

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.2

РАССЕЯНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА СФЕРИЧЕСКОМ РАССЕИВАТЕЛЕ, НАХОДЯЩЕМСЯ ВБЛИЗИ ЛЕДОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

© 2016 г. Н. С. Григорьева^{*,**}, М. С. Куприянов^{*},
Д. А. Михайлова^{***}, Д. Б. Островский^{*,***}

^{*}Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
“ЛЭТИ” им. В.И. Ульянова (Ленина)
197376 Санкт-Петербург, ул. Проф. Попова 5

^{**}Санкт-Петербургский государственный морской технический университет
190008 Санкт-Петербург, ул. Лоцманская 3

E-mail: nsgrig@natalie.spb.su

^{***}ОАО “Концерн “Океанприбор”
197376 Санкт-Петербург, Чкаловский пр. 46

Поступила в редакцию 01.12.2014 г.

Моделируется эхосигнал, отраженный от сферического рассеивателя, находящегося вблизи ледовой поверхности. Однородная водная среда, в которой находится рассеиватель, предполагается полубесконечной. Для коэффициентов рассеяния сферы с помощью метода перевала получены асимптотические формулы, которые могут быть использованы при достаточно больших расстояниях между источником, излучающим сферическую волну, и рассеивателем. Для возникающих интегралов по разрезу с помощью метода скорейшего спуска также получены асимптотические выражения. Численные результаты получены для акустически жесткой сферы и ледовой сферы. Плотность ледовой сферы и скорость продольных волн в ней совпадают с аналогичными параметрами ледового покрова. В широком диапазоне частот 8–12 кГц сравниваются эхосигналы, вычисленные для двух моделей среды: водного полупространства, граничащего с ледовым полупространством, и покрытого льдом однородного волновода с жидким дном в предположении, что излучатель, помещенный в водный слой, является направленным. Показано, что в большом интервале расстояний между источником и рассеивающей сферой модель полупространства достаточно точно описывает эхосигнал, в то же время давая существенную экономию во времени вычисления (примерно в 10 раз для рассматриваемого в статье волновода глубиной 200 м с песчаным дном).

Ключевые слова: рассеяние акустических волн, эхосигнал, сферический рассеиватель, ледовая поверхность, метод перевала, функция формы акустического рассеяния.

DOI: 10.7868/S0320791916010044

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] рассматривалась задача вычисления эхосигнала от сферического рассеивателя, помещенного в однородный водный слой, ограниченный снизу жидким дном, а сверху — ледовым полупространством, которое также предполагалось жидкой средой. Если расстояние между направленным излучателем и рассеивателем таково, что рассеиватель, находящийся вблизи ледовой поверхности, еще не засвечивается отраженными от дна лучами, то можно предположить, что эхосигнал будет достаточно точно описываться моделью среды, состоящей из двух полупространств: ледового и водного. В настоящей работе рассматривается именно такая модель. При этом предполагается, что рассеиватель имеет сферическую форму и представляет собой акустически жесткое или жидкое тело, свойства

которого совпадают со свойствами ледового покрова, а точечный источник сигнала частоты 8–12 кГц и приемник эхосигнала размещены в одной точке.

В общем случае в задачах распространения акустических сигналов в покрытых льдом морских акваториях ледовый покров моделируется как упругий слой конечной толщины (см., например, [2, 3]). Однако на рассматриваемых в данной работе частотах 8–12 кГц акустические волны в ледовом слое быстро затухают (см. [4], с. 215–220). Поэтому можно пренебречь волнами, отразившись от верхней кромки льда и возвратившись в водный слой, в том числе волнами, претерпевшими двойное преобразование: продольные → поперечные → продольные и т.д., и рассматривать ледовый слой как жидкое полупространство. Гладкая поверхность нижней кромки льда характерна для молодых льдов, в том числе арктических.

Для нахождения эхосигнала от сферического рассеивателя в работе используется метод, предложенный в [5], важным этапом в реализации которого является вычисление коэффициентов рассеяния сферы. Эти коэффициенты описываются несобственными интегралами с бесконечными промежутками интегрирования, подынтегральные функции которых на рассматриваемых высоких частотах и больших расстояниях между источником и рассеивающей сферой являются быстро осциллирующими и медленно убывающими. Кроме того, на каждой из частот требуется вычислить несколько тысяч коэффициентов рассеяния, что приводит к большим временным затратам при вычислении эхосигнала.

В данной работе для коэффициентов рассеяния сферы с помощью метода перевала получены асимптотические формулы, которые могут быть использованы при достаточно больших расстояниях между источником и рассеивателем. Сравнение эхосигналов, вычисленных для модели среды, состоящей из ледового и водного полупространств, и водного слоя, ограниченного снизу жидким дном, а сверху — ледовым полупространством, показывает, что в большом интервале расстояний между источником и рассеивателем модель полупространства достаточно точно описывает эхосигнал, в то же время давая существенную экономию времени его вычисления.

ТЕОРИЯ

Рассмотрим сферический отражатель радиуса a , помещенный в покрытое льдом водное полупространство. Ледовый покров предполагается жидкой средой, характеризующейся своей плотностью ρ_l и скоростью распространения продольных волн c_l . Скорость звука в воде и плотность воды обозначим c_0 и ρ_0 соответственно. Отражатель представляет собой акустически жесткое или жидкое тело, свойства которого могут совпадать со свойствами ледового покрова.

Начало координат поместим в центр сферы, направив ось Oz вертикально вверх, как показано на рис. 1. Расстояние от центра сферы до ледового покрова равно d . Точечный источник, излучающий сферическую волну с циклической частотой ω , находится в точке M . Декартовыми и сферическими координатами точки M являются $(0, y, z)$ и $(r, \theta, 0)$ соответственно; $y > 0$. Наряду с углом θ будем рассматривать также угол $\psi = \pi - \theta$ (см. рис. 1). Положение приемника совпадает с положением источника.

В случае, когда сферический рассеиватель находится рядом с границей раздела воздух/вода, решение задачи рассеяния может быть получено посредством перехода к системе двух рассеивающих сфер: исходной сферы и ее образа, отражен-

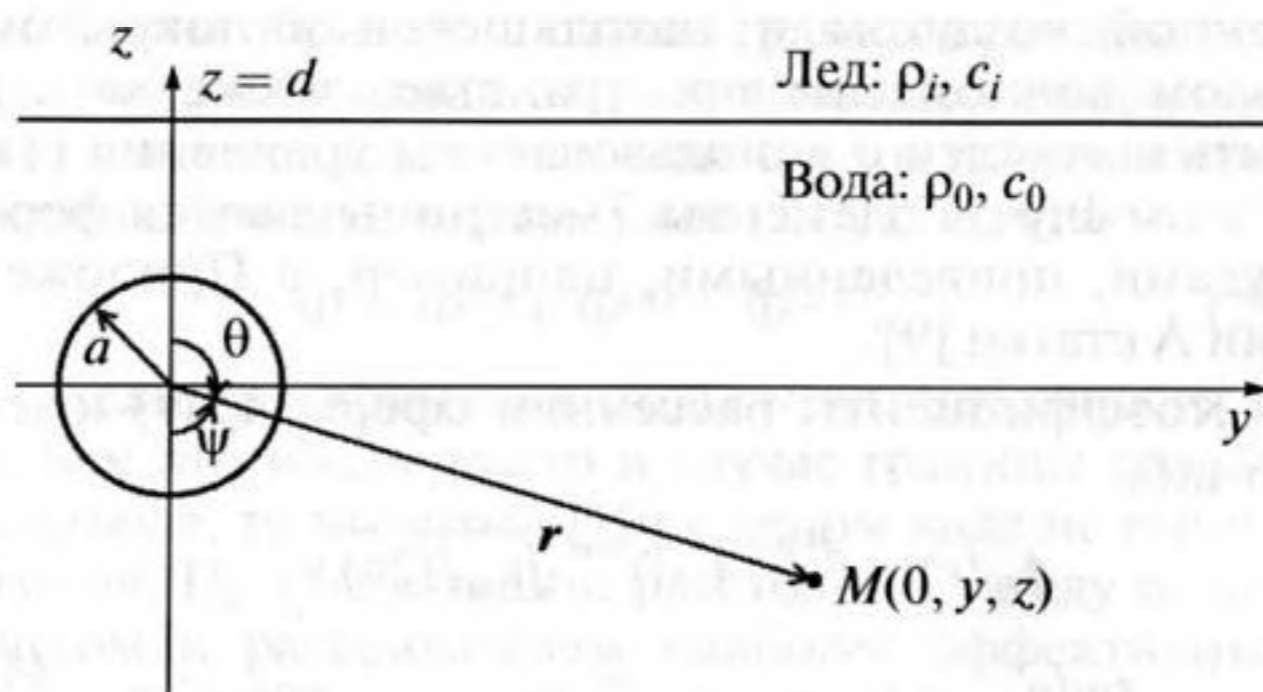


Рис. 1. Сферический рассеиватель, помещенный в покрытое льдом водное полупространство.

ного от границы (см., например, [6–8]). Однако этот подход не может быть обобщен на случай, когда коэффициент отражения от границы раздела двух сред зависит от волнового числа, как это имеет место для границы раздела ледового и водного полупространств.

Воспользуемся методом, предложенным в [5]. Согласно этому методу, акустический потенциал эхосигнала от рассеивателя, находящегося в покрытом льдом водном полупространстве, может быть представлен в виде

$$\Phi = -\frac{i}{k_0} \sum_{l=0}^{\infty} T_l \sum_{m=0}^l A_{ml}(\mathbf{r}) C_{ml}(\mathbf{r}). \quad (1)$$

При этом потенциал падающей волны в начале координат в отсутствие рассеивателя дается формулой $\Phi_{inc} = \exp(ik_0 r)/(4\pi r)$. В (1) $k_0 = \omega/c_0$ — волновое число в воде, T_l — элементы диагональной T -матрицы сферы, которые находятся из граничных условий на поверхности сферы. Для акустически жесткой сферы

$$T_l = -j_l'(k_0 a) / h_l^{(1)'}(k_0 a). \quad (2)$$

В случае жидкой сферы, плотность которой ρ , а скорость продольных волн c ,

$$T_l = \frac{k_0 j_l'(k_0 a) j_l(ka) - \frac{\rho_0}{\rho} k j_l'(ka) j(k_0 a)}{-k_0 h_l^{(1)'}(k_0 a) j_l(ka) + \frac{\rho_0}{\rho} k h_l^{(1)'}(k_0 a) j_l'(ka)}. \quad (3)$$

В формулах (2), (3) $k = \omega/c$ — волновое число для сферы, $h_l^{(1)}(x) = \sqrt{\pi/(2x)} H_{l+1/2}^{(1)}(x)$ — сферическая функция Ханкеля 1-го рода, $j_l(x) = \sqrt{\pi/(2x)} J_{l+1/2}(x)$ — сферическая функция Бесселя, штрих у сферических функций обозначает производную по всему аргументу.

Акустический потенциал эхосигнала, отраженного упругой сферической оболочкой, напол-

ненной воздухом и находящейся в покрытом льдом водном полупространстве, также может быть вычислен с использованием уравнения (1). В этом случае элементы T -матрицы даются формулами, приведенными, например, в Приложении А статьи [9].

Коэффициенты рассеяния сферы $A_{ml}(\mathbf{r})$ имеют вид

$$A_{ml}(r) = i^{l-m+1} (-1)^{m+l} \sqrt{\varepsilon_m / (2\pi)} \times \int_0^\infty \frac{q dq}{h} J_m(qy) \Pi_l^m(h/k_0) \left[e^{ihz} + \eta(q) e^{ih(2d-z)} \right] \quad (4)$$

В (4) J_m – цилиндрическая функция Бесселя порядка m , q и $h(q) = \sqrt{k_0^2 - q^2}$ – горизонтальная и вертикальная компоненты волнового вектора в воде, $\varepsilon_0 = 1$ и $\varepsilon_m = 2$ для $m \geq 1$, $\eta(q)$ – коэффициент отражения от границы раздела вода/ледовое полупространство [10]:

$$\eta(q) = \frac{\rho_i h - \rho_0 h_i}{\rho_i h + \rho_0 h_i}, \quad (5)$$

где $h_i = h_i(q) = \sqrt{k_i^2 - q^2}$, $k_i = \omega/c_i$ – волновое число ледового полупространства. При этом предполагается, что на комплексной q -плоскости $\text{Im} h_i(q) \geq 0$.

