АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2015, том 61, № 6, с. 669–684

НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА

УДК 534.2: 534.222: 534.7

РОЛЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В АКУСТИЧЕСКОЙ ТОМОГРАФИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

© 2015 г. В. А. Буров, А. А. Шмелёв, Р. В. Крюков, О. Д. Румянцева

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет

119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы

E-mail: burov@phys.msu.ru

Поступила в редакцию 25.03.2015 г.

В целях исследования практических возможностей акустической нелинейной томографии описываются процессы генерации волн, вызванные нелинейным взаимодействием чисто третьего порядка и двукратным взаимодействием второго порядка. Дается классификация возникающих нелинейных вторичных источников и нелинейно рассеянных полей на основе характера их происхождения.

Ключевые слова: нелинейная акустическая томография третьего порядка, акустические нелинейные параметры второго и третьего порядков, двукратное взаимодействие второго порядка, локальные и нелокальные поля.

DOI: 10.7868/S0320791915060039

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные акустические характеристики биологических тканей несут информацию, которая весьма ценна для медицинской диагностики. Краткая характеристика состояния дел в области акустической томографии, основанной на нелинейном взаимодействии волн, дана в [1]. Томографические схемы, основанные на нелинейных акустических эффектах третьего порядка [1–3], обладают существенным преимуществом перед схемами, работающими на основе нелинейных эффектов второго порядка [4, 5]. Схемы третьего порядка, использующие нелинейное неколлинеарное взаимодействие трех первичных волн в сочетании с кодировкой сигналов и последующей корреляционной обработкой регистрируемого сигнала, позволяют восстановить пространственное распределение нелинейного параметра исследуемого образца в результате всего одного измерения [1–3]. Однако основная проблема использования нелинейных эффектов третьего порядка заключается в присутствии мешающего сигнала, который появляется в результате двух последовательных актов взаимодействия второго порядка. В схемах, основанных на коллинеарном взаимодействии волн, этот мешающий сигнал значительно преобладает над полезным сигналом чисто третьего порядка [6]. Тем самым, использование нелинейных эффектов третьего порядка в диагностических целях возможно только в схемах томографии, построенных именно на неколлинеарном взаимодействии волн.

Эксперименты, проведенные на установке, представляющей собой прототип нелинейного акустического томографа, подтверждают практическую возможность использования нелинейных эффектов третьего порядка в томографических целях, несмотря на весьма низкий уровень регистрируемых сигналов на комбинационных частотах третьего порядка [1]. Принцип действия экспериментальной установки изложен в патентах [7, 8]. В частности, предложена зеркальная система, состоящая из двух соосных конических акустических зеркал и позволяющая преобразовать фронт волны от цилиндрического преобразователя в квазиплоский пучок с большой шириной [1, 8]. Дальнейшие исследования предполагают построение достаточно строгого математического аппарата, на основе которого становится возможным получать томограммы пространственных распределений акустических нелинейных параметров второго и третьего порядков. В первую очередь, такой аппарат нуждается в волновом описании процессов и порождаемых ими сигналов различного типа, которые возникают за счет нелинейного рассеяния при томографировании исследуемого объекта. Именно математическому описанию и анализу природы таких процессов посвящена представляемая статья. В следующей предполагаемой публикации будут приведены результаты численного моделирования уровней порождаемых сигналов третьего порядка. Одни из сигналов информативны для диагностики, а другие сигналы, неизбежно сопутствующие первым, носят мешающий характер. Тем самым, встает важная для практики задача разделения вклада за счет полезных и мешающих эффектов в получаемую томограмму. Решение этой задачи, являющееся предметом дальнейших исследований, позволит получать *количественные* (а не только на качественном уровне) значения акустических нелинейных параметров второго и третьего порядков.

2. ГЕНЕРАЦИЯ КОМБИНАЦИОННЫХ ВОЛН. ЛОКАЛЬНЫЕ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ ПОЛЯ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ

Теоретическое исследование возможности использования нелинейных эффектов третьего порядка в целях акустической томографии нуждается во внимательности и осторожности. Поэтому описание такого рода эффектов будет выполнено, начиная с исходной системы уравнений, которым подчиняются акустические волны в скалярных непоглощающих средах. Система уравнений гидродинамики состоит из уравнений движения

$$\rho\left\{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right\} = -\nabla P + \mathbf{\Phi}_0, \tag{1}$$

уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{2}$$

и уравнения состояния

$$P = P(\rho). \tag{3}$$

Здесь $P(\mathbf{r},t)$ – полное давление, $\rho(\mathbf{r},t)$ – плотность среды, $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ – колебательная скорость частиц среды (течения не рассматриваются), $\mathbf{\Phi}_0$ – объемная плотность внешних сил, являющаяся векторной величиной. Для получения волнового уравнения в терминах давления надо подействовать оператором ∇ на (1), учитывая тождество $\nabla(\nabla P) \equiv \nabla^2 P$:

$$\nabla\left(\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right) + \nabla\left[\rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right] = -\nabla^2 P + F_0, \tag{4}$$

где $F_0 \equiv \nabla\mathbf{\Phi}_0$ – источники первичных волн. Здесь и далее квадратные скобки не имеют отношения к обозначению векторного произведения и используются наряду с фигурными скобками в том же смысле, что и обычные круглые скобки.

Применение оператора $\frac{\partial}{\partial t}$ к уравнению (2) позволяет получить выражение для члена $\nabla\left(\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)$:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \nabla\left(\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right) + \nabla\left(\mathbf{v}\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) = 0,$$

откуда

$$\nabla\left(\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \nabla\left(\mathbf{v}\frac{\partial \rho}{\partial t}\right),$$

или, с учетом (2),

$$\nabla\left(\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \nabla\left[\mathbf{v}\{\nabla(\rho\mathbf{v})\}\right]. \tag{5}$$

Подстановка (5) в левую часть (4) дает

$$\nabla^2 P - \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = F_0 - \nabla\left[\mathbf{v}\{\nabla(\rho\mathbf{v})\}\right] - \nabla\left[\rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right]. \tag{6}$$

Давление $P(\mathbf{r},t) \equiv P_0 + p(\mathbf{r},t)$ и плотность $\rho(\mathbf{r},t) \equiv \rho_0 + \rho'(\mathbf{r},t)$ представляются в виде суммы их невозмущенных значений P_0 и ρ_0, а также возмущений p и ρ'. Это позволяет разделить волновые эффекты по порядку малости (по возмущениям p, ρ', а также $\mathbf{v}$ – в отсутствие акустического поля среда полагается неподвижной) на линейные и нелинейные эффекты любого порядка. В приближении до третьего порядка малости, включительно, и предположении постоянства (при изменении координаты $\mathbf{r}$) невозмущенного значения плотности среды $\rho_0 \equiv \mathrm{const}_\mathbf{r}$, локальное (т.е. в фиксированной точке $\mathbf{r}$) уравнение состояния (3) имеет вид

$$\begin{gathered} P = P(\rho,\mathbf{r}) = P_0 + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho_0}\rho' + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_{\rho=\rho_0}(\rho')^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 P}{\partial \rho^3}\right)_{\rho=\rho_0}(\rho')^3 + \ldots \end{gathered} \tag{7}$$

Возможен случай среды, неоднородной по невозмущенному значению плотности $\rho(\mathbf{r})$. Тогда вид связи (7) усложняется, поскольку нужно учитывать присутствие членов типа $\nabla\rho(\mathbf{r})\mathbf{v}$. Подобное уравнение состояния в случае учета только линейных волновых эффектов использовано в [9]. Однако неоднородность $\rho(\mathbf{r})$ не изменяет принципиально общую картину нелинейного взаимодействия волн и поэтому далее не рассматривается, хотя при строгом количественном описании присутствие $\nabla\rho(\mathbf{r})$, в зависимости от характерного порядка этой величины, может вносить определенный вклад как в линейные, так и в нелинейные процессы. Что касается фазовой скорости звука, то пока будет рассматриваться задача для общего случая $c = c(\mathbf{r}) \neq \mathrm{const}$, а ограничение в виде постоянства c будет введено позднее и оговорено особо. Малая интенсивность первичных волн, не приводящая к образованию ударных фронтов, малое поглощение на длину волны и, как следствие, слабость температурных эффектов позволяют не учитывать процессы, связанные с ростом энтропии [10].

Уравнение состояния (7) содержит характерные функциональные параметры: квадрат скорости звука $c^2(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho_0}$ и величину $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_{\rho=\rho_0}$, которая характеризуется акустическим нелинейным параметром среды второго порядка $\varepsilon_2(\mathbf{r}) = 1 + \frac{B}{2A}$, где $A = \frac{\rho_0}{P_0}c^2(\mathbf{r})$, $B = \frac{\rho_0^2}{P_0}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_{\rho=\rho_0}$. По аналогии можно ввести акустический нелинейный параметр среды третьего порядка: $\varepsilon_3(\mathbf{r}) = \dfrac{C}{6A}$, где $C = \dfrac{\rho_0^3}{P_0}\left(\dfrac{\partial^3 P}{\partial\rho^3}\right)_{\rho=\rho_0}$. В работе [3] вместо обозначения C использовалось обозначение D для большего отличия от скорости звука c. Обозначение C использовано в соответствии с более ранними работами [11]. С учетом этих обозначений, выражение (7) принимает вид

$$P = P(\rho, \mathbf{r}) = P_0 + c^2(\mathbf{r})\rho' + \\ + \frac{\varepsilon_2(\mathbf{r}) - 1}{\rho_0}c^2(\mathbf{r})(\rho')^2 + \frac{\varepsilon_3(\mathbf{r})}{\rho_0^2}c^2(\mathbf{r})(\rho')^3 + \ldots, \tag{8}$$

откуда

$$\rho' = \frac{p}{c^2(\mathbf{r})} - \frac{\varepsilon_2(\mathbf{r}) - 1}{\rho_0}(\rho')^2 - \frac{\varepsilon_3(\mathbf{r})}{\rho_0^2}(\rho')^3 + \ldots. \tag{9}$$

Повторная подстановка этого выражения для ρ' в правую часть (9) приводит к итоговому выражению для $\rho'(\mathbf{r},t)$ через акустическое давление p с точностью до величин третьего порядка малости включительно:

$$\rho' = \frac{1}{c^2(\mathbf{r})}p - \frac{\varepsilon_2(\mathbf{r}) - 1}{\rho_0 c^4(\mathbf{r})}p^2 + \\ + \frac{\left\{2\left(\varepsilon_2(\mathbf{r}) - 1\right)^2 - \varepsilon_3(\mathbf{r})\right\}}{\rho_0^2 c^6(\mathbf{r})}p^3 + \ldots. \tag{10}$$

Двукратное дифференцирование (10) по времени приводит к следующему выражению для члена $\dfrac{\partial^2\rho}{\partial t^2}$ в левой части (6):

