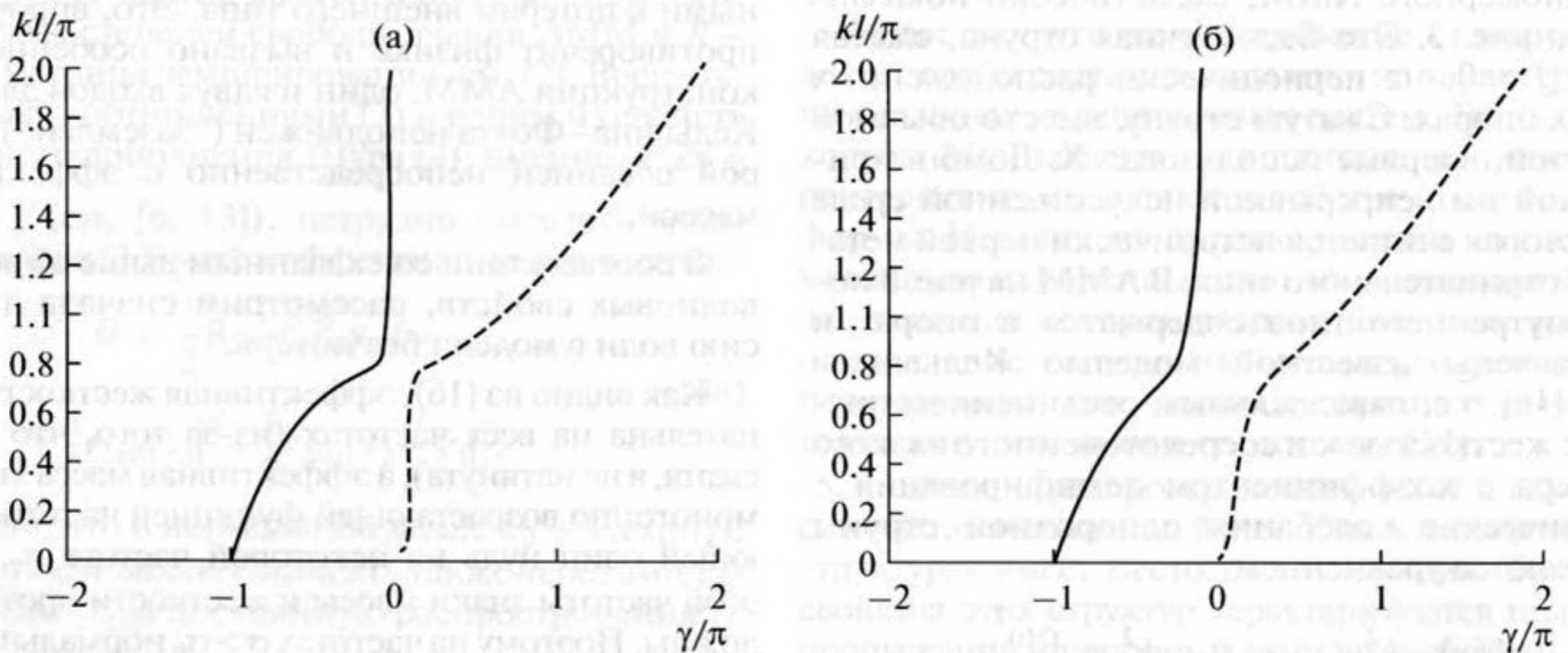


Рис. 5. Дисперсия прямой нормальной волны в АММ на рис. 3 с потерями: жесткость опор равна $4Q/l$, коэффициент демпфирования равен (а) $r = 0.1z_0$ и (б) $0.4z_0$; $z_0 = (\rho Q)^{1/2}$. Обозначения как на рис. 4.

рость отрицательна. Это подтверждает “отрицательность” рассматриваемой структуры, а также указывает на ее тесную “волновую” близость к упоминавшейся выше метасреде Лэмба [15]. Отметим также, что, если жесткость опор лежит в интервале (18), нормальная волна в рассматриваемом АММ на близких к нулю частотах является “статической волной”, имеющей отличные от нуля фазовую и групповую скорости на нулевой частоте. С физической точки зрения, статическая волна аналогична продольному изгибу в теории стержней и пластин [17].