Через $\Pi_l^m(x)$ в уравнении (4) обозначена нормированная присоединенная функция Лежандра, которая связана с присоединенной функцией Лежандра $P_l^m(x)$ порядка l и ранга m соотношением (см., например, [11])

$$\Pi_l^m(x) = \sqrt{\frac{2l+1(l-m)!}{2(l+m)!}} P_l^m(x). \quad (6)$$

Если эхосигнал от отражателя вычисляется с учетом многократного рассеяния, то коэффициенты C_{ml} в уравнении (1) находятся из линейной системы алгебраических уравнений [5]

$$C_{ml}(\mathbf{r}) = A_{ml}(\mathbf{r}) + \sum_{n=0}^{n_{\max}} R_{ln}^m T_n C_{mn}(\mathbf{r}),$$

где $n_{\max} = l_{\max} + 1$ – число слагаемых в (1), которые надо просуммировать, $0 \leq m \leq \min(l, n)$,

$$R_{ln}^m = \frac{2}{k_0} i^{l+n+1} (-1)^{l+n} \int_0^\infty \frac{q dq}{h} \Pi_l^m(h/k_0) \Pi_n^m(h/k_0) \eta(q) e^{2ihd}$$

– коэффициенты преобразования l -й сферической гармоники в гармонику с номером n . В действительности, чтобы найти коэффициенты $C_{ml}(\mathbf{r})$, надо на каждой фиксированной частоте решить систему $l_{\max} + 1$ уравнений с $l_{\max} + 1$ неизвестными для $m = 0$, систему l_{\max} уравнений с l_{\max} неизвестными при $m = 1$ и т.д. и, наконец, уравнение с одним неизвестным $C_{l_{\max} l_{\max}}$ при $m = l_{\max}$. При этом коэффициенты R_{ln}^m являются интегралами с бесконечным промежутком интегрирования и быстро

осциллирующими подынтегральными функциями. В данной работе воспользуемся приближением однократного рассеяния, когда $C_{ml}(\mathbf{r}) = A_{ml}(\mathbf{r})$. Учет влияния многократного рассеяния требует отдельного рассмотрения, выходящего за рамки работы.

Сравнение эхосигналов от упругой сферической оболочки, вычисленных при $0 < k_0 a \leq 55$ и небольших расстояниях между источником и сферой с учетом многократного рассеяния и в приближении однократного рассеяния, было проведено в [12]. В этой работе водная среда предполагалась полупространством, а оболочка, наполненная воздухом, располагалась у песчаного дна.

Количество слагаемых, которые надо просуммировать в (1), определяется тем, что коэффициенты T_l как для акустически жесткой, так и для жидкой сферы, начинают экспоненциально убывать при $l > k_0 a \gg 1$. В [13] для упругих оболочек была получена формула

$$\max l = l_{\max} = \text{Entier}[k_0 a + 4.05(k_0 a)^{1/3}] + 3, \quad (7)$$

где $\text{Entier}(y)$ – целая часть y . Проведенные вычисления показали, что во всех рассмотренных ниже моделях правило (7) также применимо. Таким образом, на частоте 10 кГц и при $c_0 = 1500$ м/с при вычислении акустического потенциала сферического отражателя радиуса $a = 2$ м необходимо вычислить 5460 коэффициентов рассеяния сферы, которые определяются формулой (4) и представляют собой интегралы от быстро осциллирующих функций по бесконечному промежутку интегрирования. Ниже с помощью метода перевала для интегралов (4) будут получены асимптотические формулы, которые могут быть использованы при достаточно больших расстояниях между источником и отражателем.

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАССЕЯНИЯ СФЕРЫ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ПЕРЕВАЛА

Представим коэффициент рассеяния сферы $A_{ml}(\mathbf{r})$ в виде суммы двух слагаемых:

$$A_{ml}(\mathbf{r}) = A_{ml}^{(f)}(\mathbf{r}) + A_{ml}^{(d)}(\mathbf{r}), \quad (8)$$

$$A_{ml}^{(f)} = i^{l-m+1} (-1)^{m+l} \sqrt{\varepsilon_m / (2\pi)} \times \int_0^\infty \frac{q dq}{h} J_m(qy) e^{ihz} \Pi_l^m(h/k_0), \quad (9)$$

$$A_{ml}^{(d)} = i^{l-m+1} (-1)^{m+l} \sqrt{\varepsilon_m / (2\pi)} \times \int_0^\infty \frac{q dq}{h} J_m(qy) \eta(q) e^{ih(2d-z)} \Pi_l^m(h/k_0). \quad (10)$$

Интеграл $A_{ml}^{(f)}(\mathbf{r})$ может быть вычислен в явном виде [5]:

$$A_{ml}^{(f)}(\mathbf{r}) = ik_0 \sqrt{\varepsilon_m / (2\pi)} (-1)^{l+m} h_l^{(1)}(k_0 r) \Pi_l^m(\cos \psi) \quad (11)$$

(см. рис. 1). Вклад этого слагаемого в эхосигнал (1) дает

$$\Phi^{(f)} = -\frac{i}{k_0} \sum_{l=0}^{l_{\max}} T_l \sum_{m=0}^l [A_{ml}^{(f)}(\mathbf{r})]^2. \quad (12)$$

Используя теорему сложения для присоединенных функций Лежандра [14], сумму по m можно записать в виде

$$\sum_{m=0}^l [A_{ml}^{(f)}(\mathbf{r})]^2 = -k_0^2 \frac{2l+1}{4\pi} [h_l^{(1)}(k_0 r)]^2. \quad (13)$$

Таким образом, с учетом формул (12) и (13),

$$\Phi^{(f)} = \frac{ik_0}{4\pi} \sum_{l=0}^{l_{\max}} (2l+1) [h_l^{(1)}(k_0 r)]^2 T_l, \quad (14)$$

т.е. вклад $\Phi^{(f)}$ в Φ описывает эхосигнал от рассеивающей сферы, находящейся в изотропном водном пространстве (см., например, [15]).

Интеграл (10) вычисляется в явном виде, только если коэффициент отражения $\eta(q)$ не зависит от q . Например, в случае границы воздух/вода, когда $\eta(q) = -1$, имеем

$$A_{ml}^{(d)}(\mathbf{r}) = -ik_0 \sqrt{\varepsilon_m / (2\pi)} h_l^{(1)}(k_0 r_d) \Pi_l^m(\cos \psi_d), \quad (15)$$

где

$$r_d = \sqrt{y^2 + (2d - z)^2}, \quad \psi_d = \arctg\left(\frac{y}{2d - z}\right), \quad \cos \psi_d = (2d - z)/r_d. \quad (16)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \Phi^{(d)} &= -\frac{i}{k_0} \sum_{l=0}^{l_{\max}} T_l \sum_{m=0}^l [A_{ml}^{(d)}(\mathbf{r})]^2 = \\ &= \frac{ik_0}{4\pi} \sum_{l=0}^{l_{\max}} (2l+1) [h_l^{(1)}(k_0 r_d)]^2 T_l, \end{aligned} \quad (17)$$

т.е. вклад $\Phi^{(d)}$ в Φ описывает эхосигнал от образа рассеивающей сферы, отраженной от границы раздела воздух/вода.

Наконец, для слагаемых $\Phi^{(f,d)}$,

$$\Phi^{(f,d)} = -\frac{2i}{k_0} \sum_{l=0}^{l_{\max}} T_l \sum_{m=0}^l A_{ml}^{(f)}(\mathbf{r}) A_{ml}^{(d)}(\mathbf{r}), \quad (18)$$

используя теорему сложения для присоединенных функций Лежандра [14], получаем

$$\begin{aligned} \Phi^{(f,d)} &= -\frac{ik_0}{2\pi} \sum_{l=0}^{l_{\max}} (2l+1) T_l h_l^{(1)}(k_0 r) \times \\ &\times h_l^{(1)}(k_0 r_d) P_l\left(\frac{y^2 + 2dz - z^2}{rr_d}\right), \end{aligned} \quad (19)$$

где $P_l(x)$ – многочлен Лежандра степени l .

Таким образом, в случае границы раздела воздух/вода эхосигнал от рассеивающей сферы может быть представлен в виде суммы потенциалов, определяемых по формулам (14), (17), (19):

$$\Phi = \Phi^{(f)} + \Phi^{(d)} + \Phi^{(f,d)}. \quad (20)$$

Если коэффициент отражения $\eta(q)$ зависит от q , как это имеет место в случае границы раздела лед/вода, то интеграл (10) в явном виде не вычисляется. При небольшом расстоянии между источником и рассеивателем наиболее эффективным способом вычисления интеграла (10) является метод комплексных источников (см., например, [12, 16, 17]), который основан на аппроксимации коэффициента отражения (5) суммой экспонент:

$$\eta(q) \approx \sum_{j=0}^J b_j \exp[\beta_j h(q)], \quad (21)$$

где $\beta_0 = 0$, $b_0 = (\rho_i - \rho_0)/(\rho_i + \rho_0)$; при $j \geq 1$ числа b_j и β_j – комплексные, причем $\text{Im} \beta_j > 0$. В результате интеграл (10) представляется в виде суммы интегралов, которые вычисляются в явном виде.

В данной статье мы рассмотрим еще один способ вычисления коэффициентов рассеяния сферы, который может быть использован при достаточно больших расстояниях r .

В интеграле (10) сделаем замену переменной $q = k_0 \sin \alpha$. Если $q = 0$, то $\alpha = 0$. При $q \rightarrow +\infty$ имеем $\alpha \rightarrow \pi/2 - i\infty$. Поскольку $h = \sqrt{k_0^2 - q^2} = k_0 \cos \alpha$, то

$$\eta(q) = U(\alpha) = \frac{\chi \cos \alpha - \sqrt{n^2 - 1 + \cos^2 \alpha}}{\chi \cos \alpha + \sqrt{n^2 - 1 + \cos^2 \alpha}}. \quad (22)$$

Здесь $n = k_i/k_0 = c_0/c_i$ – показатель преломления на границе раздела лед/вода, $\chi = \rho_i/\rho_0$ – отношение плотностей ледового и водного полупространств. Таким образом, в терминах переменной интегрирования α интеграл (10) будет иметь вид

$$\begin{aligned} A_{ml}^{(d)}(\mathbf{r}) &= a_{ml} \frac{k_0}{2} \int_{\Gamma_0} [H_m^{(1)}(k_0 y \sin \alpha) + H_m^{(2)}(k_0 y \sin \alpha)] \times \\ &\times U(\alpha) \sin \alpha \Pi_l^m(\cos \alpha) e^{ik_0(2d-z)\cos \alpha} d\alpha, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$a_{ml} = i^{l-m+1} (-1)^{m+1} \sqrt{\varepsilon_m / (2\pi)}. \quad (24)$$

При получении формулы (23) было использовано свойство функции Бесселя (см., например, [14]) $J_m(u) = [H_m^{(1)}(u) + H_m^{(2)}(u)]/2$, где $H_m^{(1)}$ и $H_m^{(2)}$ – функции Ханкеля 1-го и 2-го рода. Контур интегрирования Γ_0 в (23) идет вдоль вещественной оси $\text{Re} \alpha$ от 0 в точку $\pi/2$, а затем вдоль прямой $\alpha = \pi/2 - i\text{Im} \alpha$, $0 \leq \text{Im} \alpha < +\infty$, параллельной мнимой оси $\text{Im} \alpha$.

Представим интеграл (23) в виде суммы двух интегралов и во втором интеграле, содержащем

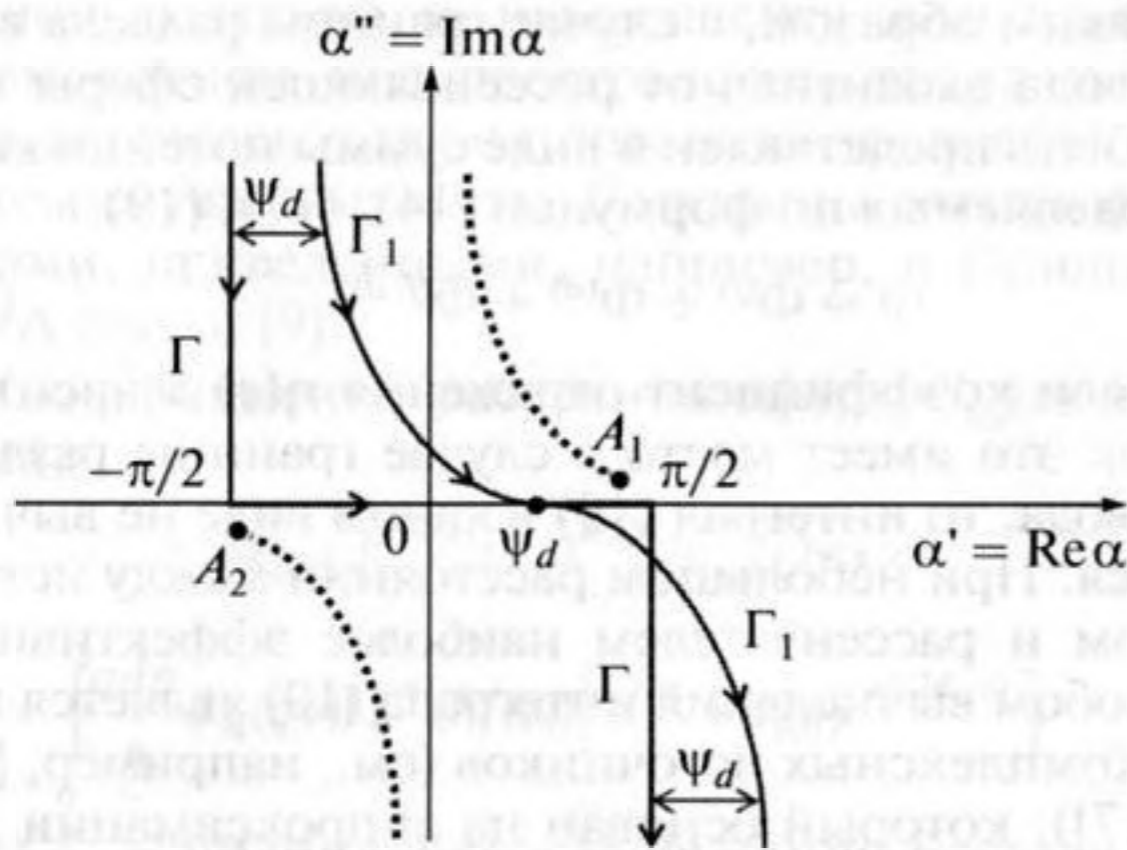


Рис. 2. Контур интегрирования Γ и перевальный контур Γ_1 при $\text{Re } \alpha_* > \psi_d$, $\alpha_* = \arcsin(c_0/c_i)$. Линии из точек показывают разрезы, проведенные из точек ветвления A_1 и A_2 .