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2(\mathbf{r})}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \\ - \frac{\left(\varepsilon_2(\mathbf{r}) - 1\right)}{\rho_0 c^4(\mathbf{r})}\frac{\partial^2(p^2)}{\partial t^2} + \frac{\left\{2\left(\varepsilon_2(\mathbf{r}) - 1\right)^2 - \varepsilon_3(\mathbf{r})\right\}}{\rho_0^2 c^6(\mathbf{r})}\frac{\partial^2(p^3)}{\partial t^2} + \ldots.$$

Тогда (6) принимает вид ($\nabla^2 P = \nabla^2 p$ при $P_0 \equiv \mathrm{const}_{\mathbf{r}}$):

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = F_0 - \frac{\left(\varepsilon_2(\mathbf{r}) - 1\right)}{\rho_0 c^4(\mathbf{r})}\frac{\partial^2(p^2)}{\partial t^2} + \\ + \frac{\left\{2\left(\varepsilon_2(\mathbf{r}) - 1\right)^2 - \varepsilon_3(\mathbf{r})\right\}}{\rho_0^2 c^6(\mathbf{r})}\frac{\partial^2(p^3)}{\partial t^2} - \\ - \nabla\left[\mathbf{v}\left\{\nabla\left(\rho\mathbf{v}\right)\right\}\right] - \nabla\left[\rho\left(\mathbf{v}\nabla\right)\mathbf{v}\right],$$

т.е., используя $\rho = \rho_0 + \rho'$,

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = F_0 - \frac{\left(\varepsilon_2(\mathbf{r}) - 1\right)}{\rho_0 c^4(\mathbf{r})}\frac{\partial^2(p^2)}{\partial t^2} + \\ + \frac{\left\{2\left(\varepsilon_2(\mathbf{r}) - 1\right)^2 - \varepsilon_3(\mathbf{r})\right\}}{\rho_0^2 c^6(\mathbf{r})}\frac{\partial^2(p^3)}{\partial t^2} - \rho_0\nabla\left[\mathbf{v}\left(\nabla\mathbf{v}\right)\right] - \\ - \rho_0\nabla\left[\left(\mathbf{v}\nabla\right)\mathbf{v}\right] - \nabla\left[\mathbf{v}\left\{\nabla\left(\rho'\mathbf{v}\right)\right\}\right] - \nabla\left[\rho'\left(\mathbf{v}\nabla\right)\mathbf{v}\right]. \tag{11}$$

В (11) и везде далее невозмущенное давление P_0 полагается постоянным при изменении координаты $\mathbf{r}$ ($P_0 \equiv \mathrm{const}_{\mathbf{r}}$). В задачах акустической медицинской томографии и многих задачах неразрушающего контроля такое предположение является естественным.

Слагаемые

$$\frac{\left\{2\left(\varepsilon_2(\mathbf{r}) - 1\right)^2 - \varepsilon_3(\mathbf{r})\right\}}{\rho_0^2 c^6(\mathbf{r})}\frac{\partial^2(p^3)}{\partial t^2} - \\ - \nabla\left[\mathbf{v}\left\{\nabla\left(\rho'\mathbf{v}\right)\right\}\right] - \nabla\left[\rho'\left(\mathbf{v}\nabla\right)\mathbf{v}\right]$$

в правой части выражения (11) представляют собой члены не ниже третьего порядка малости, поскольку они формируются произведением трех сомножителей, каждый из которых, в свою очередь, является величиной первого порядка малости по возмущениям. Поэтому эти слагаемые не нуждаются в дальнейшем преобразовании. В то же время, остальные слагаемые

$$-\frac{\left(\varepsilon_2(\mathbf{r}) - 1\right)}{\rho_0 c^4(\mathbf{r})}\frac{\partial^2(p^2)}{\partial t^2} - \rho_0\nabla\left[\mathbf{v}\left(\nabla\mathbf{v}\right)\right] - \rho_0\nabla\left[\left(\mathbf{v}\nabla\right)\mathbf{v}\right]$$

содержат в себе как члены второго порядка малости (которые формируются произведением двух сомножителей первого порядка), так и члены третьего порядка (которые формируются произведением сомножителей первого и второго порядков). Более подробно это будет разобрано ниже.

Член $\rho_0\nabla\left[\mathbf{v}\left(\nabla\mathbf{v}\right)\right]$ в правой части волнового уравнения (11) можно преобразовать к более удобному для анализа виду:

$$\rho_0\nabla\left[\mathbf{v}\left(\nabla\mathbf{v}\right)\right] = \rho_0\left(\nabla\mathbf{v}\right)^2 + \rho_0\mathbf{v}\nabla\left(\nabla\mathbf{v}\right). \tag{12}$$

Первое слагаемое $\rho_0\left(\nabla\mathbf{v}\right)^2$ выражается, используя возведение в квадрат уравнения непрерывности (2) в форме $\dfrac{\partial\rho'}{\partial t} = -[\rho_0\nabla\mathbf{v} + \nabla(\rho'\mathbf{v})]$, в виде

$$\rho_0\left(\nabla\mathbf{v}\right)^2 \approx \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho'}{\partial t}\right)^2 - 2\left(\nabla\mathbf{v}\right)\nabla\left(\rho'\mathbf{v}\right) \tag{13}$$

с точностью до членов третьего порядка малости включительно. С этой же точностью член $\dfrac{1}{\rho_0}\left(\dfrac{\partial\rho'}{\partial t}\right)^2$ в (13) выражается через акустическое давление с помощью уравнения состояния в форме (10):

$$\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho'}{\partial t}\right)^2 \approx \frac{1}{\rho_0}\left[\frac{1}{c^2(\mathbf{r})}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\left(\varepsilon_2(\mathbf{r}) - 1\right)}{\rho_0 c^4(\mathbf{r})}\frac{\partial(p^2)}{\partial t}\right]^2 \approx \\ \approx \frac{1}{\rho_0 c^4(\mathbf{r})}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2 - \frac{2\left(\varepsilon_2(\mathbf{r}) - 1\right)}{\rho_0^2 c^6(\mathbf{r})}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial(p^2)}{\partial t}\right).$$

Тем самым, (12) приобретает вид:

$$\rho_0\nabla\left[\mathbf{v}(\nabla\mathbf{v})\right] \approx \frac{1}{\rho_0 c^4(\mathbf{r})}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2 + \rho_0\mathbf{v}\nabla(\nabla\mathbf{v}) - \\ - \frac{2(\varepsilon_2(\mathbf{r})-1)}{\rho_0^2 c^6(\mathbf{r})}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial(p^2)}{\partial t}\right) - 2(\nabla\mathbf{v})\nabla(\rho'\mathbf{v}). \tag{14}$$

Подстановка (14) в (11) приводит к следующему волновому уравнению для акустического давления:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = F_0 + Q, \tag{15}$$

где

$$Q = -\frac{(\varepsilon_2(\mathbf{r})-1)}{\rho_0 c^4(\mathbf{r})}\frac{\partial^2(p^2)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0 c^4(\mathbf{r})}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2 - \\ - \rho_0\nabla\left[(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right] - \rho_0\mathbf{v}\nabla(\nabla\mathbf{v}) + \frac{\left\{2(\varepsilon_2(\mathbf{r})-1)^2 - \varepsilon_3(\mathbf{r})\right\}}{\rho_0^2 c^6(\mathbf{r})}\times \\ \times\frac{\partial^2(p^3)}{\partial t^2} + \frac{2(\varepsilon_2(\mathbf{r})-1)}{\rho_0^2 c^6(\mathbf{r})}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial(p^2)}{\partial t}\right) + \\ + 2(\nabla\mathbf{v})\nabla(\rho'\mathbf{v}) - \nabla\left[\mathbf{v}\{\nabla(\rho'\mathbf{v})\}\right] - \nabla\left[\rho'(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right]. \tag{16}$$

Выражение (16) сводится к выражению, приведенному в [2], если учесть соотношение

$$2(\nabla\mathbf{v})\nabla(\rho'\mathbf{v}) - \nabla[\mathbf{v}\{\nabla(\rho'\mathbf{v})\}] - \nabla[\rho'(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}] = \\ = \frac{\rho'}{\rho_0^2 c^4(\mathbf{r})}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2 - \rho'\nabla[(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}] - \rho'\mathbf{v}\nabla(\nabla\mathbf{v}) - \\ - \mathbf{v}[(\mathbf{v}\nabla)(\nabla\rho')] - 2(\nabla\rho')[(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}],$$

где для преобразования одного из трех сомножителей использованы линеаризованные уравнения непрерывности и состояния:

$$\nabla\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0 c^2(\mathbf{r})}\frac{\partial p}{\partial t}.$$

Функция Q представляет собой нелинейные вторичные источники, порождающие рассеянные поля за счет эффектов нелинейного взаимодействия второго и третьего порядков. Вообще говоря, анализировать процессы нелинейного взаимодействия можно в терминах *любых* переменных по возмущениям (p, ρ', $\mathbf{v}$), но при этом необходимо помнить о нелинейной взаимосвязи между этими переменными.

Для разделения эффектов различных порядков малости, поля, описывающие возмущения среды, представляются в виде суммы членов первого (индекс I), второго (II), третьего (III) и т.д. порядков малости:

$$p = p^{(\mathrm{I})} + p^{(\mathrm{II})} + p^{(\mathrm{III})} + \ldots, \\ \rho' = \rho^{(\mathrm{I})} + \rho^{(\mathrm{II})} + \rho^{(\mathrm{III})} + \ldots, \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}^{(\mathrm{I})} + \mathbf{v}^{(\mathrm{II})} + \mathbf{v}^{(\mathrm{III})} + \ldots. \tag{17}$$

Рассмотрение исходных уравнений (1), (2), (8) для полей только первого порядка малости (вне источников первичных волн) дает линейную связь между соответствующими акустическими возмущениями:

$$\rho_0\frac{\partial\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}}{\partial t} = -\nabla p^{(\mathrm{I})}, \\ \frac{\partial\rho^{(\mathrm{I})}}{\partial t} + \rho_0\nabla\mathbf{v}^{(\mathrm{I})} = 0, \quad p^{(\mathrm{I})} = c^2(\mathbf{r})\rho^{(\mathrm{I})}. \tag{18}$$

Подстановка разложений (17) в волновое уравнение (15), (16) позволяет разделить вторичные источники Q на нелинейные вторичные источники второго ($Q^{(\mathrm{II})}$) и третьего ($Q^{(\mathrm{III})}$) порядков: $Q \equiv Q^{(\mathrm{II})} + Q^{(\mathrm{III})}$. Тогда волновое уравнение, описывающее нелинейные эффекты второго порядка, имеет вид

$$\nabla^2 p^{(\mathrm{II})} - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})}\frac{\partial^2 p^{(\mathrm{II})}}{\partial t^2} = Q^{(\mathrm{II})}, \tag{19}$$