На рис. 5 представлены графики дисперсии прямой волны в рассматриваемом АММ с потерями. Оба графика соответствуют жесткости опор $\kappa = 4Q/l$ и двум различным значениям коэффициента демпфирования. Как видно из рис. 5, посто-

янная распространения нормальных волн в демпфированных АММ имеет на всех частотах отличные от нуля действительную и мнимую части, т.е. волновое число и коэффициент пространственного затухания. Из-за этого факта понятия о полосах пропускания и непропускания, а также групповой скорости, строго говоря, здесь теряют свой смысл, и их можно рассматривать с оговорками и если демпфирование невелико. Сравнение рис. 5 с рис. 4а показывает, что потери могут довольно сильно менять волновые характеристики структур и сред. Так, если дисперсия на рис. 5а еще напоминает дисперсию на рис. 4а для структуры без потерь, то для случая больших потерь (рис. 5б) сходство пропадает. Тем не менее, для понимания и физической интерпретации дисперсионных зависимостей волн в демпфированных АММ и средах полезно и

оправданно использовать привычные характеристики волновых процессов, относящиеся к соответствующим недемпфированным АММ и средам. Построение предложенной в статье модели, основанной на дисперсионном критерии эквивалентности, позволяет проводить такой анализ.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для описания волновых процессов в демпфированных акустических метаматериалах, представленных периодическими структурами со сложными ячейками, предложена простая модель в виде периодической структуры, ячейка которой содержит минимальное число дискретных элементов (эффективных параметров). Критерием эквивалентности является равенство дисперсионных уравнений для АММ и модели. При этом параметры модели определяются на основе обычных измерений или расчетов, выполненных на одной изолированной ячейке периодичности АММ.

Все основные дисперсионные и энергетические характеристики АММ выражаются через эффективные параметры по выведенным формулам.

В модели параметры демпфирования отделены от инерционно-жесткостных параметров. Это дает возможность для анализа и физической интерпретации волновых процессов в демпфированных АММ использовать традиционные понятия групповой и фазовой скорости, полос пропускания и непропускания и др., разработанные для структур и сред без потерь.

Модель единообразно описывает и позволяет сравнивать АММ различной физической природы и сложности, что важно при создании новых материалов и структур с заданными виброакустическими свойствами.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15-19-00284).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Special issue on acoustic metamaterials // *J. Acoust. Soc. Am.* 2012. V. 132. № 4. Pt. 2. P. 2783–2945.
2. Acoustic metamaterials: negative refraction, imaging, lensing and cloaking / Ed. Craster R.V., Guenneau S. Dordrecht: Springer, 2013. 323 p.
3. Бобровицкий Ю.И., Морозов К.Д., Томила Т.М. Периодическая поверхностная структура с экстремальными акустическими свойствами // *Акуст. журн.* 2010. Т. 56. № 2. С. 147–151.
4. Climente A., Torrent D., Sanchez-Dehesa J. Omnidirectional broadband acoustic absorber based on metamaterials // *Appl. Phys. Lett.* 2012. V. 100. № 144103.
5. Hussein M.I., Frazier M.J. Metadamping: an emergent phenomenon in dissipative metamaterials // *J. Sound Vib.* 2013. V. 332. P. 4767–4774.
6. Бобровицкий Ю.И. Эффективные параметры и энергия акустических метаматериалов и сред // *Акуст. журн.* 2014. Т. 60. № 2. С. 137–144.
7. Бобровицкий Ю.И. Модели и общие волновые свойства двумерных акустических метаматериалов и сред // *Акуст. журн.* 2015. Т. 61. № 3. С. 283–294.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
9. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М.: ИЛ, 1959. 458 с.
10. Бобровицкий Ю.И. Особенности дисперсии нормальных волн в периодических структурах // *Акуст. журн.* 2011. Т. 57. № 4. С. 438–442.
11. Исакович М.А. Общая акустика. Гл. 12. М.: Наука, 1973. 496 с.
12. Тютекин В.В., Викторова Р.Н. Физические основы создания звукопоглощающих материалов // *Акуст. журн.* 1998. Т. 44. № 3. С. 331–336.
13. Cottle R.W. Manifestations of the Schur complement // *Linear Algebra and its Applications.* 1974. V 8. № 3. P. 189–211.
14. Ewins D.J. Modal Testing Theory: Practice and Applications. Baldock, UK: Research Studies Press, 2000.
15. Lamb H. On group velocity // *Proc. London Math. Soc., Ser. 2.* 1904. V. 1. № 849. P. 473–479.
16. Inman D. Damping models / *Encyclopedia of Vibration.* Ed. Brown S. San Diego, Ca: Academic Press, 2002. V. 1. P. 335–342.
17. Ляв А. Математическая теория упругости. М.: НКТП СССР, 1935. 674 с.