функцию Ханкеля $H_m^{(2)}$, сделаем замену переменной $\alpha = -\alpha_1$. Далее воспользуемся тем, что

$$U(\alpha) = U(\alpha_1),$$

$$H_m^{(2)}(-k_0 y \sin \alpha) = -e^{i\pi m} H_m^{(1)}(-k_0 y \sin \alpha),$$

а присоединенные функции Лежандра P_l^m , входящие в функцию Π_l^m (см. (6)), определены на соответствующим образом выбранном римановом листе так, чтобы этот выбор согласовывался с формулой [11]

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m},$$

где $P_l(x)$ – полином Лежандра. Меняя, кроме того, в интеграле, содержащем первоначально функцию $H_m^{(2)}$, направление обхода контура на противоположное, получаем

$$A_{ml}^{(d)}(\mathbf{r}) = a_{ml} \frac{k_0}{2} \times \int_{\Gamma} H_m^{(1)}(k_0 y \sin \alpha) U(\alpha) \sin \alpha \Pi_l^m(\cos \alpha) e^{ik_0(2d-z)\cos \alpha} d\alpha, \quad (25)$$

где контур интегрирования Γ показан на рис. 2.

Проанализируем выражение (25) в предположении, что $k_0 y \sin \alpha \gg 1$. Воспользуемся асимптотическим представлением функции Ханкеля [14]

$$H_m^{(1)}(u) \approx \sqrt{2/(\pi u)} e^{i[u - \pi(m+1/2)/2]} \left(1 + i \frac{4m^2 - 1}{8u} + \dots \right),$$

которое справедливо, если $m^2/u \ll 1$. Тогда интеграл (25) примет вид

$$A_{ml}^{(d)}(\mathbf{r}) \approx a_{ml} \sqrt{k_0/(2\pi y)} e^{i\pi(m+1/2)/2} \times \int_{\Gamma} G(\alpha) \left[1 + i \frac{4m^2 - 1}{8k_0 y \sin \alpha} \right] e^{ik_0[y \sin \alpha + (2d-z)\cos \alpha]} d\alpha, \quad (26)$$

где

$$G(\alpha) = U(\alpha) \sqrt{\sin \alpha} \Pi_l^m(\cos \alpha),$$

а экспоненту в подынтегральном выражении (26) можно записать в форме $\exp[ik_0 r_d \cos(\alpha - \psi_d)]$, если учесть равенства, представленные в (16):

$$2d - z = r_d \cos \psi_d, \quad y = r_d \sin \psi_d.$$

Поскольку, по предположению, $k_0 y \gg 1$, интеграл (26) целесообразно анализировать при помощи метода перевала (см., например, [10]). Точкой перевала будет, очевидно, $\alpha = \psi_d$. Перевальный путь Γ_1 пересекает вещественную ось $\text{Re } \alpha$ в точке ψ_d под углом 45° и уходит с одной стороны в $-\pi/2 + \psi_d + i\infty$, а с другой – в $\pi/2 + \psi_d - i\infty$ (см. путь Γ_1 на рис. 2).

Прежде чем приступить к оценке интеграла по пути Γ_1 , рассмотрим возможность замены пути интегрирования Γ на Γ_1 . Для этого необходимо проанализировать, какие особые точки могут встретиться на плоскости α при непрерывной деформации Γ в Γ_1 . Основное внимание при этом следует обратить на особые точки, привносимые в подынтегральное выражение интеграла (26) функцией $U(\alpha)$ (см. (22)), которая содержит корень $\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$, вследствие чего точки $\alpha = \pm \arcsin n$ будут точками ветвления. Коэффициент отражения $U(\alpha)$ при каждом α может принимать два значения, в зависимости от того, какой из знаков выбран. Удобно говорить, как это всегда делают (см., например, [10]), о двух листах плоскости α , образующих двулистную риманову поверхность. На одном листе (“верхнем”) будем предполагать, что $\text{Im} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} > 0$, а на другом (“нижнем”) $\text{Im} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} < 0$. Интегрирование должно проходить по верхнему листу (см., например, [10]).

Оба листа будут соединяться по линиям $\text{Im} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = 0$, начинающимся в точках ветвления $\alpha = \pm \arcsin n$. Проведем вдоль этих линий “разрезы” комплексной плоскости. Уравнение этих разрезов будет

$$n^2 - \sin^2 \alpha = s^2, \quad 0 \leq s^2 < \infty.$$

При $s = 0$ имеем $\sin \alpha = \pm n$ (точки ветвления). При $s^2 \rightarrow \infty$ имеем: $\sin \alpha \rightarrow \pm i\infty$, откуда следует, что $\alpha' = \text{Re } \alpha \rightarrow 0$, $\alpha'' = \text{Im } \alpha \rightarrow \pm\infty$. На рис. 2 изображены две точки ветвления A_1, A_2 и идущие от них разрезы. Точки ветвления сдвинуты с вещественной оси, что соответствует учету поглощения в ледовом полупространстве посредством задания малой отрицательной мнимой добавки к скорости продольных волн во льду: $c_i = \text{Re } c_i + i \text{Im } c_i$, $\text{Im } c_i < 0$ (см., например, [10]).

Входящая в интеграл (26) функция $U(\alpha)$ имеет в качестве особых точек также полюса $\alpha = \alpha_p$, где α_p находятся из уравнения $\chi \cos \alpha_p + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_p} = 0$.

Можно показать, что полюса α_p расположены так, что при деформации контура Γ в Γ_1 они не являются существенными.

Оценка интеграла (26) по методу перевала дает

$$A_{ml}^{(d)}(\mathbf{r}) \approx a_{ml} e^{-i\pi(m+1)/2} \frac{1}{r_d} e^{ik_0 r_d} U(\psi_d) \Pi_l^m(\cos \psi_d) \times \left[1 + i \frac{4m^2 - 1}{8k_0 r_d \sin^2 \psi_d} - \frac{i}{2k_0 r_d} \left(\frac{1}{4} + \frac{G''}{G} \right) \right]_{\alpha=\psi_d}, \quad (27)$$

где штрих означает производную по α , вычисленную при $\alpha = \psi_d$.

Вычисляя производные функции $G(\alpha)$, подставляя их в (27) и учитывая (24), окончательно находим

$$A_{ml}^{(d)}(\mathbf{r}) \approx \sqrt{\varepsilon_m / (2\pi)} e^{-i\pi l / 2} \frac{1}{r_d} e^{ik_0 r_d} \left\{ U(\psi_d) \Pi_l^m(\cos \psi_d) - \frac{i}{2k_0 r_d} \left[2\Pi_l^m(\cos \psi_d) \Lambda(\psi_d) - l(l+1)U(\psi_d) \times \Pi_l^m(\cos \psi_d) + 2 \frac{dU}{d(\cos \alpha)} \right]_{\alpha=\psi_d} \times \left[(l+1) \cos \psi_d \Pi_l^m(\cos \psi_d) - \sqrt{\frac{2l+1}{2l+3}} \sqrt{(l+1)^2 - m^2} \Pi_{l+1}^m(\cos \psi_d) \right] \right\}. \quad (28)$$

Здесь

$$\frac{dU}{d(\cos \alpha)} \Big|_{\alpha=\psi_d} = \frac{2\chi(n^2 - 1)}{\gamma(\chi \cos \psi_d + \gamma)^2}, \quad (29)$$

$n = c_0/c_i$ — показатель преломления для границы раздела вода/лед, $\chi = \rho_i/\rho_0$ — отношение плотностей ледового и водного полупространств, $\gamma = \sqrt{n^2 - 1 + \cos^2 \psi_d}$, функция Λ вычисляется по формуле

$$\Lambda(\psi_d) = \frac{1}{2} \sin^2 \psi_d \frac{d^2 U}{d(\cos \alpha)^2} \Big|_{\alpha=\psi_d} - \cos \psi_d \frac{dU}{d(\cos \alpha)} \Big|_{\alpha=\psi_d} = \frac{\chi(1 - n^2)}{(\chi \cos \psi_d + \gamma)^3 \gamma^3} \times \left[2\chi(n^2 - 1) + 3\chi \cos^2 \psi_d + \gamma \cos \psi_d (2n^2 + 1 - \cos^2 \psi_d) - \chi \cos^4 \psi_d \right]. \quad (30)$$

Объединяя формулы (1), (8), (11) и (28), получаем искомое выражение для эхосигнала от сферического рассеивателя, находящегося в покрытом льдом водном полупространстве.

Если водное полупространство граничит с воздушным, то в (28) надо положить $U = -1$. Тогда

$$A_{ml}^{(d)}(\mathbf{r}) \approx -\frac{1}{r_d} e^{-i\pi l / 2} \times \sqrt{\varepsilon_m / (2\pi)} \Pi_l^m(\cos \psi_d) e^{ik_0 r_d} \left[1 + i \frac{l(l+1)}{2k_0 r_d} \right]. \quad (31)$$

Видно, что выражение (31) совпадает с формулой (15), если в (15) заменить $h_l^{(1)}(k_0 r_d)$ первыми двумя членами асимптотики.

Поскольку при вычислении эхосигнала от сферического рассеивателя l принимает значения от 0 до l_{\max} (см. (7)), асимптотическая формула (28) применима при всех l , если

$$\frac{l_{\max}^2}{2k_0 r_d} \approx \frac{k_0 a^2}{2r_d} \ll 1. \quad (32)$$

Если $\cos \psi_d = (2d - z)/r_d \rightarrow 0$, то $U(\psi_d) \rightarrow -1$, что следует из (22). В этом случае коэффициент рассеяния $A_{ml}^{(d)}$ для границы воздух/вода (31) отличается от соответствующего коэффициента рассеяния для границы лед/вода (28) лишь поправочными членами, содержащими первую и вторую производные от U по $\cos \alpha$. Если эти производные невелики, то эхосигналы для границ раздела воздух/вода и лед/вода мало различаются.

Асимптотическая формула (28) теряет смысл, если $n^2 - \sin^2 \psi_d \rightarrow 0$ (т.е. $\gamma \rightarrow 0$), т.к. при использовании метода перевала предполагается, что коэффициент отражения $U(\alpha)$ является медленно меняющейся функцией. Между тем, если угол ψ_d близок к углу полного внутреннего отражения $\alpha_* = \arcsin n$, то первая и вторая производные от U стремятся к бесконечности (см. (29), (30)). Проведенный анализ $A_{ml}^{(d)}$ является полным, если угол ψ_d меньше угла полного внутреннего отражения α_* . Если $\psi_d > \alpha_*$, необходимо учесть двужначность функции $U(\alpha)$, которая входит в интеграл (23). За счет этой двужначности в выражении для $A_{ml}^{(d)}$ появится дополнительное слагаемое, соответствующее вкладу интеграла по берегам разреза. Формула для этого слагаемого получена в следующем разделе работы.

Асимптотическая формула (28) может быть использована и при моделировании сигнала, отраженного от сферического рассеивателя, находящегося вблизи жидкого дна водоема.

Применение асимптотики (28) существенно сокращает время вычисления интеграла (10) по сравнению с методом комплексных источников, который требует аппроксимации коэффициента отражения суммой экспонент (21), а затем вычисления присоединенных функций Лежандра комплексного аргумента.

Для того чтобы учесть поглощение льда, надо, как отмечалось выше, задать мнимую отрицательную добавку к скорости звука c_i . Пусть, например, для акустического давления с учетом поглощения справедливо выражение $p(r) = p_0 10^{-0.05\beta r}$, где $\beta = 0.1 \dots 1.0$ (кГц м) $^{-1}$. Тогда, переходя к комплексной

где $V(\alpha) = U^+(\alpha) - U(\alpha) = \frac{4\chi \cos \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{(\chi \cos \alpha)^2 - n^2 + \sin^2 \alpha}$.