где

$$Q^{(\mathrm{II})} = -\frac{(\varepsilon_2(\mathbf{r})-1)}{\rho_0 c^4(\mathbf{r})}\frac{\partial^2\left(p^{(\mathrm{I})}\right)^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0 c^4(\mathbf{r})}\left(\frac{\partial p^{(\mathrm{I})}}{\partial t}\right)^2 - \\ - \rho_0\nabla\left[(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\nabla)\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\right] - \rho_0\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\nabla(\nabla\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}). \tag{20}$$

Для вывода волнового уравнения для колебательной скорости, включительно до членов второго порядка малости по возмущениям, рассматривается уравнение движения идеальной жидкости (1) вне области расположения источников первичных волн:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{21}$$

Подстановка тождества $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \equiv \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{v}^2) - \mathbf{v}\times\mathrm{rot}\mathbf{v}$ (здесь символ $\times$ означает векторное умножение) в (21) дает:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{v}^2) - \mathbf{v}\times\mathrm{rot}\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{22}$$

Поскольку $\rho = \rho_0 + \rho'$, где $\rho_0 = \mathrm{const}_{\mathbf{r}}$, то правая часть (22), с точностью до членов второго порядка малости включительно, записывается как

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p \approx -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \frac{1}{\rho_0^2 c^2}\frac{\nabla(p^2)}{2}.$$

Тогда выражение (22) принимает вид:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) - \frac{1}{2\rho_0^2 c^2}\nabla(p^2) - \mathbf{v}\times\mathrm{rot}\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p. \tag{23}$$

Подставка в (23) полей $p = p^{(\mathrm{I})} + p^{(\mathrm{II})}$ и $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(\mathrm{I})} + \mathbf{v}^{(\mathrm{II})}$ в виде суммы полей первого и второго порядков малости приводит к первому уравнению (18) и к уравнению

$$\frac{\partial\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}}{\partial t} + \nabla\left[\frac{(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})})^2}{2}\right] - \frac{1}{2\rho_0^2 c^2}\nabla\left[(p^{(\mathrm{I})})^2\right] - \\ - \mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\times\mathrm{rot}\mathbf{v}^{(\mathrm{I})} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p^{(\mathrm{II})}. \tag{24}$$

Из первого уравнения (18) следует, что

$$\mathrm{rot}\mathbf{v}^{(\mathrm{I})} = 0 \text{ при } \rho_0 \equiv \mathrm{const}_{\mathbf{r}}. \qquad (25)$$

Тогда $\mathbf{v}^{(\mathrm{I})} \times \mathrm{rot}\mathbf{v}^{(\mathrm{I})} = 0$, и применение оператора rot к обеим частям (24) дает

$$\mathrm{rot}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})} = 0 \text{ при } \rho_0 \equiv \mathrm{const}_{\mathbf{r}},\ \ c = c_0 \equiv \mathrm{const}_{\mathbf{r}}. \qquad (26)$$

Приведенный способ доказательства свойства (26) был предложен Ю.Н. Маковым, доцентом кафедры акустики МГУ им. М.В. Ломоносова. Надо отметить, что уравнения (23) и (24) справедливы даже в случае неоднородной по ρ_0 и c среды. Свойство (25) имеет место при условии $\rho_0 \equiv \mathrm{const}_{\mathbf{r}}$, а для выполнения (26) необходима однородность среды не только по плотности, но и по фазовой скорости. Соотношение (26) используется, например, в работах [12, 13]. В [14 (гл. 3, §4.2)] обосновывается возможность использования соотношения (26) с высокой точностью в средах с небольшой вязкостью.

Поскольку имеют место тождества

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{v}^2) - \mathbf{v} \times \mathrm{rot}\mathbf{v},\ \nabla(\nabla\mathbf{v}) = \nabla^2\mathbf{v} + \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{v}),$$

то

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{v}^2),\ \ \nabla(\nabla\mathbf{v}) = \nabla^2\mathbf{v} \text{ при } \mathrm{rot}\mathbf{v} = 0. \qquad (27)$$

В скалярных средах без поглощения, однородных по плотности, в случае рассмотрения полей в линейном приближении $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(\mathrm{I})}$ соотношения (27) справедливы при произвольном распределении $c(\mathbf{r})$, а в случае рассмотрения $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(\mathrm{I})} + \mathbf{v}^{(\mathrm{II})}$ до второго порядка малости включительно – только при $c = c_0 \equiv \mathrm{const}_{\mathbf{r}}$, согласно (25) и (26), соответственно. Так как $\mathrm{rot}\mathbf{v}^{(\mathrm{I})} = 0$, то из (27) следует

$$(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\nabla)\mathbf{v}^{(\mathrm{I})} = \frac{1}{2}\nabla\left[(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})})^2\right],\ \nabla(\nabla\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}) = \nabla^2\mathbf{v}^{(\mathrm{I})},$$

откуда

$$\nabla\left[(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\nabla)\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\right] = \frac{1}{2}\nabla^2\left[(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})})^2\right].$$

Это приводит (20) к виду

$$Q^{(\mathrm{II})} = -\frac{(\varepsilon_2(\mathbf{r}) - 1)}{\rho_0 c^4(\mathbf{r})}\frac{\partial^2 (p^{(\mathrm{I})})^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0 c^4(\mathbf{r})} \times \left(\frac{\partial p^{(\mathrm{I})}}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\rho_0\nabla^2\left[(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})})^2\right] - \rho_0\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}(\nabla^2\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}). \qquad (28)$$

Волновое уравнение, описывающее нелинейные эффекты третьего порядка, согласно (15)–(17), таково:

$$\nabla^2 p^{(\mathrm{III})} - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})}\frac{\partial^2 p^{(\mathrm{III})}}{\partial t^2} = Q^{(\mathrm{III})},$$

где

$$\begin{aligned} Q^{(\mathrm{III})} = &-\frac{(\varepsilon_2(\mathbf{r}) - 1)}{\rho_0 c^4(\mathbf{r})}\frac{\partial^2 (2p^{(\mathrm{I})}p^{(\mathrm{II})})}{\partial t^2} - \frac{2}{\rho_0 c^4(\mathbf{r})}\left(\frac{\partial p^{(\mathrm{I})}}{\partial t}\right) \times \\ &\times \left(\frac{\partial p^{(\mathrm{II})}}{\partial t}\right) - \rho_0\nabla\left[(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\nabla)\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}\right] - \rho_0\nabla\left[(\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}\nabla)\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\right] - \\ &- \rho_0\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\nabla(\nabla\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}) - \rho_0\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}\nabla(\nabla\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}) + \\ &+ \frac{\left\{2(\varepsilon_2(\mathbf{r}) - 1)^2 - \varepsilon_3(\mathbf{r})\right\}}{\rho_0^2 c^6(\mathbf{r})}\frac{\partial^2 (p^{(\mathrm{I})})^3}{\partial t^2} + \frac{2(\varepsilon_2(\mathbf{r}) - 1)}{\rho_0^2 c^6(\mathbf{r})} \times \\ &\times \left(\frac{\partial p^{(\mathrm{I})}}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial (p^{(\mathrm{I})})^2}{\partial t}\right) + 2(\nabla\mathbf{v}^{(\mathrm{I})})\nabla(\rho^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}) - \\ &- \nabla\left[\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\left\{\nabla(\rho^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{I})})\right\}\right] - \nabla\left[\rho^{(\mathrm{I})}(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\nabla)\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\right]. \end{aligned} \qquad (29)$$

Источники $Q^{(\mathrm{II})}$ и $Q^{(\mathrm{III})}$ в (28) и (29) разделены по следующему принципу: при перемножении двух или более величин, представляющих собой малые возмущения, порядок их малости складывается. Так, например, члены

$$\frac{(\varepsilon_2(\mathbf{r}) - 1)}{\rho_0 c^4(\mathbf{r})}\frac{\partial^2 (p^{(\mathrm{I})})^2}{\partial t^2} \text{ и } \rho_0\nabla\left[(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\nabla)\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\right]$$

имеют второй порядок малости (как образованные произведением двух первичных возмущений, на каждое из которых может действовать линейный оператор), а члены

$$\frac{(\varepsilon_2(\mathbf{r}) - 1)}{\rho_0 c^4(\mathbf{r})}\frac{\partial^2 (2p^{(\mathrm{I})}p^{(\mathrm{II})})}{\partial t^2} \text{ и } \nabla\left[\rho^{(\mathrm{I})}(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\nabla)\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\right]$$

имеют третий порядок.

В работах [2, 3] проводилось формальное разделение нелинейных источников на второй ($Q^{(\mathrm{II})}$) и третий ($Q^{(\mathrm{III})}$) порядки, исходя из того, что полные значения возмущений p, ρ', $\mathbf{v}$ имеют первый порядок малости. Это привело к ошибочному представлению, что в (16) члены:

$$-\frac{(\varepsilon_2(\mathbf{r}) - 1)}{\rho_0 c^4(\mathbf{r})}\frac{\partial^2 (p^2)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0 c^4(\mathbf{r})}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2 - \rho_0\nabla\left[(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right] - \rho_0\mathbf{v}\nabla(\nabla\mathbf{v}),$$

которые кажутся, на первый взгляд, членами лишь второго порядка малости, дают вклад только в нелинейные источники второго порядка $Q^{(\mathrm{II})}$. Тем самым, вклад этих членов в выражение (29) и приведенное ниже выражение (33) для источников третьего порядка $Q^{(\mathrm{III})}$ неправомерно не учитывался.

Выражение для $Q^{(\mathrm{III})}$ достаточно громоздко, однако его анализ упрощается в предположении однородности исследуемой среды по фазовой скорости звука, т.е. $c \equiv \mathrm{const}_{\mathbf{r}} = c_0$. Это предположение является достаточно грубым для целей описания реальных процессов в биологических объектах, однако оно существенно облегчает физический анализ нелинейных эффектов третьего порядка. В силу предположения $c = c_0 \equiv \mathrm{const}_{\mathbf{r}}$, справедливо уравнение $\square^2 \mathbf{v}^{(\mathrm{I})} = 0$, где $\square^2 \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ – оператор Д'Аламбера. С учетом свойств (25) и (26), из (27) следует:

$$\nabla(\nabla \mathbf{v}^{(\mathrm{I})}) = \nabla^2 \mathbf{v}^{(\mathrm{I})}, \quad \nabla(\nabla \mathbf{v}^{(\mathrm{II})}) = \nabla^2 \mathbf{v}^{(\mathrm{II})}, \qquad (30)$$

$$\left\{(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})} + \mathbf{v}^{(\mathrm{II})})\nabla\right\}(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})} + \mathbf{v}^{(\mathrm{II})}) = \frac{1}{2}\nabla\left[(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})} + \mathbf{v}^{(\mathrm{II})})^2\right]. \qquad (31)$$

Принимая во внимание члены только третьего порядка малости, из выражения (31) вытекает: $(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\nabla)\mathbf{v}^{(\mathrm{II})} + (\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}\nabla)\mathbf{v}^{(\mathrm{I})} = \nabla(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})})$, и применение оператора ∇ к обеим частям последнего соотношения дает:

$$\nabla\left[(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\nabla)\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}\right] + \nabla\left[(\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}\nabla)\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\right] = \nabla^2(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}). \qquad (32)$$