Интеграл (36) вычисляется методом быстрого спуска аналогично тому, как в [10] вычислялся интеграл, описывающий классическую боковую волну. Для этого путь интегрирования надо деформировать так, чтобы от точки α_* он шел по линии, на которой экспонента под знаком интеграла быстрее всего убывает. Такая линия описывается выражением

$$\text{Re}[\cos(\alpha - \psi_d)] = \text{const}, \quad (37)$$

причем должно выполняться условие $\text{Im}[\cos(\alpha - \psi_d)] > 0$.

Полагая в (37) $\alpha = \alpha_*$, находим, что $\text{const} = \cos(\alpha_* - \psi_d)$. Тем самым уравнение пути быстрого спуска имеет вид

$$\cos(\psi_d - \alpha') \text{ch} \alpha'' = \cos(\alpha_* - \psi_d), \quad (38)$$

где $\alpha = \alpha' + i\alpha''$. Этот путь отмечен на рис. 4 как контур Γ_3 . После деформации пути интегрирования интеграла (36) в контур Γ_3 получаем

$$\hat{A}_{ml}^{(d)} = a_{ml} \sqrt{k_0 / (2\pi r_d \sin \psi_d)} \times \exp \left[ik_0 r_d \cos(\alpha_* - \psi_d) - \frac{i\pi}{2} \left(m + \frac{1}{2} \right) \right] \times \quad (39)$$

$$\times \int_{\Gamma_3} e^{-ik_0 r_d \sin(\psi_d - \alpha') \text{sh} \alpha''} D_m(\alpha) V(\alpha) \Pi_l^m(\cos \alpha) \sqrt{\sin \alpha} d\alpha.$$

Далее, воспользовавшись равенством (38), перейдем в интеграле (39) к новой переменной α'' . Поскольку $k_0 r_d \gg 1$ и Γ_3 – это путь быстрого спуска, под знаком интеграла по α'' существенную роль будут играть только малые значения α'' . Поэтому полагаем, что $\sin(\psi_d - \alpha') \text{sh} \alpha'' \approx \sin(\psi_d - \alpha_*) \alpha''$, $d\alpha \approx i d\alpha''$. В множителе $D_m(\alpha) \Pi_l^m(\cos \alpha) \sqrt{\sin \alpha}$ также можно положить $\alpha \approx \alpha_*$. Однако выражение $\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$ в формуле $V(\alpha)$ надо вычислить более точно, т.к. при $\alpha' = \alpha_*$ этот корень обращается в нуль. Полагая $\alpha' \approx \alpha_*$, $\text{sh} \alpha'' \approx \alpha''$, $\text{ch} \alpha'' \approx 1$, получаем $\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \approx -e^{-i\pi/4} \sqrt{2\alpha'' n \cos \alpha_*}$. Тогда интеграл (39) примет вид

$$\hat{A}_{ml}^{(d)} = -\frac{4n}{\chi} a_{ml} \sqrt{\frac{k_0}{\pi r_d \sin \psi_d \cos \alpha_*}} \times \exp \left[ik_0 r_d \cos(\alpha_* - \psi_d) - i\pi m / 2 \right] \times \quad (40)$$

$$\times D_m(\alpha_*) \Pi_l^m(\cos \alpha_*) \int_0^\infty e^{-k_0 r_d \sin(\psi_d - \alpha_*) \alpha''} \sqrt{\alpha''} d\alpha''.$$

Вводя новую переменную $\sqrt{\alpha''} = s$ и принимая во внимание, что $\int_0^\infty e^{-\Omega s^2} s^2 ds = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\Omega^3}}$, получаем

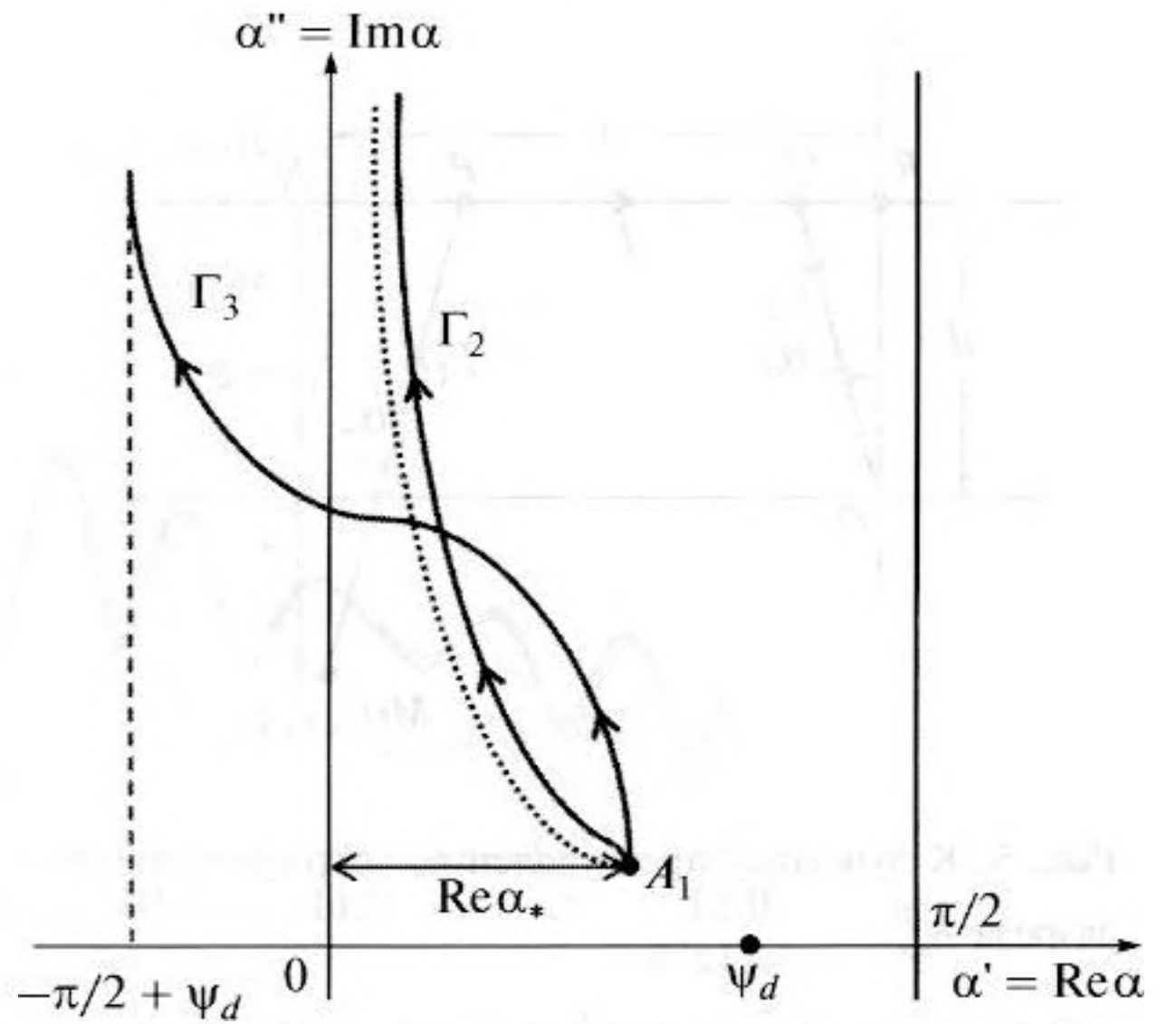


Рис. 4. Правый берег контура интегрирования Γ_2 и путь быстрого спада Γ_3 , идущий из точки ветвления A_1 ; $\psi_d > \text{Re} \alpha_*$.

искомое выражение для вклада боковой волны в коэффициент рассеяния сферы:

$$\hat{A}_{ml}^{(d)} = -\frac{2na_{ml}}{\chi k_0 r_d^2 \sqrt{\cos \alpha_* \sin \psi_d}} \times \frac{1}{[\sin(\alpha_* - \psi_d)]^{3/2}} \exp \left[ik_0 r_d \cos(\alpha_* - \psi_d) - i\pi m / 2 \right] D_m(\alpha_*) \Pi_l^m(\cos \alpha_*), \quad (41)$$

где множители a_{ml} имеют вид (24), $D_m(\alpha_*) = 1 + i \frac{4m^2 - 1}{8k_0 r_d n \sin \psi_d}$, а нормированная присоединенная функция Лежандра Π_l^m определяется соотношением (6).

Формула (41) теряет смысл, если $n \rightarrow 1$, т.к. $\cos \alpha_* = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_*} = \sqrt{1 - n^2}$, и если $\psi_d \rightarrow \alpha_*$. Эти случаи требуют отдельного рассмотрения. Аналогично тому, как это было получено в [10] для классической боковой волны, можно показать, что формулы (31) и (41) для коэффициентов рассеяния справедливы при условии, что $k_0 r_d (\psi_d - \alpha_*)^2 \gg 1$.

Вклад интеграла по разрезу является существенным, в частности, при импульсном излучении, когда сигнал, ему соответствующий, отделяется по времени от других волн.

Покажем, что, как и в случае классической боковой волны, интеграл вдоль разреза $\hat{A}_{ml}^{(d)}$ связан с распространением волны вдоль границы ледового полупространства на участке L (см. рис. 5). Дей-

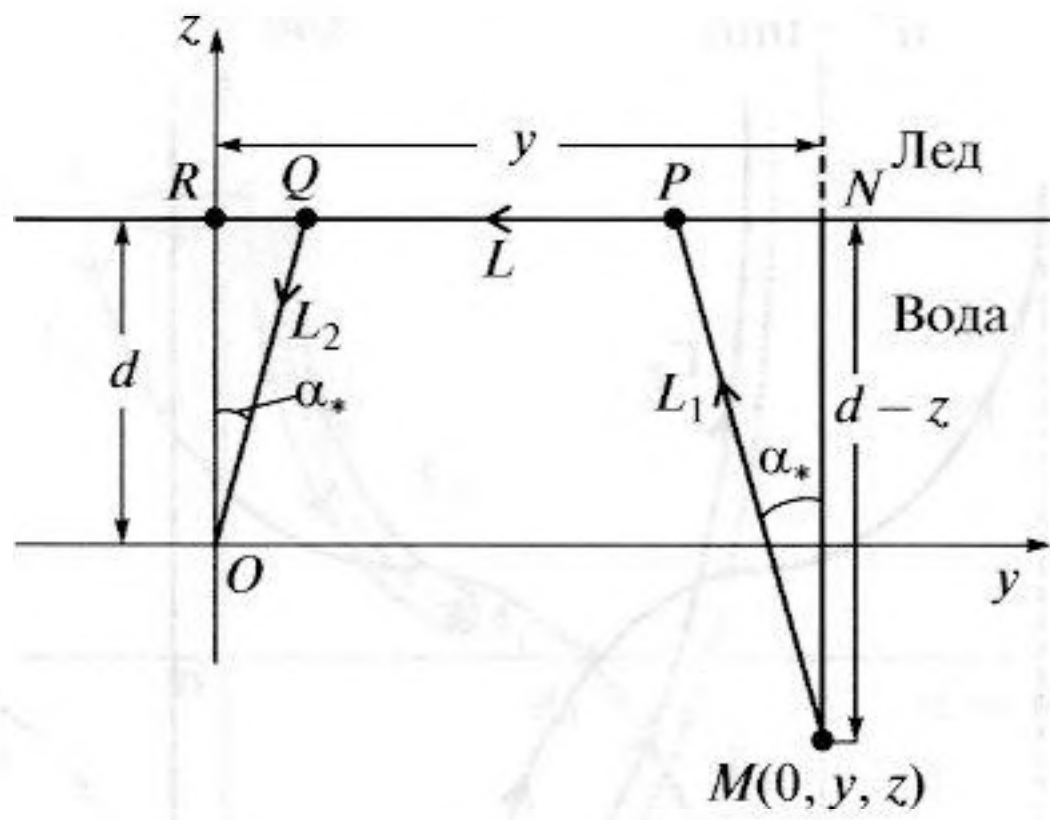


Рис. 5. К лучевому представлению интеграла вдоль разреза $\hat{A}_{ml}^{(d)}$.

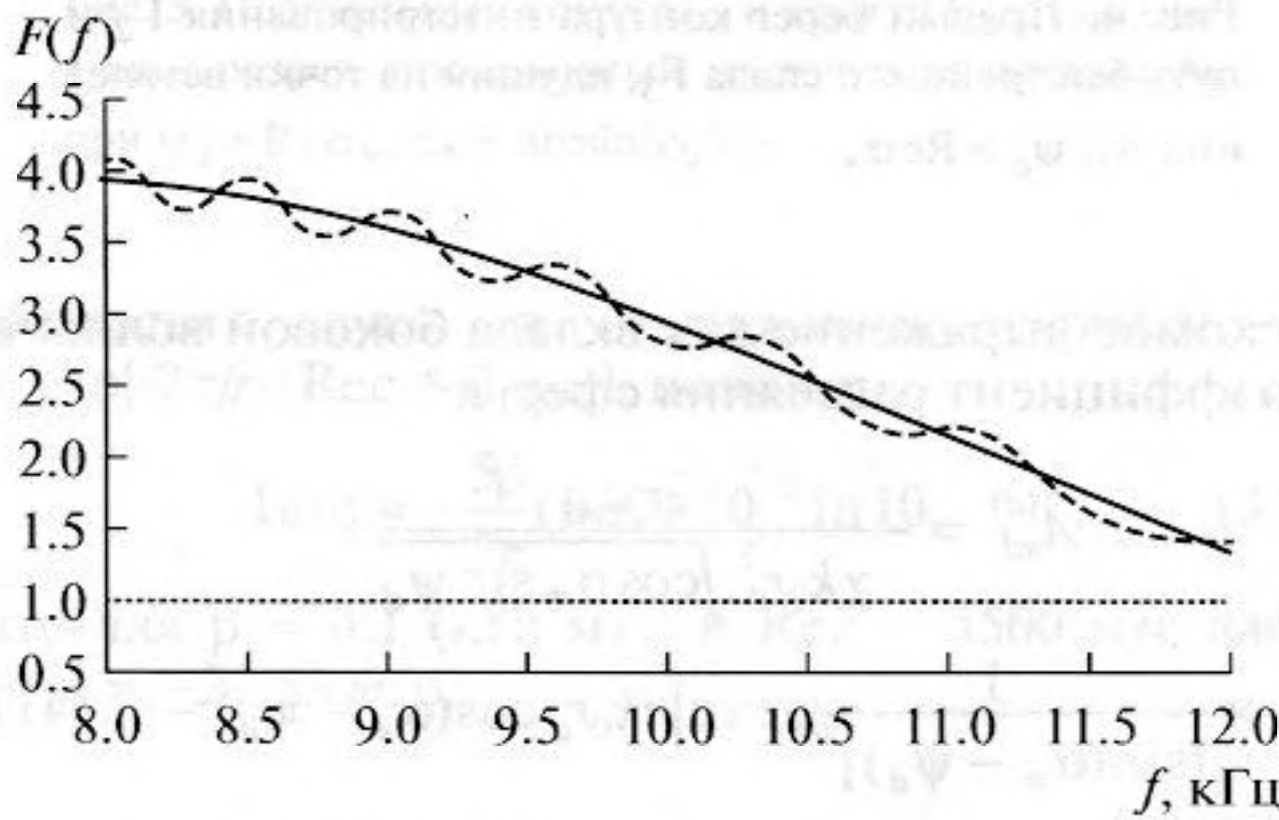


Рис. 6. Функция формы для эхосигнала, отраженного от акустически жесткой сферы радиуса $a = 2$ м, находящейся у границы раздела водного и ледового полупространств (сплошная линия) и в покрытом льдом волноводе с песчаным дном (пунктир). Линия из точек показывает функцию формы для акустически жесткой сферы радиуса $a = 2$ м, расположенной в изотропном водном пространстве, $r = 1$ км.

ствительно, рассмотрим фазовую функцию в формуле (41):

$$k_0 r_d \cos(\alpha_* - \psi_d) = k_0 r_d [\cos \alpha_* \cos \psi_d + \sin \alpha_* \sin \psi_d]. \quad (42)$$

Воспользовавшись формулами (16) для $\cos \psi_d$ и $\sin \psi_d$, получаем

$$k_0 r_d \cos(\alpha_* - \psi_d) = k_0 [(2d - z) \cos \alpha_* + y \sin \alpha_*]. \quad (43)$$

Длину участка L (см. рис. 5) можно представить в виде

$$L = y - RQ - PN = y - (2d - z) \operatorname{tg} \alpha_*,$$

где $RQ = L_2 \sin \alpha_*$, $PN = L_1 \sin \alpha_*$. Тогда $k_0 r_d \cos(\alpha_* - \psi_d) = k_0(L_1 + L_2) + k_i L$, т.е. мы получаем набег фазы по лучу $MPQO$ (см. рис. 5), соединяющему излучатель с началом координат. Этот луч состоит из отрезков L_1 и L_2 , по которым волна распространяется в водном полупространстве под углом α_* к нормали к границе, и отрезка L , по которому волна распространяется вдоль границы со скоростью, равной скорости продольной волны c_i в ледовом полупространстве.

Аналогичные рассуждения показывают, что

$$r_d \sin(\psi_d - \alpha_*) = r_d [\sin \psi_d \cos \alpha_* - \cos \psi_d \sin \alpha_*] = [y - (2d - z) \operatorname{tg} \alpha_*] \cos \alpha_* = L \cos \alpha_*. \quad (44)$$

В результате вклад интеграла вдоль разреза (41) может быть записан в виде

$$\hat{A}_{ml}^{(d)} = -\frac{2na_{ml}}{\chi k_0 \sqrt{r_d} (1 - n^2) L^{3/2}} D_m(\alpha_*) \Pi_l^m(\cos \alpha_*) \times \exp[i(k_i L + k_0(L_1 + L_2) - \pi m/2)]. \quad (45)$$

На больших расстояниях, когда $y \gg (2d - z)$, имеем $L \approx y$, откуда видно, что амплитуда $\hat{A}_{ml}^{(d)}$ будет убывать с расстоянием как $1/y^2$. Кроме того, амплитуда интеграла вдоль разреза будет убывать с расстоянием за счет затухания в ледовом полупространстве как $\exp(-L \operatorname{Im} k_i)$.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для исследования зависимости эхосигнала от частоты рассмотрим функцию формы акустического рассеяния, которая определяется как

$$F(f) = \frac{2r}{a} |\Phi(f)/\Phi_{\text{inc}}| = \frac{8\pi r^2}{a} |\Phi(f)|, \quad (46)$$

где $\Phi(f)$ – акустический потенциал эхосигнала в точке приема, а $\Phi_{\text{inc}} = \exp(ik_0 r)/(4\pi r)$ – потенциал падающей волны в начале координат в отсутствие рассеивателя. Давление эхосигнала P в точке приема с учетом поглощения в воде выражается через функцию формы

$$P = p_0 a 10^{-0.1\alpha_0 r} F(f)/(2r^2), \quad (47)$$

где p_0 – значение излученного давления, приведенное к 1 м, а коэффициент поглощения α_0 выражается в децибелах и зависит, вообще говоря, нелинейно от частоты.

Как показано в [18], в изотропной среде давление эхосигнала в точке приема равно

$$P = p_0 R_e 10^{-0.1\alpha_0 r} / (2r^2), \quad (48)$$

где R_e – эквивалентный радиус цели. Если принять $R = a$, то формула (48) отличается от (47) отсутствием множителя – функции формы $F(f)$. Полученное в работе выражение для функции формы

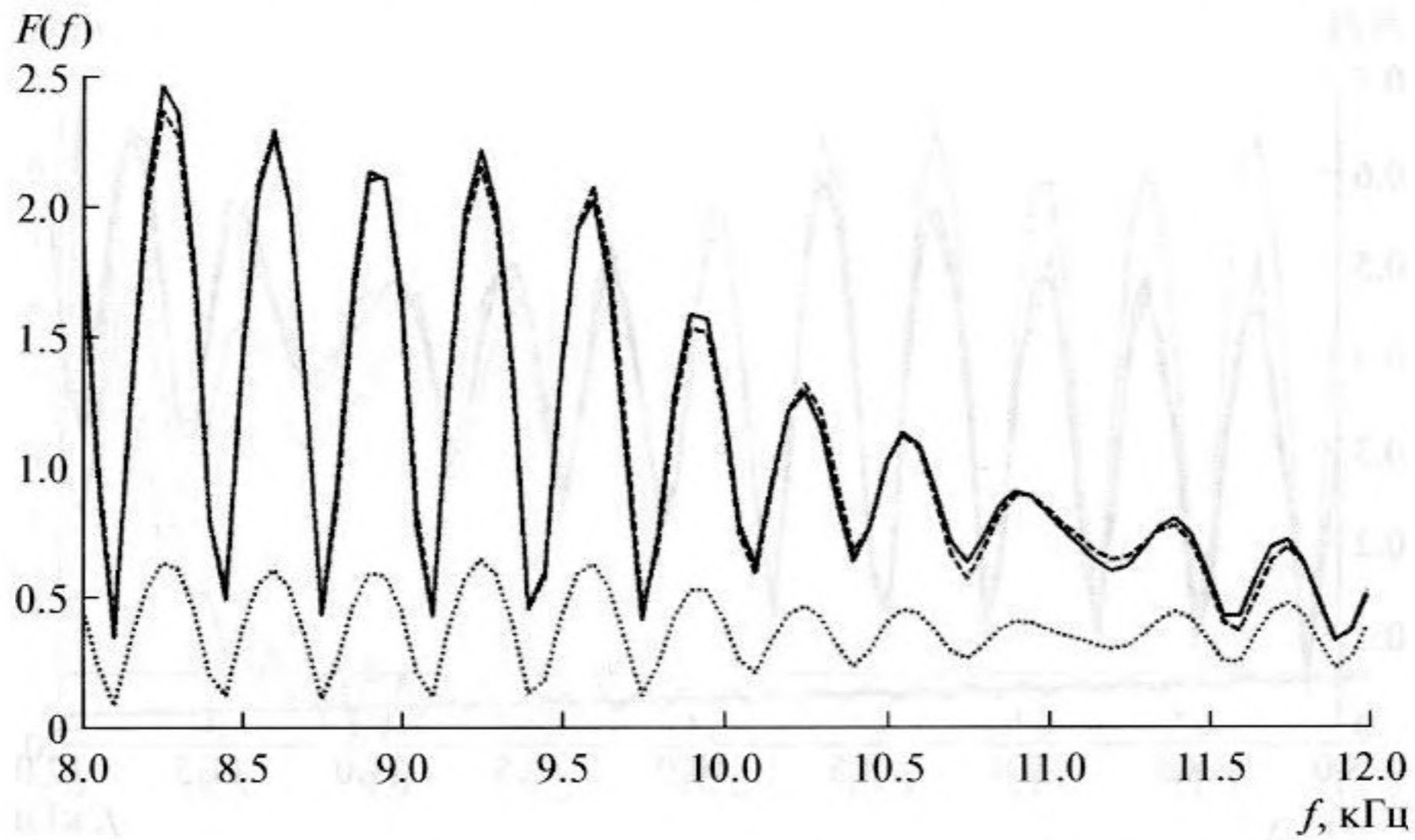


Рис. 7. Функция формы для эхосигнала, отраженного от ледовой поглощающей сферы радиуса $a = 2$ м, находящейся у границы раздела водного и ледового полупространств (сплошная линия) и в покрытом льдом волноводе с песчаным дном (пунктир). Линия из точек показывает функцию формы для ледовой поглощающей сферы радиуса $a = 2$ м, расположенной в изотропном водном пространстве, $r = 1$ км.