Тогда, с учетом (30) и (32), выражение (29) для вторичных источников $Q^{(\mathrm{III})}$, отвечающих за нелинейные эффекты третьего порядка, записывается как

$$\begin{gathered} Q^{(\mathrm{III})} = -\frac{(\varepsilon_2(\mathbf{r}) - 1)}{\rho_0 c_0^4}\frac{\partial^2 (2p^{(\mathrm{I})}p^{(\mathrm{II})})}{\partial t^2} - \frac{2}{\rho_0 c_0^4}\left(\frac{\partial p^{(\mathrm{I})}}{\partial t}\right)\times \\ \times\left(\frac{\partial p^{(\mathrm{II})}}{\partial t}\right) - \rho_0 \nabla^2(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}) - \rho_0 \mathbf{v}^{(\mathrm{I})}(\nabla^2 \mathbf{v}^{(\mathrm{II})}) - \\ - \rho_0 \mathbf{v}^{(\mathrm{II})}(\nabla^2 \mathbf{v}^{(\mathrm{I})}) + \\ + \frac{\left\{2(\varepsilon_2(\mathbf{r}) - 1)^2 - \varepsilon_3(\mathbf{r})\right\}}{\rho_0^2 c_0^6}\frac{\partial^2 (p^{(\mathrm{I})})^3}{\partial t^2} + \frac{2(\varepsilon_2(\mathbf{r}) - 1)}{\rho_0^2 c_0^6}\times \\ \times\left(\frac{\partial p^{(\mathrm{I})}}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial (p^{(\mathrm{I})})^2}{\partial t}\right) + 2(\nabla \mathbf{v}^{(\mathrm{I})})\nabla(\rho^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}) - \\ - \nabla\left[\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\left\{\nabla(\rho^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{I})})\right\}\right] - \frac{1}{2}\nabla\left[\rho^{(\mathrm{I})}\nabla(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})})^2\right]. \end{gathered} \qquad (33)$$

2.1. Локальные и нелокальные поля второго порядка

С учетом ограничения $c \equiv \mathrm{const}_{\mathbf{r}} = c_0$, соотношения (19), (20) для нелинейных эффектов второго порядка принимают вид

$$\nabla^2 p^{(\mathrm{II})} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p^{(\mathrm{II})}}{\partial t^2} = Q^{(\mathrm{II})},$$

где

$$\begin{gathered} Q^{(\mathrm{II})} = -\frac{(\varepsilon_2(\mathbf{r}) - 1)}{\rho_0 c_0^4}\frac{\partial^2 (p^{(\mathrm{I})})^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0 c_0^4}\left(\frac{\partial p^{(\mathrm{I})}}{\partial t}\right)^2 - \\ - \frac{1}{2}\rho_0 \nabla^2\left[(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})})^2\right] - \rho_0 \mathbf{v}^{(\mathrm{I})}(\nabla^2 \mathbf{v}^{(\mathrm{I})}). \end{gathered}$$

Согласно [12], в рассматриваемом случае вторичные источники $Q^{(\mathrm{II})}$ можно представить в виде

$$Q^{(\mathrm{II})} = -\frac{\varepsilon_2}{\rho_0 c_0^4}\frac{\partial^2\left(p^{(\mathrm{I})}\right)^2}{\partial t^2} - \square^2 L - \frac{2}{c_0^2}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}, \qquad (34)$$

где $L = \frac{\rho_0(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})})^2}{2} - \frac{(p^{(\mathrm{I})})^2}{2\rho_0 c_0^2}$ – плотность лагранжиана. Надо отметить, что выражение (34) справедливо для среды однородной по линейным характеристикам (скорости звука и плотности), однако при произвольной зависимости нелинейного параметра от координат: $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\mathbf{r})$. В правой части (34) не только член $(-\square^2 L)$, но и член $\left(-\frac{2}{c_0^2}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}\right)$ представляют собой полный даламбериан [12]:

$$L = \frac{1}{4\rho_0}\square^2\left[\left(\int^t p^{(\mathrm{I})}dt'\right)^2\right]. \qquad (35)$$

Согласно (34), нелинейные вторичные источники $Q^{(\mathrm{II})}$ в волновом уравнении для давления $p^{(\mathrm{II})}$ можно разделить на два типа:

$$\square^2 p^{(\mathrm{II})} = Q^{(\mathrm{II})} \equiv Q_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{II})} + Q_{\mathrm{n/r}}^{(\mathrm{II})}, \qquad (36)$$

где $Q_{\mathrm{n/r}}^{(\mathrm{II})} = -\square^2 L - \frac{2}{c_0^2}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} \equiv \square^2 \psi$ – источники, представимые в виде полного даламбериана $\square^2\psi$ от некоторой функции ψ; $Q_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{II})} = -\frac{\varepsilon_2}{\rho_0 c_0^4}\frac{\partial^2 (p^{(\mathrm{I})})^2}{\partial t^2}$ – остальные источники. Такое разделение связано с различными свойствами этих источников. Источники одного типа $Q_{\mathrm{n/r}}^{(\mathrm{II})}$ являются *неизлучающими* (нижний индекс "n/r"– nonradiating). Они порождают поля $p_{\mathrm{loc}}^{(\mathrm{II})}$, которые далее условно будут называться локальными (нижний символ "loc" – local). Эти поля $p_{\mathrm{loc}}^{(\mathrm{II})}$ представлены неоднородными волнами, неизлучаемыми наружу области нелинейного взаимодействия волн $\Re$ (хотя выраженной границы у области $\Re$ обычно нет). Как будет показано далее, поля $p_{\mathrm{loc}}^{(\mathrm{II})}$ являются локальными в том смысле, что в каждой точке $\mathbf{r}$ области $\Re$ значение $p_{\mathrm{loc}}^{(\mathrm{II})}(\mathbf{r},t)$ зависит, в итоге, от значений взаимодействующих полей только в этой же точке $\mathbf{r}$. Источники другого типа $Q_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{II})}$ (нижний символ "r" – radiating), напротив, являются *излучающими* наружу области взаимодействия $\Re$. Они порождают нелокальные поля $p_{\mathrm{n/loc}}^{(\mathrm{II})}(\mathbf{r},t)$ ("n/loc" – nonlocal), которые в каждой точке $\mathbf{r}$ (как внутри, так и вне $\Re$) зависят от значений взаимодействующих полей во всех точках области $\Re$. Именно эти источники отвечают за генерацию нелинейно рассеянных волн на частотах вторых гармоник и комбинационных частотах и представляют основной интерес при исследовании эффекта рассеяния звука на звуке. Таким образом,

$$p^{(\mathrm{II})}(\mathbf{r},t) \equiv p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}}(\mathbf{r},t) + p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{r},t). \quad (37)$$

Оба типа нелинейных вторичных источников ниже будут рассмотрены более подробно. Излучающие источники $Q^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{r}}$ порождают поля $p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}}$, излучаемые наружу области взаимодействия и удовлетворяющие следующему уравнению:

$$\Box^2 p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}} = Q^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{r}} \equiv -\frac{\varepsilon_2}{\rho_0 c_0^4}\frac{\partial^2 (p^{(\mathrm{I})})^2}{\partial t^2}. \quad (38)$$

Для перехода к комплексному аналитическому представлению полей и источников каждая монохроматическая составляющая поля $p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}}(\mathbf{r},t)\big|_{\Omega}$ и вторичных источников $Q^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{r}}(\mathbf{r},t)\big|_{\Omega}$ на заданной частоте Ω (где Ω соответствует частотам вторых гармоник или комбинационным частотам) записывается в виде суммы двух комплекснозначных функций:

$$p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}}(\mathbf{r},t)\big|_{\Omega} = \frac{1}{2}\Big[p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc(C)}}(\mathbf{r})\big|_{\Omega}\exp(-i\Omega t) + \left\{p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc(C)}}(\mathbf{r})\big|_{\Omega}\right\}^*\exp(i\Omega t)\Big],\quad Q^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{r}}(\mathbf{r},t)\big|_{\Omega} =$$
$$= \frac{1}{2}\left[Q^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{r(C)}}(\mathbf{r})\big|_{\Omega}\exp(-i\Omega t) + \left\{Q^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{r(C)}}(\mathbf{r})\big|_{\Omega}\right\}^*\exp(i\Omega t)\right],$$

где * обозначает комплексное сопряжение. Тогда комплексная спектральная амплитуда поля $p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc(C)}}(\mathbf{r})\big|_{\Omega}$ может быть найдена как свертка монохроматической функции Грина однородного пространства $G_0(\mathbf{r}, \Omega)$ на соответствующей частоте с комплексной спектральной амплитудой источников $Q^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{r(C)}}(\mathbf{r})\big|_{\Omega}$:

$$p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc(C)}}(\mathbf{r})\big|_{\Omega} = \int\limits_{\Re} G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\Omega)\, Q^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{r(C)}}(\mathbf{r}')\big|_{\Omega} d\mathbf{r}'. \quad (39)$$

Из (39) следует, что поле $p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc(C)}}(\mathbf{r})\big|_{\Omega}$ является нелокальным, поскольку в фиксированной точке $\mathbf{r}$ это поле зависит от значений источников $Q^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{r(C)}}(\mathbf{r}')\big|_{\Omega}$ и, тем самым, зависит от значений комплексных спектральных амплитуд $p_{1(\mathrm{C})}(\mathbf{r}')$ и $p_{2(\mathrm{C})}(\mathbf{r}')$ первичных полей во всех точках $\mathbf{r}'$ области взаимодействия $\Re$ первичных волн:

$$\begin{gathered} p^{(\mathrm{I})} = p_1 + p_2,\quad p_j(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}[p_{j(\mathrm{C})}(\mathbf{r}) \times \\ \times \exp(-i\omega_j t) + p^*_{j(\mathrm{C})}(\mathbf{r})\exp(i\omega_j t)], \\ \mathbf{v}^{(\mathrm{I})} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,\quad \mathbf{v}_j(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}[\mathbf{v}_{j(\mathrm{C})}(\mathbf{r}) \times \\ \times \exp(-i\omega_j t) + \mathbf{v}^*_{j(\mathrm{C})}(\mathbf{r})\exp(i\omega_j t)],\quad j = 1, 2. \end{gathered} \quad (40)$$

Неизлучающие источники

$$\begin{gathered} Q^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/r}} = \frac{1}{\rho_0 c_0^4}\frac{\partial^2 (p^{(\mathrm{I})})^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0 c_0^4}\left(\frac{\partial p^{(\mathrm{I})}}{\partial t}\right)^2 - \\ -\frac{1}{2}\rho_0\nabla^2(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})})^2 - \rho_0 \mathbf{v}^{(\mathrm{I})}(\nabla^2\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}) \equiv \Box^2\psi \end{gathered} \quad (41)$$

порождают поле $p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}$, удовлетворяющее уравнению

$$\Box^2 p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}} = Q^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/r}} \equiv \Box^2\psi,\ \text{где}\ \Box^2\psi \equiv -\Box^2 L - \frac{2}{c_0^2}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}, \quad (42)$$

и не дают вклада в поле вне $\Re$, так как поля $p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}$ не излучают наружу из области $\Re$. Этот факт нуждается в более детальном пояснении. В рассматриваемой задаче функция ψ, порождающая вторичный источник $\Box^2\psi$, имеет вполне определенную структуру (непоглощающая среда полагается однородной по линейным характеристикам – скорости звука и плотности): как следует из (34) и (35), функция ψ образуется величинами типа $(p^{(\mathrm{I})})^2$ или $(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})})^2 \sim (\nabla p^{(\mathrm{I})})^2$, где $p^{(\mathrm{I})} = p_1 + p_2$, $\mathbf{v}^{(\mathrm{I})} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. В реальном эксперименте первичные волны p_1, p_2 удовлетворяют условию излучения, т.е. при переходе к комплексному аналитическому представлению монохроматических составляющих волн посредством (40) удовлетворяется условие излучения:

$$\begin{gathered} \lim_{r\to\infty}(\sqrt{r})^{D-1}\left(\frac{\partial p_{j(\mathrm{C})}}{\partial r} - ik_j p_{j(\mathrm{C})}\right) = 0, \\ j = 1, 2,\quad r \equiv |\mathbf{r}|,\quad k_j = \frac{\omega_j}{c_0}, \end{gathered} \quad (43)$$

временная зависимость полей $\sim\exp(-i\omega_j t)$, D – размерность пространства. Тогда произведение полей $p_{1(\mathrm{C})}p^{(*)}_{2(\mathrm{C})}$ на соответствующей частоте $\omega_1 \pm \omega_2$ также удовлетворяет условию излучения, так как

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial r}\left(p_{1(\mathrm{C})}p^{(*)}_{2(\mathrm{C})}\right) - ik_{\pm}p_{1(\mathrm{C})}p^{(*)}_{2(\mathrm{C})} = \\ = p^{(*)}_{2(\mathrm{C})}\left\{\frac{\partial p_{1(\mathrm{C})}}{\partial r} - ik_1 p_{1(\mathrm{C})}\right\} + p_{1(\mathrm{C})}\left\{\frac{\partial p_{2(\mathrm{C})}}{\partial r} - ik_2 p_{2(\mathrm{C})}\right\}^{(*)}, \end{gathered} \quad (44)$$

где $k_{\pm} = \dfrac{\omega_1 \pm \omega_2}{c_0}$. Заключение в скобки знака комплексного сопряжения (*) означает, что комплексное сопряжение полей давления $p^{(*)}_{2(\mathrm{C})}$ и колебательной скорости $\mathbf{v}^{(*)}_{2(\mathrm{C})}$ второй первичной волны используется при описании волны только с разностной комбинационной частотой $\Omega = \omega_1 - \omega_2$ и не требуется при суммарной частоте $\Omega = \omega_1 + \omega_2$. Конструкции внутри фигурных скобок в правой части равенства (44) идентичны второму сомножителю произведения, стоящего под знаком предела в условии излучения для первичных волн (43). Тогда каждое слагаемое в (44), и, следовательно, их сумма удовлетворяют условию излучения. Аналогично доказывается соответствие условию излучения части функции ψ (в комплексном аналитическом представлении), формируемой за счет $\mathbf{v}_{1(C)}\mathbf{v}_{2(C)}^{(*)} \sim$ $\sim \nabla p_{1(C)}\nabla p_{2(C)}^{(*)}$, так как операция ∇ и операция $\dfrac{\partial}{\partial r}$ в условии излучения переставимы:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\mathbf{v}_{1(C)}\mathbf{v}_{2(C)}^{(*)}\right) - ik_{\pm}\mathbf{v}_{1(C)}\mathbf{v}_{2(C)}^{(*)} \sim \frac{\partial}{\partial r}\left(\nabla p_{1(C)}\nabla p_{2(C)}^{(*)}\right) - $$
$$- ik_{\pm}\nabla p_{1(C)}\nabla p_{2(C)}^{(*)} = \nabla p_{2(C)}^{(*)}\nabla\left\{\frac{\partial p_{1(C)}}{\partial r} - ik_1 p_{1(C)}\right\} +$$
$$+ \nabla p_{1(C)}\nabla\left\{\frac{\partial p_{2(C)}}{\partial r} - ik_2 p_{2(C)}\right\}^{(*)}.$$

Таким образом, если каждая из двух волн удовлетворяет условию излучения, то их произведение также удовлетворяет условию излучения. Тем самым, функция ψ, формирующая источник $\Box^2\psi$, также удовлетворяет условию излучения. В то же время, поля $p_{\text{loc(C)}}^{(11)}$ удовлетворяют условию излучения по физическому смыслу. Следовательно, решение уравнения (42) единственно при заданном источнике $Q_{\text{n/r}}^{(11)} \equiv \Box^2\psi$ и для комплексной спектральной амплитуды поля $p_{\text{loc(C)}}^{(11)}(\mathbf{r})\big|_{\Omega}$ определяется сверткой функции Грина (на соответствующей частоте) с комплексной спектральной амплитудой этих источников $Q_{\text{n/r(C)}}^{(11)}(\mathbf{r})\big|_{\Omega}$:

$$p_{\text{loc(C)}}^{(11)}(\mathbf{r})\big|_{\Omega} = \int\limits_{\Re} G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\Omega)\, Q_{\text{n/r(C)}}^{(11)}(\mathbf{r}')\big|_{\Omega}\, d\mathbf{r}' =$$
$$= \int\limits_{\Re} G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\Omega)\,\Box^2\psi_{(C)}(\mathbf{r}')\big|_{\Omega}\, d\mathbf{r}' = \psi_{(C)}(\mathbf{r})\big|_{\Omega}. \tag{45}$$

Решение $p_{\text{loc(C)}}^{(11)}(\mathbf{r})\big|_{\Omega}$, получающееся для каждой возможной частоты Ω в результате интегрирования в (45) по *всей* области взаимодействия $\Re$, совпадает с комплексной спектральной амплитудой $\psi_{(C)}(\mathbf{r})\big|_{\Omega}$ функции

$$\psi(\mathbf{r},t)\big|_{\Omega} = \frac{1}{2}\Big[\psi_{(C)}(\mathbf{r})\big|_{\Omega}\exp(-i\Omega t) +$$
$$+ \left\{\psi_{(C)}(\mathbf{r})\big|_{\Omega}\right\}^{*}\exp(i\Omega t)\Big],$$

и, следовательно,

$$p_{\text{loc}}^{(11)}(\mathbf{r},t) \equiv \psi(\mathbf{r},t) \tag{46}$$

уже при произвольной временнóй зависимости полей. Соотношение (46) было проверено численным моделированием для случаев, при которых в качестве p_1, p_2 брались монохроматические пучки, достаточно хорошо удовлетворяющие уравнению Гельмгольца.

Еще раз следует обратить внимание, что поле $p_{\text{loc(C)}}^{(11)}(\mathbf{r})$ в точке $\mathbf{r}$ формируется сверткой (по всем точкам $\mathbf{r}' \in \Re$) функции Грина с нелинейными вторичными источниками $Q_{\text{n/r(C)}}^{(11)}(\mathbf{r}')\big|_{\Omega} = \Box^2\psi_{(C)}(\mathbf{r}')\big|_{\Omega}$. Однако итог свертки зависит только от значения подаламберианного выражения $\psi_{(C)}(\mathbf{r})\big|_{\Omega}$ (и, следовательно, от взаимодействующих первичных полей) в одной точке $\mathbf{r}$. Именно в этом смысле в настоящем контексте употребляется термин "локальное поле".

Итак, при взаимодействии двух немонохроматических волн, удовлетворяющих условию излучения, можно записать

$$p_{\text{loc}}^{(11)}(\mathbf{r},t) = \psi(\mathbf{r},t) = -L - \frac{2}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\frac{1}{4\rho_0}\left(\int^{t} p^{(1)}dt'\right)^2\right\} =$$
$$= -\left[\frac{\rho_0(\mathbf{v}^{(1)})^2}{2} + \frac{(p^{(1)})^2}{2\rho_0 c_0^2} + \frac{1}{\rho_0 c_0^2}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial t}\int^{t} p^{(1)}dt'\right]. \tag{47}$$

Из (47) следует, что неоднородное по своей структуре поле $p_{\text{loc}}^{(11)}(\mathbf{r},t)$ отлично от нуля только лишь внутри области взаимодействия первичных волн. С другой стороны, поле $p_{\text{loc}}^{(11)}(\mathbf{r},t)$ действительно локальное, так как оно зависит от значений первичных полей только в этой же точке $\mathbf{r}$.

При рассмотрении *плоских* первичных волн тождество (46) не выполняется, поскольку плоские волны не удовлетворяют условию излучения. Особый случай представляет собой коллинеарное взаимодействие плоских волн в среде, однородной по линейным характеристикам. Тогда задача становится одномерной, и плотность лагранжиана становится равной нулю: $L \equiv 0$. Следовательно, согласно (36), $\Box^2 p^{(11)} = Q_{\text{r}}^{(11)}$, поскольку неизлучающие вторичные источники отсутствуют, в соответствии с (42):

$$Q_{\text{n/r}}^{(11)} = \Box^2\psi = -\Box^2 L - \frac{2}{c_0^2}\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} \equiv 0,$$

и тогда, по физическому смыслу, отсутствуют создаваемые ими поля: $p_{\text{loc}}^{(11)} \equiv 0$. Однако функция ψ, задаваемая выражением (47), в этом случае оказывается не равной нулю (ψ имеет вид плоской волны), хотя $\Box^2\psi \equiv 0$. Тем самым, $p_{\text{loc}}^{(11)} \neq \psi$.

Аналогичный анализ локальных и нелокальных полей можно провести для колебательной скорости в случае среды, однородной по плотности $\rho_0 = \text{const}_{\mathbf{r}}$ и фазовой скорости $c = c_0 \equiv \text{const}_{\mathbf{r}}$. Поскольку с точностью до второго порядка малости включительно имеет место $\text{rot}\,\mathbf{v} = \text{rot}(\mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{v}^{(11)}) = 0$, выражение (23) можно записать в виде [12, 15]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\nabla\left[p + L\right] = 0, \tag{48}$$

где $L = \frac{\rho_0 \mathbf{v}^2}{2} - \frac{1}{2\rho_0 c_0^2} p^2$. Применение оператора $\Box^2$ к (48) с учетом переставимости операторов ∇^2 и $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ с оператором $\Box^2$, дает:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Box^2 \mathbf{v}) + \frac{1}{\rho_0}\nabla(\Box^2 p + \Box^2 L) = 0. \quad (49)$$

Подстановка в выражение (49), записанное для нелинейно рассеянных полей второго порядка, источников нелинейно рассеянного поля давления $\Box^2 p^{(\mathrm{II})}$ в виде (34) и последующее снятие оператора $\frac{\partial}{\partial t}$ приводит к волновому уравнению для $\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}$, порождаемому соответствующими нелинейными вторичными источниками $\mathbf{S}^{(\mathrm{II})}$:

$$\Box^2 \mathbf{v}^{(\mathrm{II})} = \mathbf{S}^{(\mathrm{II})} \equiv \frac{1}{\rho_0^2 c_0^4}\nabla\left[\varepsilon_2(\mathbf{r})\frac{\partial\left(p^{(\mathrm{I})}\right)^2}{\partial t}\right] + \frac{2}{\rho_0 c_0^2}\nabla\left[\frac{\partial L}{\partial t}\right],$$
$$L = \frac{\rho_0\left(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\right)^2}{2} - \frac{1}{2\rho_0 c_0^2}\left(p^{(\mathrm{I})}\right)^2. \quad (50)$$

Здесь запись $\varepsilon_2(\mathbf{r})$ подчеркивает возможную зависимость нелинейного параметра от координат.