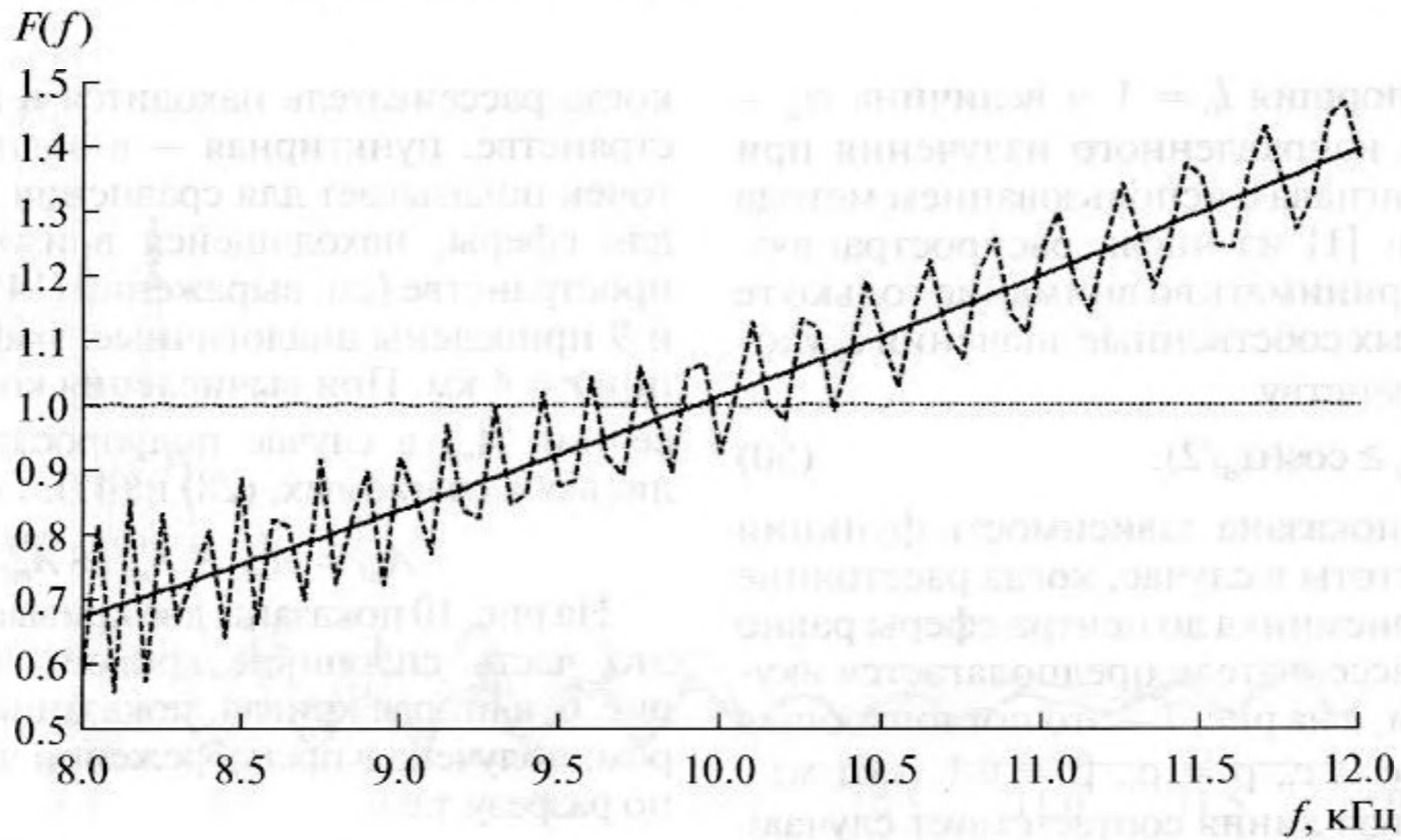


Рис. 8. Функция формы для эхосигнала, отраженного от акустически жесткой сферы радиуса $a = 2$ м, находящейся у границы раздела водного и ледового полупространств (сплошная линия) и в покрытом льдом волноводе с песчаным дном (пунктир). Линия из точек показывает функцию формы для акустически жесткой сферы радиуса $a = 2$ м, расположенной в изотропном водном пространстве, $r = 4$ км.

позволяет вычислить давление эхосигнала в точке приема, учитывая геометрию задачи, частоту излученного сигнала и свойства рассеивателя. Определение термина “функция формы” (в литературе на русском языке используется также термин “форм-функция” (см., например, [19])) обсуждается в [20].

Сравним эхосигналы от рассеивателя, находящегося в водном полупространстве, граничащем с ледовым полупространством, и в покрытом льдом однородном волноводе с жидким дном [1]. Скорость звука в воде $c_0 = 1500$ м/с, плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м³, заглубление источника/приемника 10 м. Центр рассеивающей сферы радиуса $a = 2$ м находится на глубине 5 м. Дно волновода

глубины 200 м предполагается песчаным. Скорость продольных волн в дне и во льду $c_b = 1730$ м/с и $c_i = 3500$ м/с соответственно, плотности — $\rho_b = 2050$ кг/м³ и $\rho_i = 900$ кг/м³, частота меняется в диапазоне 8–12 кГц.

В волноводе излучение происходит в пределах конуса, имеющего угловую ширину α_a . В случае излучающего квадратного поршня, длина стороны которого равна l_0 , угловой раскрыв конуса в градусах на уровне -3 дБ от максимума дается формулой

$$\alpha_a = 51c_0/(fl_0), \quad (49)$$

т.е. совпадает с шириной характеристики направленности. На частоте $f = 10$ кГц при длине сторо-

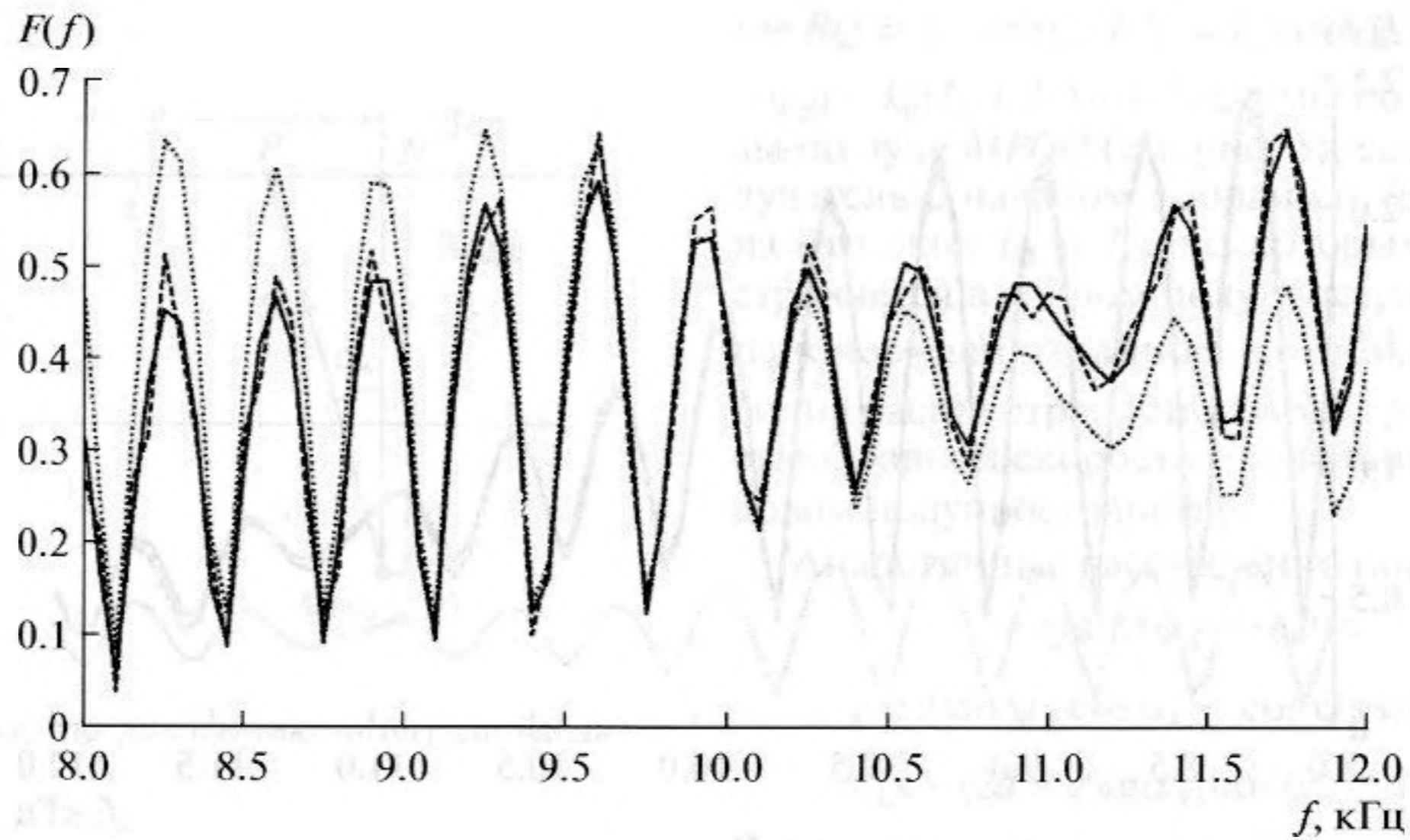


Рис. 9. Функция формы для эхосигнала, отраженного от ледовой поглощающей сферы радиуса $a = 2$ м, находящейся у границы раздела водного и ледового полупространств (сплошная линия) и в покрытом льдом волноводе с песчаным дном (пунктир). Линия из точек показывает функцию формы для ледовой поглощающей сферы радиуса $a = 2$ м, расположенной в изотропном водном пространстве; $r = 4$ км.

ны квадратного поршня $l_0 = 1$ м величина $\alpha_a = 7.65^\circ$. В случае направленного излучения при вычислении эхосигнала с использованием метода нормальных волн [1] из числа распространяющихся мод надо принимать во внимание только те из них, для которых собственные значения ξ_j удовлетворяют неравенству

$$\xi_j \geq \cos(\alpha_a/2). \quad (50)$$

На рис. 6 и 7 показана зависимость функции формы $F(f)$ от частоты в случае, когда расстояние r от источника/приемника до центра сферы равно 1 км. На рис. 6 рассеиватель предполагается акустически жестким, а на рис. 7 — это поглощающая ледовая сфера с $c = c_i$, $\rho = \rho_i$, $\beta = 0.1$ (кГц м) $^{-1}$ (см. (33)). Сплошная линия соответствует случаю,

когда рассеиватель находится в водном полупространстве, пунктирная — в волноводе. Линия из точек показывает для сравнения функцию формы для сферы, находящейся в изотропном водном пространстве (см. выражения (14) и (46)). На рис. 8 и 9 приведены аналогичные графики для дистанции $r = 4$ км. При вычисления коэффициента рассеяния A_{ml} в случае полупространства учитывались оба слагаемых, (28) и (41), т.е.

$$A_{ml} = A_{ml}^{(f)} + A_{ml}^{(d)} + \hat{A}_{ml}^{(d)}. \quad (51)$$

На рис. 10 показаны две кривые. Первая из них — это часть сплошной кривой, изображенной на рис. 6, а вторая кривая, показанная штрих-пунктиром, получена в пренебрежении вкладом интеграла по разрезу, т.е.

$$A_{ml} = A_{ml}^{(f)} + A_{ml}^{(d)}. \quad (52)$$

Если последнюю кривую поместить на рис. 6, то она сливается с кривой, показанной сплошной линией, т.к. разность амплитуд этих двух кривых не превосходит 0.002.

На частоте 10 кГц число l_{\max} , вычисленное по формуле (7), равно 104. Следовательно, в условии (32) применимости асимптотической формулы (28) $l_{\max}^2 / (2k_0 r_d) \approx 0.1$, что дает возможность использовать полученную асимптотику (28) при всех l . При $r = 4$ км условие (32) будет тем более выполнено.

Сравнение сплошной и пунктирной кривых на рис. 6–9 показывает, что при вычислении эхосигнала от рассеивателя, удаленного от источника/приемника на расстояние, не превосходящее 4 км, можно использовать модель полупространства, что дает существенную экономию во времени его вычисления. В частности, для получения графиков, показанных на рис. 9, было затрачено

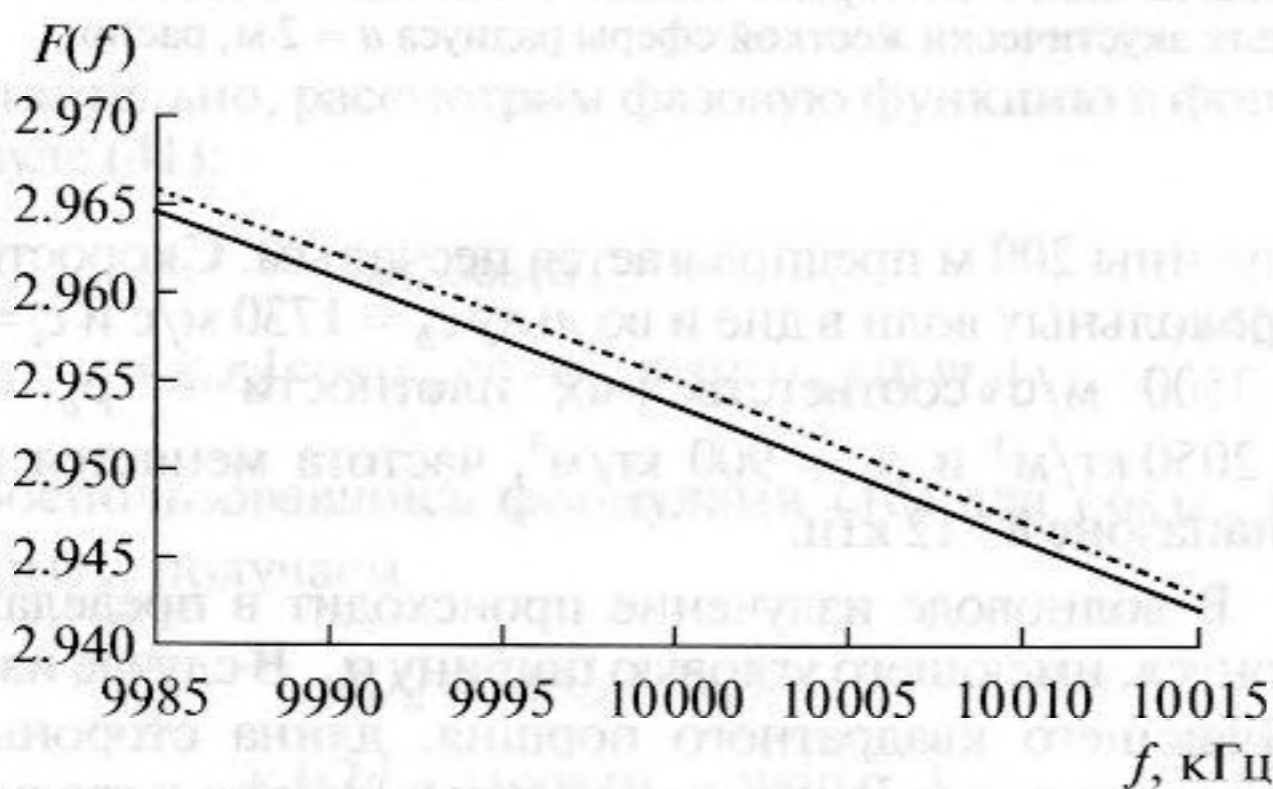


Рис. 10. Функция формы для эхосигнала, отраженного от акустически жесткой сферы радиуса $a = 2$ м, вычисленная с использованием формулы (51) (сплошная линия) и в пренебрежении вкладом интеграла по разрезу (штрих-пунктир).