По аналогии с полем давления $p^{(\mathrm{II})}$ в (36), нелинейные вторичные источники для колебательной скорости $\mathbf{S}^{(\mathrm{II})} \equiv \mathbf{S}_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{II})} + \mathbf{S}_{\mathrm{n/r}}^{(\mathrm{II})}$ делятся на излучающие $\mathbf{S}_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{II})} = \frac{1}{\rho_0^2 c_0^4}\nabla\left[\varepsilon_2(\mathbf{r})\frac{\partial\left(p^{(\mathrm{I})}\right)^2}{\partial t}\right]$ и неизлучающие $\mathbf{S}_{\mathrm{n/r}}^{(\mathrm{II})} = \frac{2}{\rho_0 c_0^2}\nabla\left[\frac{\partial L}{\partial t}\right]$ источники. Эти источники, в свою очередь, создают, соответственно, нелокальные $\mathbf{v}_{\mathrm{n/loc}}^{(\mathrm{II})}$ и локальные $\mathbf{v}_{\mathrm{loc}}^{(\mathrm{II})}$ поля колебательной скорости: $\mathbf{v}^{(\mathrm{II})} \equiv \mathbf{v}_{\mathrm{n/loc}}^{(\mathrm{II})} + \mathbf{v}_{\mathrm{loc}}^{(\mathrm{II})}$. Поля $\mathbf{v}_{\mathrm{n/loc}}^{(\mathrm{II})}$ и $\mathbf{v}_{\mathrm{loc}}^{(\mathrm{II})}$ удовлетворяют соответствующему волновому уравнению:

$$\Box^2 \mathbf{v}_{\mathrm{n/loc}}^{(\mathrm{II})} = \mathbf{S}_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{II})} \equiv \frac{1}{\rho_0^2 c_0^4}\nabla\left[\varepsilon_2(\mathbf{r})\frac{\partial\left(p^{(\mathrm{I})}\right)^2}{\partial t}\right], \quad (51)$$

$$\Box^2 \mathbf{v}_{\mathrm{loc}}^{(\mathrm{II})} = \mathbf{S}_{\mathrm{n/r}}^{(\mathrm{II})} \equiv \frac{2}{\rho_0 c_0^2}\nabla\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right),$$
$$L = \frac{\rho_0\left(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\right)^2}{2} - \frac{\left(p^{(\mathrm{I})}\right)^2}{2\rho_0 c_0^2}. \quad (52)$$

Из (35) следует выражение для $\frac{\partial L}{\partial t}$, что приводит волновое уравнение (52) к виду

$$\Box^2 \mathbf{v}_{\mathrm{loc}}^{(\mathrm{II})} = \frac{1}{2\rho_0^2 c_0^2}\Box^2\left[\nabla\frac{\partial}{\partial t}\left(\int^t p^{(\mathrm{I})} dt'\right)^2\right]. \quad (53)$$

Удобно рассчитать нелинейно рассеянное поле колебательной скорости $\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}$ с помощью предварительно найденного поля давления $p^{(\mathrm{II})}$. Учитывая (48), в общем случае можно записать:

$$\mathbf{v}^{(\mathrm{II})} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla\left(\int^t p_{\mathrm{n/loc}}^{(\mathrm{II})} dt'\right) - \frac{1}{\rho_0}\nabla\left(\int^t\left(p_{\mathrm{loc}}^{(\mathrm{II})} + L\right)dt'\right). \quad (54)$$

Из (54) следует, что нелокальное поле –

$$\mathbf{v}_{\mathrm{n/loc}}^{(\mathrm{II})} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla\left(\int^t p_{\mathrm{n/loc}}^{(\mathrm{II})} dt'\right), \quad (55)$$

а локальное –

$$\mathbf{v}_{\mathrm{loc}}^{(\mathrm{II})} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla\left(\int^t (p_{\mathrm{loc}}^{(\mathrm{II})} + L) dt'\right). \quad (56)$$

Поскольку плотность лагранжиана L представляет собой полный даламбериан, – например, см. (35), – и при этом выражение под знаком оператора Д'Аламбера отлично от нуля только в области взаимодействия первичных волн, то функция L, наряду с $p_{\mathrm{loc}}^{(\mathrm{II})}$, дает вклад именно в локальное поле $\mathbf{v}_{\mathrm{loc}}^{(\mathrm{II})}$.

При выполнении условия излучения для первичных полей в двумерном или трехмерном случаях, имеет место выражение (47) для $p_{\mathrm{loc}}^{(\mathrm{II})}$ и подстановка его в (56) дает

$$\mathbf{v}_{\mathrm{loc}}^{(\mathrm{II})} = \frac{1}{2\rho_0^2 c_0^2}\nabla\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\int^t p^{(\mathrm{I})} dt'\right)^2\right]. \quad (57)$$

При взаимодействии двух первичных волн p_1 и p_2 будет $p^{(\mathrm{I})} = p_1 + p_2$, и тогда в общем случае

$$\mathbf{v}_{\mathrm{loc}}^{(\mathrm{II})} = \frac{1}{2\rho_0^2 c_0^2} \times$$
$$\times \nabla\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\int^t p_1 dt'\right)^2 + \left(\int^t p_2 dt'\right)^2 + 2\left(\int^t p_1 dt'\right)\left(\int^t p_2 dt'\right)\right]. \quad (58)$$

Таким образом, выражения (55) и (58) определяют вид нелокального и локального поля колебательной скорости. Эти выражения можно также получить непосредственно из волновых уравнений (51) и (52). Следует обратить внимание, что волновое уравнение для колебательной скорости второго порядка $\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}$, приведенное в [16], содержит неточности.

2.2. Локальные и нелокальные поля третьего порядка

Выполненный в п. 2.1 анализ показал, что нелинейные вторичные источники $Q^{(\mathrm{II})}$ для поля давления состоят из излучающей $Q_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{II})}$ и неизлучающей части $Q_{\mathrm{n/r}}^{(\mathrm{II})}$, согласно (36). Эти источники порождают, соответственно, нелокальные поля $p_{\mathrm{n/loc}}^{(\mathrm{II})}$ и локальные поля $p_{\mathrm{loc}}^{(\mathrm{II})}$: $Q^{(\mathrm{II})} \equiv Q_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{II})} + Q_{\mathrm{n/r}}^{(\mathrm{II})}$;

$p^{(II)} \equiv p^{(II)}_{\text{n/loc}} + p^{(II)}_{\text{loc}}$. Аналогичные части выделяются в нелинейных источниках $\mathbf{S}^{(II)}$, порождающих поле колебательной скорости: $\mathbf{S}^{(II)} \equiv \mathbf{S}^{(II)}_{\text{r}} + \mathbf{S}^{(II)}_{\text{n/r}}$; $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}^{(II)}_{\text{n/loc}} + \mathbf{v}^{(II)}_{\text{loc}}$. Существование локальных и нелокальных полей второго порядка, как оказалось, сильно влияет на характер описания нелинейных эффектов третьего порядка. Все нелинейные вторичные источники третьего порядка $Q^{(III)}$, в конечном счете, кубичны по первичным возмущениям. Однако по своей физической природе источники $Q^{(III)}$ следует подразделять на вторичные источники $Q^{(2\times 2)}$, возникающие за счет двух последовательных актов нелинейного взаимодействия второго порядка (двукратного взаимодействия второго порядка), и вторичные источники $Q^{(3)}$, возникающие за счет единственного акта нелинейного взаимодействия чисто третьего порядка. Источники $Q^{(2\times 2)}$ и $Q^{(3)}$ порождают, соответственно, поле давления от двукратного взаимодействия второго порядка $p^{(2\times 2)}$ и поле давления чисто третьего порядка $p^{(3)}$:

$$Q^{(III)} \equiv Q^{(2\times2)} + Q^{(3)}, \quad p^{(III)} \equiv p^{(2\times2)} + p^{(3)}. \tag{59}$$

Следует отметить, что, поскольку при данной постановке задачи необходимо знать поля второго порядка (например, $p^{(II)}$) внутри области $\Re$ взаимодействия первичных волн, то при расчете этих полей необходимо учитывать не только излучающую часть нелинейных вторичных источников $Q^{(II)}_{\text{r}}$, но также и неизлучающую часть источников $Q^{(II)}_{\text{n/r}}$.

Разделение вторичных источников $Q^{(III)}$ на $Q^{(2\times2)}$ и $Q^{(3)}$ оказалось достаточно сложной задачей. Логично считать, что в источники чисто третьего порядка $Q^{(3)}$ должны входить те члены выражения (29) или (33), которые образованы комбинациями типа $a^{(I)}(\mathbf{r},t)b^{(I)}(\mathbf{r},t)c^{(I)}(\mathbf{r},t)$, т.е. те члены, в которых присутствуют три сомножителя в виде полей первого порядка, относящиеся *к одной и той же* точке $\mathbf{r}$. К таким членам заведомо относятся последние пять слагаемых в (29) или (33). Тогда можно было бы предположить, что к источникам $Q^{(2\times2)}$ следует отнести все остальные члены, которые представимы в виде комбинаций типа $a^{(I)}b^{(II)}$. Однако такой принцип разделения оказывается неоднозначным. Это можно проиллюстрировать на конкретном примере члена

$$-\frac{(\varepsilon_2(\mathbf{r})-1)}{\rho_0 c_0^4}\frac{\partial^2(2p^{(I)}p^{(II)})}{\partial t^2},$$

используя связь $p^{(I)} = c_0^2\rho^{(I)}$ и выразив $p^{(II)}$ через $\rho^{(II)}$ с помощью нелинейной связи

$$p^{(II)} = c_0^2\rho^{(II)} + \frac{c_0^2(\varepsilon_2(\mathbf{r})-1)}{\rho_0}(\rho^{(I)})^2,$$

следующей из (8):

$$-\frac{(\varepsilon_2(\mathbf{r})-1)}{\rho_0 c_0^4}\frac{\partial^2(2p^{(I)}p^{(II)})}{\partial t^2} = -\frac{(\varepsilon_2(\mathbf{r})-1)}{\rho_0}\times \\ \times\frac{\partial^2(2\rho^{(I)}\rho^{(II)})}{\partial t^2} - \frac{(\varepsilon_2(\mathbf{r})-1)^2}{\rho_0^2}\frac{\partial^2\{2(\rho^{(I)})^3\}}{\partial t^2}. \tag{60}$$

Второе слагаемое в правой части выражения (60) относится, согласно описанной выше логике, уже к источникам $Q^{(3)}$, как формируемое за счет $(\rho^{(I)})^3$, хотя изначально вся левая часть (60) относилась, казалось бы, к $Q^{(2\times2)}$. Поэтому признак отнесения к $Q^{(2\times2)}$ членов типа $a^{(I)}b^{(II)}$ является неоднозначным и, следовательно, не применим.

По-видимому, единственный возможный *однозначный* принцип разделения источников $Q^{(III)}$ на $Q^{(2\times2)}$ и $Q^{(3)}$ заключается в нелокальном характере формирования источников $Q^{(2\times2)}$, соответствующих двукратному взаимодействию второго порядка в *разных* областях пространства, и локальном характере формирования источников чисто третьего порядка $Q^{(3)}$. Так, вторичные источники $Q^{(2\times2)}(\mathbf{r},t)$ в каждой точке $\mathbf{r}$ области $\Re$ возникают за счет взаимодействия в этой точке $\mathbf{r}$ первичного поля, например, $p^{(I)}(\mathbf{r},t)$ или $\mathbf{v}^{(I)}(\mathbf{r},t)$, и *нелокального* поля второго порядка, например, $p^{(II)}_{\text{n/loc}}(\mathbf{r},t)$ или $\mathbf{v}^{(II)}_{\text{n/loc}}(\mathbf{r},t)$. Необходимо подчеркнуть, что $Q^{(2\times2)}(\mathbf{r},t)$ формируется именно за счет нелокального поля, порожденного в первом акте взаимодействия второго порядка, а не за счет всего полного поля $p^{(II)}(\mathbf{r},t)$ или $\mathbf{v}^{(II)}(\mathbf{r},t)$, как это ошибочно полагалось ранее в [2, 3]. Тем самым, к $Q^{(2\times2)}$ следует отнести члены, представимые в виде комбинаций типа $a^{(I)}(\mathbf{r},t)b^{(II)}_{\text{n/loc}}(\mathbf{r},t)$. Такой принцип объясняется тем фактом, что значение нелокального поля $p^{(II)}_{\text{n/loc}}(\mathbf{r},t)$ в фиксированной точке $\mathbf{r}$ зависит от значений порождающих его излучающих источников $Q^{(II)}_{\text{r}}(\mathbf{r}',t)$ (и, следовательно, от значений двух взаимодействующих первичных полей) не только в той же самой точке $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$, но и во всех точках $\mathbf{r}' \in \Re$ области взаимодействия (через интегральную связь). Поэтому значение $Q^{(2\times2)}(\mathbf{r},t)$ в конкретной точке $\mathbf{r}$ зависит от характеристик первичных полей в разных частях области взаимодействия и, в этом смысле, является *нелокально сформированным* источником. Итак, двукратное взаимодействие второго порядка является *нелокально формируемым* процессом.

Вторичные источники чисто третьего порядка $Q^{(3)}(\mathbf{r},t)$ возникают локально за счет взаимодействия в одной единственной точке $\mathbf{r}$ (и только в ней) сразу трех первичных волн. Тем самым, $Q^{(3)}(\mathbf{r},t)$ никак не зависит от значений первичных полей в других точках области взаимодействия, что позволяет считать взаимодействие чисто третьего порядка *локально формируемым* процессом. Локальное взаимодействие трех первичных возмущений порождает, в итоге, поле чисто третьего порядка $p^{(3)}$.

При разделении эффектов на двукратное взаимодействие второго порядка и взаимодействие чисто третьего порядка нужна большая осторожность и аккуратность при рассмотрении в (33) членов

$$-\rho_0\nabla^2(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}) - \rho_0\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}(\nabla^2\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}) - \rho_0\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}(\nabla^2\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}),$$

содержащих оператор ∇^2, который можно дополнить до полного оператора Д'Аламбера: $\nabla^2 \equiv \equiv \square^2 + \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$. Тогда

$$\begin{gathered}-\rho_0\nabla^2\left(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}\right) - \rho_0\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\left(\nabla^2\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}\right) - \rho_0\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}\left(\nabla^2\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\right) = \\ = -\rho_0\left(\square^2 + \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}\right) - \rho_0\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\left(\square^2\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}\right) - \\ - \frac{\rho_0}{c_0^2}\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\frac{\partial^2\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}}{\partial t^2} - \rho_0\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}\left(\square^2\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\right) - \frac{\rho_0}{c_0^2}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}\frac{\partial^2\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}}{\partial t^2}.\end{gathered} \tag{61}$$

Нужно остановиться более подробно на некоторых слагаемых выражения (61). При условии $c = c_0 \equiv \mathrm{const}_{\mathbf{r}}$ выполняется тождество $\square^2\mathbf{v}^{(\mathrm{I})} \equiv 0$, обнуляющее слагаемое $-\rho_0\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}\left(\square^2\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\right) \equiv 0$. В слагаемом $-\rho_0\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\left(\square^2\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}\right)$ присутствует сомножитель $\square^2\mathbf{v}^{(\mathrm{II})} = \mathbf{S}^{(\mathrm{II})}$, где $\mathbf{S}^{(\mathrm{II})}$ – нелинейные источники второго порядка, порождающие поле колебательной скорости $\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}$, согласно (50).

Несмотря на то, что в соответствии с (51) и (52) источники $\mathbf{S}^{(\mathrm{II})} = \square^2\mathbf{v}^{(\mathrm{II})} \equiv \square^2\left(\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}} + \mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}\right)$ порождают как нелокальную $\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}}$, так и локальную $\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}$ части поля $\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}$, сами источники $\mathbf{S}^{(\mathrm{II})}$ формируются локальным образом, поскольку в каждой точке $\mathbf{r}$ значение $\mathbf{S}^{(\mathrm{II})}(\mathbf{r})$ формируется произведением взаимодействующих первичных полей $p^{(\mathrm{I})}$ или $\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}$ только в той же самой точке $\mathbf{r}$. Таким образом, слагаемое $-\rho_0\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\left(\square^2\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}\right) = -\rho_0\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{S}^{(\mathrm{II})}$ в (61) целиком является именно *локально формируемым* источником и, следовательно, относится к нелинейным источникам чисто третьего порядка $Q^{(3)}$, порожденным взаимодействием трех первичных волн только в одной точке. Упомянутое слагаемое можно переписать, используя (50), в следующем виде:

$$\begin{gathered}-\rho_0\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\left(\square^2\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}\right) = \\ = -\frac{1}{\rho_0 c_0^4}\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\nabla\left[\left(\varepsilon_2(\mathbf{r}) - 1\right)\frac{\partial\left(p^{(\mathrm{I})}\right)^2}{\partial t}\right] - \frac{\rho_0}{c_0^2}\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\nabla\frac{\partial\left(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\right)^2}{\partial t}.\end{gathered} \tag{62}$$

Данный источник нелинейного взаимодействия первичных волн зависит не только от самого значения нелинейного параметра $\varepsilon_2(\mathbf{r})$ в точке $\mathbf{r}$, но и от его производной по координатам $\nabla\varepsilon_2(\mathbf{r})$, что само по себе является интересным фактом.

Итак, операции $\nabla^2 p$, $\nabla^2\mathbf{v}$ требуют особого внимания с точки зрения деления источников $Q^{(\mathrm{III})}$ на $Q^{(2\times 2)}$ и $Q^{(3)}$, поскольку $\nabla^2 \equiv \square^2 + \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, а операция $\square^2$ может влиять на тип вторичного источника (приводить к возникновению локально формируемого источника). В то же время производная по времени на тип источника никак не влияет.

Все остальные слагаемые выражения (61) можно преобразовать с помощью представления поля колебательной скорости второго порядка $\mathbf{v}^{(\mathrm{II})} = \mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}} + + \mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}$ в виде суммы нелокальной и локальной составляющих в соответствии с (51), (52). При этом слагаемое $-\rho_0\square^2\left(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}\right)$ в (61) запишется как

$$-\rho_0\square^2\left(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}\right) = -\rho_0\square^2\left(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}}\right) - \rho_0\square^2\left(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}\right). \tag{63}$$

Поскольку источник (63) представлен в виде полного даламбериана, то он создает поле давления, равное поддаламберианному выражению $-\rho_0\left(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}}\right) - \rho_0\left(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}\right)$. Это обусловлено тем, что при выполнении условия излучения для взаимодействующих полей, оператор Д'Аламбера является обратным к интегральному оператору свертки, имеющему ядро в виде функции Грина и действующему на вторичные источники. Данный факт обсуждался в п. 2.1 в связи с анализом полей, возникающих за счет нелинейных источников в виде полного даламбериана. Поскольку $\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}} \neq 0$ только лишь внутри области взаимодействия волн $\Re$, то источник $-\rho_0\square^2\left(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}\right)$ является неизлучающим вне $\Re$ и не создает поле, которое можно бы было зарегистрировать вне области $\Re$. Следовательно, поскольку в задаче томографии исходными экспериментальными данными являются поля третьего порядка, регистрируемые вне $\Re$, то этот источник можно исключить из рассмотрения. Что касается источника $-\rho_0\square^2\left(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}}\right)$, то он порождает поле давления $-\rho_0\left(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}}\right)$, отличное от нуля везде в области пересечения полей $\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}$ и $\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}}$, в том числе, и вне $\Re$. Однако в рассматриваемых в [1–3] схемах томографии, основанных на взаимодействии трех первичных сигналов, поле $-\rho_0\left(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}}\right)$, в идеале, не регистрируется на приемнике, поскольку на приемник не должны попадать первичные поля в силу слабости полезных сигналов третьего порядка. На практике возможное остаточное влияние поля $-\rho_0\left(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}}\right)$ подавляется благодаря применению корреляционной обработки типа согласованной фильтрации.