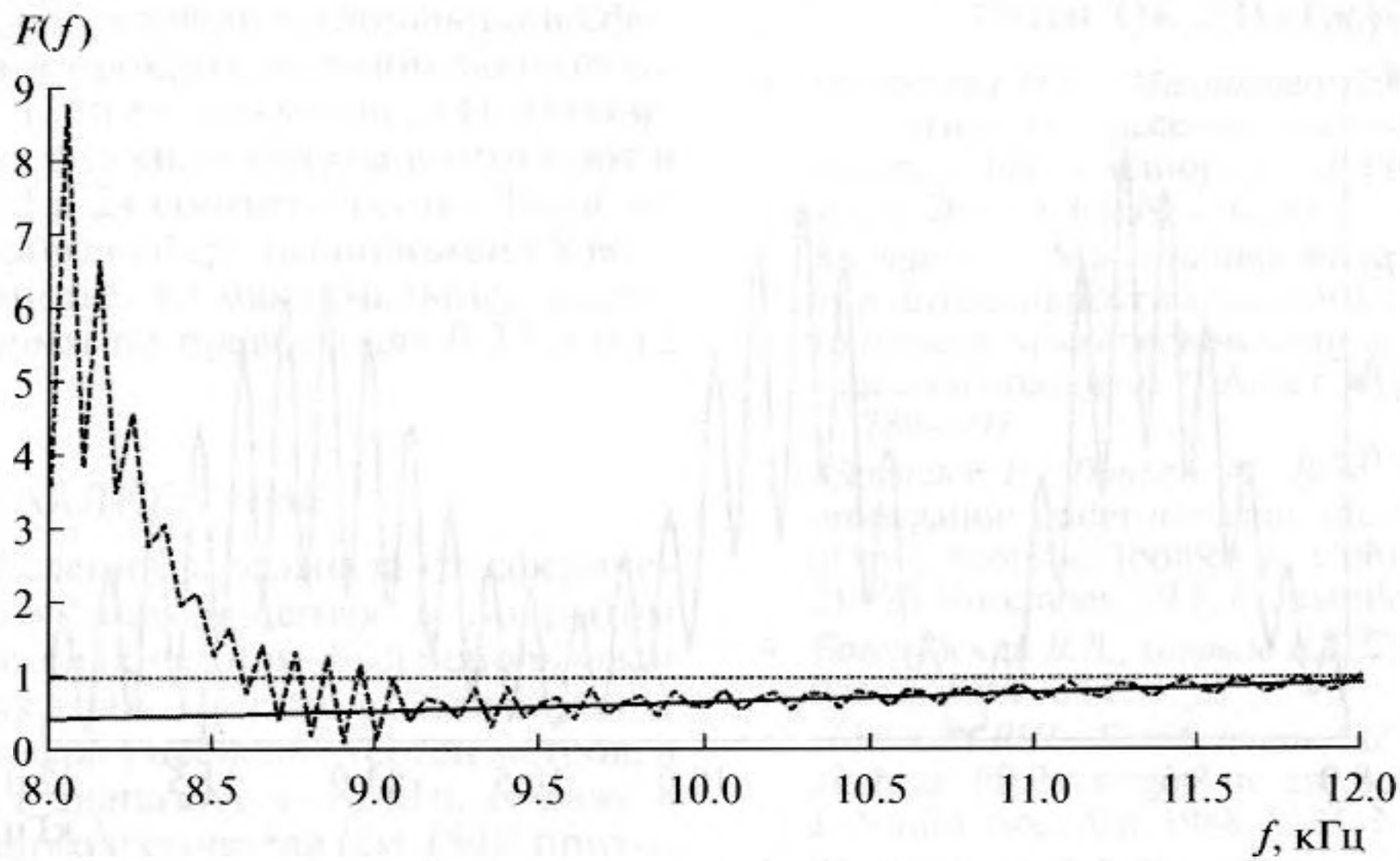


Рис. 11. Функция формы для эхосигнала, отраженного от акустически жесткой сферы радиуса $a = 2$ м, находящейся у границы раздела водного и ледового полупространств (сплошная линия) и в покрытом льдом волноводе с песчаным дном (пунктир). Линия из точек показывает функцию формы для акустически жесткой сферы радиуса $a = 2$ м, расположенной в изотропном водном пространстве; $r = 5$ км.

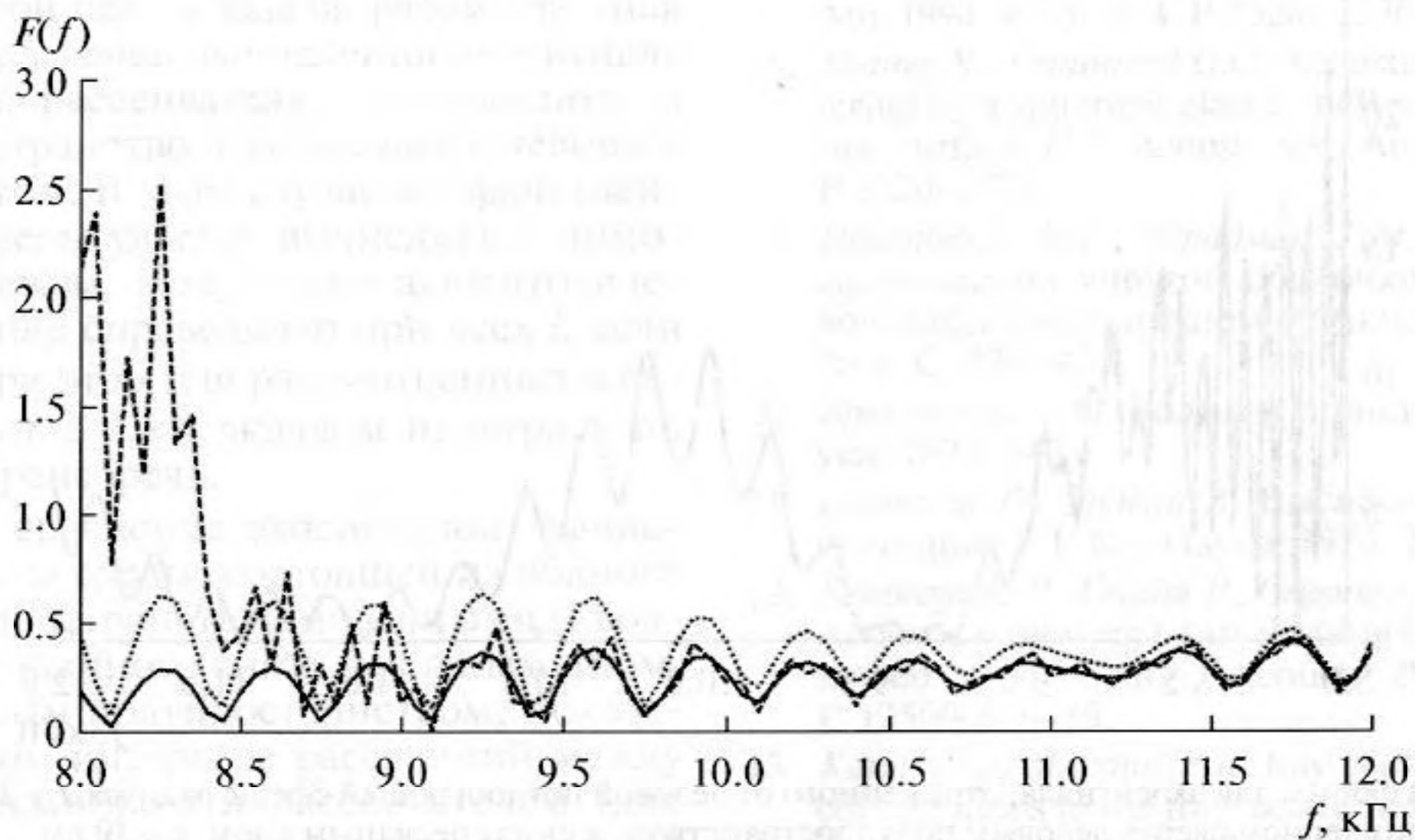


Рис. 12. Функция формы для эхосигнала, отраженного от ледовой поглощающей сферы радиуса $a = 2$ м, находящейся у границы раздела водного и ледового полупространств (сплошная линия) и в покрытом льдом волноводе с песчаным дном (пунктир). Линия из точек показывает функцию формы для ледовой поглощающей сферы радиуса $a = 2$ м, расположенной в изотропном водном пространстве; $r = 5$ км.

2 часа 20 минут в случае слоя и 15 минут – в случае полупространства. Вычисления были выполнены с использованием Matlab R2013a на системе Windows 7 с двухъядерным процессором по 3.5 ГГц на ядро, ОЗУ – 8 Гб.

Монотонно убывающая кривая, соответствующая функции формы для акустически жесткой сферы, помещенной в водное полупространство при $r = 1$ км (см. рис. 6), при ее рассмотрении на большем частотном интервале $4 \leq f \leq 16$ кГц оказывается частью осциллирующей кривой. Эта кривая возрастает со значения 2.3 при $f = 4$ кГц до 4.0 при $f = 7.4$ кГц, затем она убывает практически до 0 при

$f = 15$ кГц и снова возрастает на промежутке $15 \leq f \leq 16$ кГц. С увеличением r период осцилляций возрастает, и при $r = 4$ км (см. рис. 8) монотонное возрастание кривой сохраняется на всем промежутке $4 \leq f \leq 16$ кГц (от 0.2 до 2.23).

Увеличение значений амплитуды эхосигнала для моделей полупространства и волновода в четыре раза по сравнению со случаем изотропного водного пространства при $r = 1$ км и $f = 7.4$ кГц связано с тем, что при $r = 1$ км и $f = 7.4$ кГц в фазе приходят все четыре слагаемых, составляющих $[A_{ml}(\mathbf{r})]^2 = [A_{ml}^{(f)}(\mathbf{r}) + A_{ml}^{(d)}(\mathbf{r})]^2$ (в приближении одно-

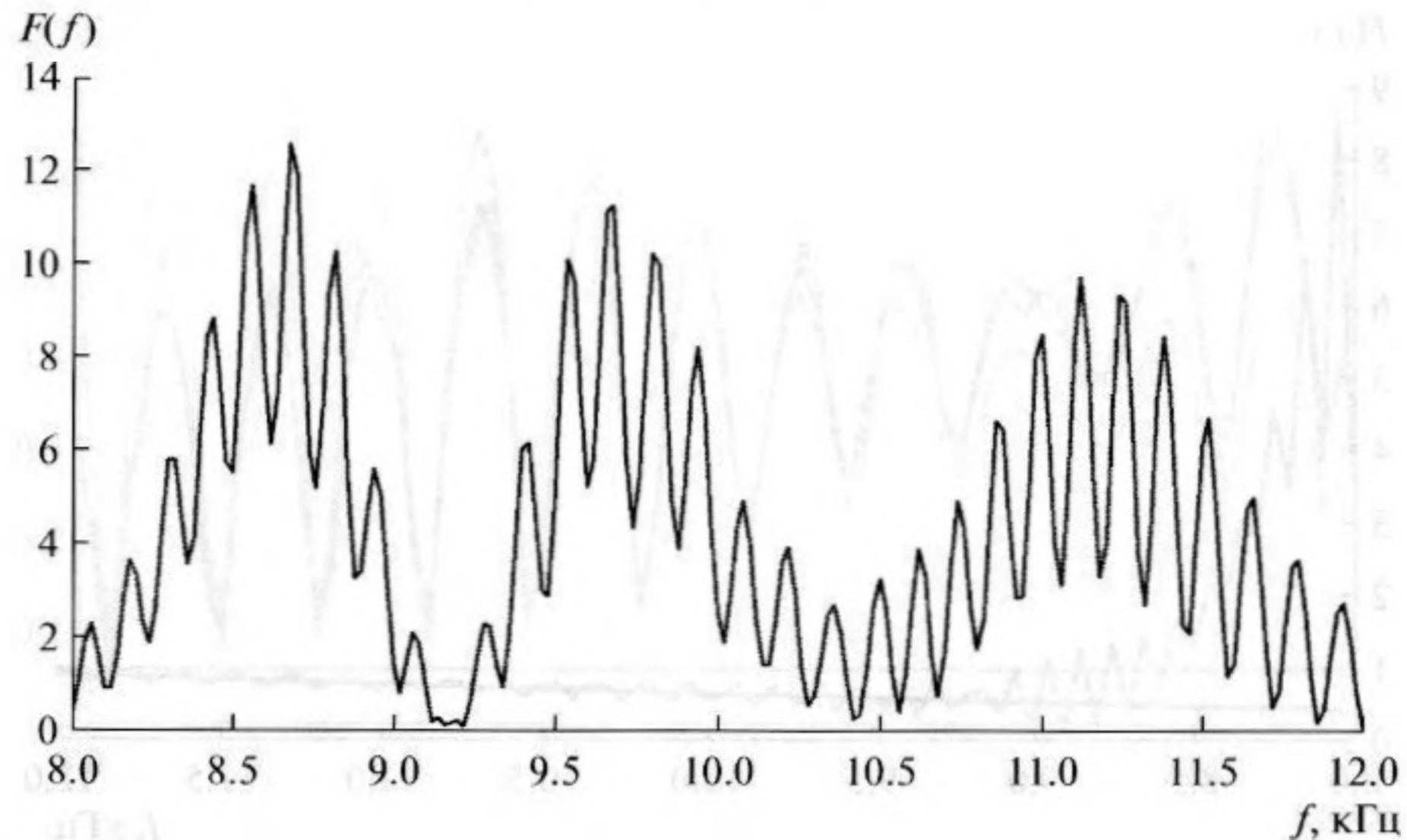


Рис. 13. Функция формы для эхосигнала, отраженного от ледовой поглощающей сферы радиуса $a = 2$ м, находящейся в волноводе, ограниченном сверху ледовым полупространством, а снизу – песчаным дном, $r = 7$ км.

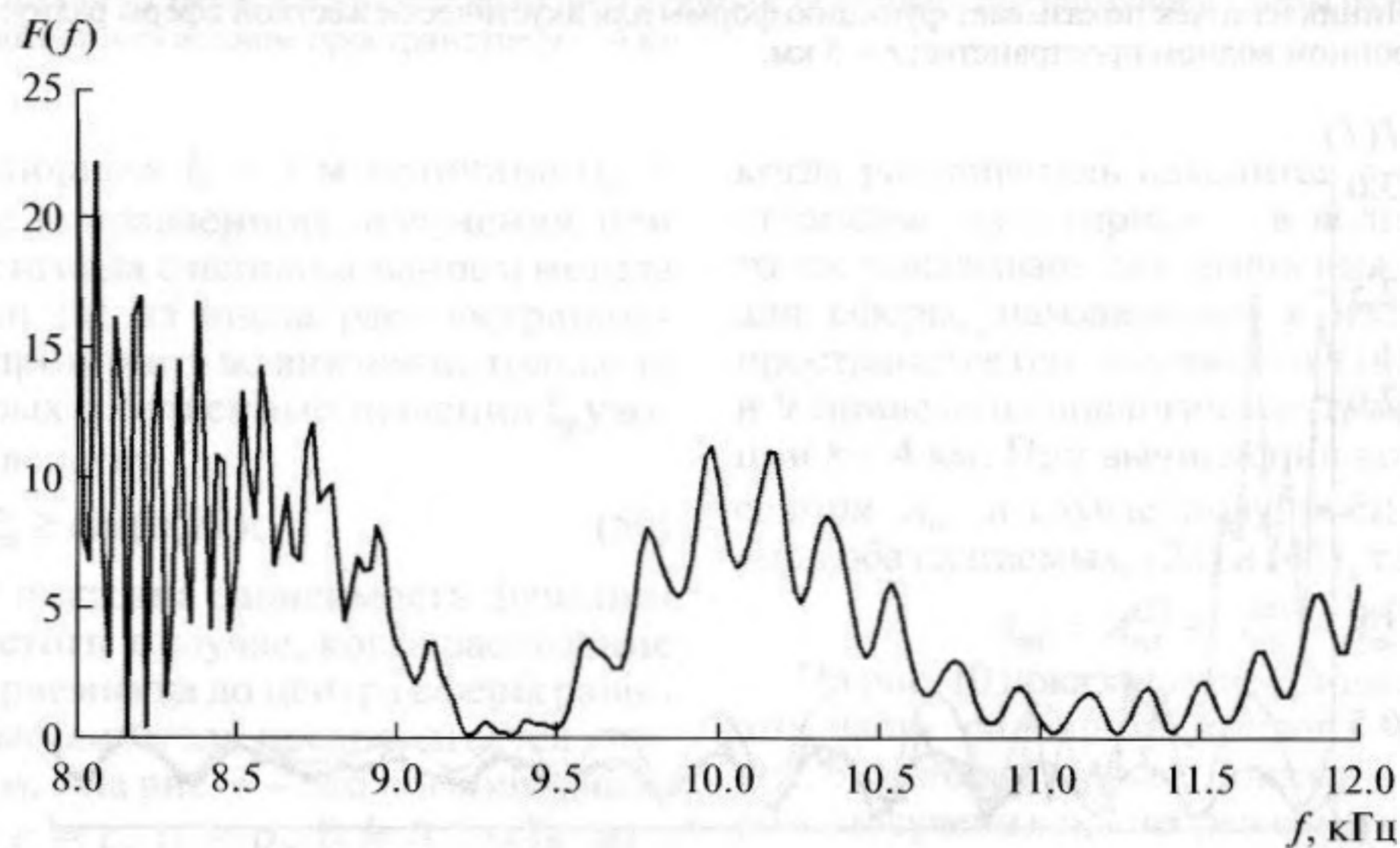


Рис. 14. Функция формы для эхосигнала, отраженного от ледовой поглощающей сферы радиуса $a = 2$ м, находящейся в волноводе, ограниченном сверху ледовым полупространством, а снизу песчаным дном, $r = 10$ км.

кратного рассеяния $C_{ml}(r)$ в формуле (1) совпадает с $A_{ml}(r)$.

Для расстояний $1 \text{ км} \leq r \leq 4 \text{ км}$ были вычислены также функции формы для водного полупространства, граничащего с воздушным полупространством (см. (14), (17), (19), (20)), и для водного слоя, граничащего с воздушным полупространством. Полученные графики как для акустически жесткого рассеивателя, так и для поглощающего ледового рассеивателя, практически неотличимы от соответствующих графиков функции формы, показанных на рис. 6–9.

На рис. 11 и 12, показывающих результаты вычислений для $r = 5$ км, отмечается резкое увеличение значений функции формы для волновода при $8 \text{ кГц} \leq f \leq 9 \text{ кГц}$. Это связано с тем, что угловой раскрыт конуса излучения α_a возрастает с умень-

шением частоты, как это следует из выражения (49), и при расстоянии $r = 5$ км на частотах, близких к 9 кГц, сфера начинает засвечиваться лучами, отраженными от дна волновода. Таким образом, расстояние, на котором модель полупространства становится неприменимой, легко оценивается из геометрических соображений, если принять во внимание глубину волновода и глубины погружения источника/приемника и рассеивателя.

Модуляция (неоднородность) частотных характеристик на рис. 7, 9 и 12 для ледового рассеивателя связана с резонансами ледового шара, т.к. модуляция наблюдается и у функции формы в изотропном водном пространстве.

При увеличении расстояния r эхосигнал от рассеивателя, находящегося в волноводе, продолжает увеличиваться. На рис. 13 и 14 показана

функция формы для ледовой поглощающей сферы, находящейся в покрытом льдом волноводе при $r = 7$ км (рис. 13) и $r = 10$ км (рис. 14). Максимальные значения функции формы возрастают в этих случаях до 13 и 24 соответственно. Если же поглощающая ледовая сфера расположена в водном полупространстве, то максимальные значения функции формы не превосходят 0.23 и 0.12 соответственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В [1] для вычисления эхосигнала от сферического рассеивателя, находящегося в покрытом льдом волноводе с жидким дном, был использован метод нормальных волн. При этом, если глубина водного слоя составляет несколько сотен метров, а частота меняется в диапазоне 8–12 кГц, то даже в случае направленного излучателя (см. (50)) приходится вычислять порядка ста нормальных мод и соответствующих им собственных значений.

В данной работе предложен метод, позволяющий существенно сократить время вычисления эхосигнала. С этой целью задача, рассмотренная в [1], заменяется задачей вычисления эхосигнала от сферического рассеивателя, помещенного в водное полупространство, граничащее с ледовым полупространством. В этом случае коэффициенты рассеяния сферы удастся вычислить с помощью метода перевала. Полученное асимптотическое представление справедливо при всех l , если $k_0 a^2 / (2r_d) \ll 1$. При этом для рассмотренных в работе расстояний $r \geq 1$ км вкладом интеграла по разрезу можно пренебречь.

Проведенное сравнение эхосигналов, вычисленных для модели среды, состоящей из водного и ледового полупространств, и модели в виде водного слоя, ограниченного снизу песчаным дном, а сверху – ледовым полупространством, показало, что в большом интервале расстояний между источником/приемником и рассеивателем (для рассмотренных в работе параметров среды это расстояние равно нескольким километрам) модель полупространства достаточно точно описывает эхосигнал, в то же время существенно сокращая время вычислений. Предельное расстояние, на котором еще возможно использовать модель полупространства, легко находится из геометрических соображений.

Полученная в работе асимптотическая формула для коэффициентов рассеяния сферы может быть применена и при моделировании сигнала, отраженного от сферического рассеивателя, находящегося вблизи жидкого дна, а сам рассеиватель может быть не только акустически жестким или жидким, но и представлять собой упругую оболочку, наполненную воздухом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках Договора № 02.G25.31.0058 от 12.02.2013.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьева Н.С., Михайлова Д.А., Островский Д.Б. Эхосигнал от рассеивателя, находящегося в покрытом льдом однородном волноводе // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 2. С. 143–151.
2. Крупин В.Д. Масштабная инвариантность аномалии интенсивности звукового поля тонального источника в Арктическом волноводе, обусловленная ледовым покровом // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 6. С. 789–797.
3. Alexander P., Duncan A., Bose N. Modelling sound propagation under ice using the Ocean Acoustics Library's Acoustic Toolbox // Conference on Acoustics 21–23 November 2012. Fremantle. Australia. 7 p.
4. Богородский В.В., Гаврило В.П. Лед. Л.: Гидрометеоздат, 1980. 384 с.
5. Hackman R.H., Sammelmann G.S. Multiple-scattering analysis for a target in an oceanic waveguide // J. Acoust. Soc. Am. 1988. V. 84. № 5. P. 1813–1825.
6. Марневская Л.А. О рассеянии плоской волны на двух акустически жестких сферах // Акуст. журн. 1969. Т. 15. № 4. С. 579–583.
7. Gaunard G.C., Huang N. Acoustic scattering by a spherical body near a plane boundary // J. Acoust. Soc. Am. 1994. V. 96. № 4. P. 2526–2536.
8. Huang N., Gaunard G.C. Acoustic point source scattering by a spherical elastic shell submerged beneath a free surface // J. Acoust. Soc. Am. 1996. V. 99. № 5. P. 2720–2726.
9. Григорьева Н.С., Фридман Г.М. Рассеяние звука сферической упругой оболочкой, помещенной в волновод с жидким дном // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 4. С. 424–432.
10. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
11. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. 294 с.
12. Sessarego J.-P., Cristini P., Grigorieva N.S., Fridman G.M. Acoustic scattering by an elastic spherical shell near the seabed // J. Comp. Acoust. 2012. V. 20. № 3. P. 1250006.1–19.
13. Kargl S.G., Marston P.L. Ray synthesis of Lamb wave contributions to the total scattering cross section for an elastic spherical shell // J. Acoust. Soc. Am. 1990. V. 88. № 3. P. 1103–1113.
14. Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции. М.: ИЛ, 1963. 302 с.
15. Шендеров Е.Л. Излучение и рассеяние волн. Л.: Судостроение, 1989. 302 с.
16. Fawcett J.A. Complex image approximation to the half-space acousto-elastic Green's function // J. Acoust. Soc. Am. 2000. V. 108. № 6. P. 2791–2795.
17. Fawcett J.A., Lim R. Evaluation of the integrals of target/seabed scattering using the method of complex images // J. Acoust. Soc. Am. 2003. V. 114. № 3. P. 1406–1415.
18. Сташкевич А.В. Акустика моря. Л.: Судостроение, 1966. 354 с.
19. Клещев А.А. Гидроакустические рассеиватели. 2-е издание. СПб: Изд-во Прима, 2012. 267 с.
20. Lim R., Lopes J.L., Hackman R.H., Todoroff D.B. Scattering by objects buried in underwater sediments: Theory and experiments // J. Acoust. Soc. Am. 1993. V. 93. № 4. Pt. 1. P. 1762–1783.