Таким образом, с учетом вышесказанного и соотношения (62), слагаемые в правой части выражения (61) можно разделить на части, относящиеся к $Q^{(2\times 2)}$ (формируются произведениями типа $\sim\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}}$) и $Q^{(3)}$ (формируются произведениями типа $\sim\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}$):

$$-\rho_0\nabla^2\left(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}\right)-\rho_0\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\left(\nabla^2\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}\right)-\rho_0\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}\left(\nabla^2\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\right)=$$
$$=\left\{-\rho_0\Box^2\left(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}}\right)-\frac{\rho_0}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\rho_0}{c_0^2}\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\frac{\partial^2\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}}}{\partial t^2}-\frac{\rho_0}{c_0^2}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}}\frac{\partial^2\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}}{\partial t^2}\right\}_{Q^{(2\times2)}}+$$
$$+\left\{-\rho_0\Box^2\left(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}\right)-\frac{\rho_0}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}\right)-\right. \quad (64)$$
$$-\frac{1}{\rho_0c_0^4}\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\nabla\left[(\varepsilon_2(\mathbf{r})-1)\frac{\partial\left(p^{(\mathrm{I})}\right)^2}{\partial t}\right]-$$
$$\left.-\frac{\rho_0}{c_0^2}\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\nabla\frac{\partial\left(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\right)^2}{\partial t}-\frac{\rho_0}{c_0^2}\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\frac{\partial^2\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}}{\partial t^2}-\frac{\rho_0}{c_0^2}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}\frac{\partial^2\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}}{\partial t^2}\right\}_{Q^{(3)}}.$$

В первых двух членах выражения (33), т.е.

$$-\frac{(\varepsilon_2(\mathbf{r})-1)}{\rho_0c_0^4}\frac{\partial^2(2p^{(\mathrm{I})}p^{(\mathrm{II})})}{\partial t^2}-\frac{2}{\rho_0c_0^4}\left(\frac{\partial p^{(\mathrm{I})}}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial p^{(\mathrm{II})}}{\partial t}\right),$$

поле давления второго порядка $p^{(\mathrm{II})}\equiv p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}}+p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}$ представляется в виде суммы нелокального и локального полей, и тогда произведения типа $\sim p^{(\mathrm{I})}p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}}$ дадут вклад в $Q^{(2\times 2)}$, а произведения типа $\sim p^{(\mathrm{I})}p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}$ дадут вклад в $Q^{(3)}$. Последние пять членов в (33) представляют собой произведение трех первичных возмущений и поэтому заведомо дают вклад только в $Q^{(3)}$.

Итак, перечисленные факты и выражение (64) позволяют разделить нелинейные вторичные источники третьего порядка $Q^{(\mathrm{III})}$, приведенные в (33), на $Q^{(2\times 2)}$ и $Q^{(3)}$, в соответствии с (59). Тем самым, может быть дано отдельное описание соответствующих эффектов. Так, для двукратного взаимодействия второго порядка имеем

$$\nabla^2p^{(2\times2)}-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2p^{(2\times2)}}{\partial t^2}=Q^{(2\times2)},$$

где

$$Q^{(2\times2)}=-\frac{(\varepsilon_2(\mathbf{r})-1)}{\rho_0c_0^4}\frac{\partial^2(2p^{(\mathrm{I})}p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}})}{\partial t^2}-$$
$$-\frac{1}{\rho_0c_0^4}\left(2\frac{\partial p^{(\mathrm{I})}}{\partial t}\frac{\partial p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}}}{\partial t}\right)-\frac{1}{2}\rho_0\Box^2\left(2\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}}\right)- \quad (65)$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\rho_0}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(2\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}}\right)-\frac{\rho_0}{c_0^2}\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\frac{\partial^2\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}}}{\partial t^2}-\frac{\rho_0}{c_0^2}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}}\frac{\partial^2\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}}{\partial t^2}.$$

Здесь поле $p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}}$ находится из выражений (38) и (39), а поле $\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}}$ – из (55). Для взаимодействия чисто третьего порядка имеем

$$\nabla^2p^{(3)}-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2p^{(3)}}{\partial t^2}=Q^{(3)},$$

где

$$Q^{(3)}=-\frac{(\varepsilon_2(\mathbf{r})-1)}{\rho_0c_0^4}\frac{\partial^2(2p^{(\mathrm{I})}p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}})}{\partial t^2}-\frac{1}{\rho_0c_0^4}\left(2\frac{\partial p^{(\mathrm{I})}}{\partial t}\frac{\partial p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}}{\partial t}\right)-$$
$$-\rho_0\Box^2\left(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}\right)-\frac{1}{2}\frac{\rho_0}{c_0^2}\frac{\partial^2\left(2\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}\right)}{\partial t^2}-$$
$$-\frac{\rho_0}{c_0^2}\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\frac{\partial^2\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}}{\partial t^2}-\frac{\rho_0}{c_0^2}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}\frac{\partial^2\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}}{\partial t^2}-$$
$$-\frac{1}{\rho_0c_0^4}\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\nabla\left[(\varepsilon_2(\mathbf{r})-1)\frac{\partial\left(p^{(\mathrm{I})}\right)^2}{\partial t}\right]-$$
$$-\frac{\rho_0}{c_0^2}\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\left\{\nabla\frac{\partial\left(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\right)^2}{\partial t}\right\}+ \quad (66)$$
$$+\frac{\left\{2(\varepsilon_2(\mathbf{r})-1)^2-\varepsilon_3(\mathbf{r})\right\}}{\rho_0^2c_0^6}\frac{\partial^2\left(p^{(\mathrm{I})}\right)^3}{\partial t^2}+$$
$$+\frac{2(\varepsilon_2(\mathbf{r})-1)}{\rho_0^2c_0^6}\left(\frac{\partial p^{(\mathrm{I})}}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\left(p^{(\mathrm{I})}\right)^2}{\partial t}\right)+$$
$$+\frac{2}{c_0^2}(\nabla\mathbf{v}^{(\mathrm{I})})\nabla\left(p^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\right)-$$
$$-\frac{1}{c_0^2}\nabla\left[\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\left\{\nabla\left(p^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\right)\right\}\right]-\frac{1}{2c_0^2}\nabla\left[p^{(\mathrm{I})}\nabla\left(\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\right)^2\right],$$

причем

$$-\frac{1}{\rho_0c_0^4}\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\nabla\left[(\varepsilon_2(\mathbf{r})-1)\frac{\partial\left(p^{(\mathrm{I})}\right)^2}{\partial t}\right]=$$
$$=-\frac{\left[\nabla\varepsilon_2(\mathbf{r})\right]}{\rho_0c_0^4}\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\frac{\partial\left(p^{(\mathrm{I})}\right)^2}{\partial t}+ \quad (67)$$
$$+\frac{(\varepsilon_2(\mathbf{r})-1)}{c_0^4}\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\frac{\partial}{\partial t}\left[2p^{(\mathrm{I})}\frac{\partial\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}}{\partial t}\right],$$

так как $-\frac{1}{\rho_0}\nabla p^{(\mathrm{I})}=\frac{\partial\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}}{\partial t}$. Поле $p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}$ находится из выражения (47), а поле $\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}$ – из (57), (58). При переходе из (33) в (65), (66) первичные поля возмущений плотности $\rho^{(\mathrm{I})}$ были выражены как $\rho^{(\mathrm{I})}=\frac{1}{c_0^2}p^{(\mathrm{I})}$, чтобы далее рассматривать лишь поля давления $p=p^{(\mathrm{I})}+p^{(\mathrm{II})}+p^{(\mathrm{III})}$ и колебательной скорости $\mathbf{v}=\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}+\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}+\mathbf{v}^{(\mathrm{III})}$, исключив поля $\rho'=\rho^{(\mathrm{I})}+\rho^{(\mathrm{II})}+\rho^{(\mathrm{III})}$. Это облегчит дальнейший анализ нелинейных эффектов.

Целесообразно еще раз обратить внимание на признак разделения $Q^{(\mathrm{III})}$ на $Q^{(2\times 2)}$ и $Q^{(3)}$. В отличие от $Q^{(2\times2)}(\mathbf{r},t)$, нелинейные вторичные источники чисто третьего порядка $Q^{(3)}(\mathbf{r},t)$ возникают в точке $\mathbf{r}$ за счет взаимодействия трех первичных волн непосредственно в этой же точке $\mathbf{r}$. Тем самым, как уже было сказано ранее, источники $Q^{(3)}(\mathbf{r},t)$ являются локально формируемыми в том смысле, что в каждой точке $\mathbf{r}$ источники $Q^{(3)}(\mathbf{r},t)$ зависят от вида первичных полей только лишь в этой точке $\mathbf{r}$. Источники $Q^{(2\times2)}(\mathbf{r},t)$, напротив, зависят от вида первичных полей в разных точках $\mathbf{r}' \in \Re$ области взаимодействия.

Источники $Q^{(3)}(\mathbf{r},t)$ формируются двумя способами. Во-первых, они формируются теми членами (66), которые содержат произведение трех первичных возмущений $p^{(\mathrm{I})}$ или $\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}$, – это последние семь слагаемых в (66). Во-вторых, источники $Q^{(3)}(\mathbf{r},t)$ формируются за счет взаимодействия в точке $\mathbf{r}$ первичных полей с локальными полями второго порядка $p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{r},t)$ или $\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{r},t)$, т.е. теми членами в (66), которые содержат произведение типа “(первичное поле) × (локальное поле второго порядка)”, – это первые шесть слагаемых. Дело в том, что локальные поля второго порядка $p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{r},t)$ зависят, как следует из (47), (57), (58), от значений первичных полей (в виде двух сомножителей) $p^{(\mathrm{I})}(\mathbf{r},t)$ или $\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}(\mathbf{r},t)$ только в той же точке $\mathbf{r}$; именно это и есть признак локальности поля. Тогда при втором акте взаимодействия локальных полей второго порядка с первичными волнами порождаются нелинейные источники $Q^{(3)}(\mathbf{r},t)$, которые, в конечном счете, также зависят от значений первичных полей (уже в виде трех сомножителей) только лишь в той же точке $\mathbf{r}$. Именно по этой причине такие источники относятся к источникам чисто третьего порядка. Надо отметить, что несмотря на формальное рассмотрение двух последовательных актов взаимодействия второго порядка, по сути, эти два акта взаимодействия в данном случае происходят одновременно, и, следовательно, нелинейные источники $Q^{(3)}(\mathbf{r},t)$, сформированные вторым способом, можно считать не только локальными, но и возникающими единовременно.

Явление образования поля $p^{(3)}$ за счет источников $Q^{(3)}(\mathbf{r},t)$ при втором способе их формирования интересно само по себе. Согласно (42) и (52), (53), неизлучающие источники второго порядка $Q^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/r}}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{S}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/r}}(\mathbf{r},t)$, которые можно представить в виде полного даламбериана $\Box^2$ от некоторой функции, создают неоднородные локальные поля $p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{r},t)$, соответственно. Эти неоднородные поля не излучаются наружу области взаимодействия $\Re$, и поэтому в большинстве работ, посвященных нелинейным эффектам второго порядка, данные поля опускаются при анализе нелинейных эффектов. Однако при рассмотрении нелинейных эффектов более высокого порядка, например, анализируемого сейчас третьего порядка, эти поля играют существенную роль, поскольку они взаимодействуют с первичными полями, в результате чего рождаются поля $p^{(3)}$ и $\mathbf{v}^{(3)}$ третьего порядка, которые уже излучаются наружу области $\Re$ и могут быть зарегистрированы.

Еще один заслуживающий внимания факт заключается в следующем. При расчете поля давления второго порядка $p^{(\mathrm{II})}$ *вне* области взаимодействии двух первичных волн необходимо учитывать только излучающую часть нелинейных вторичных источников $Q^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{r}} = -\dfrac{\varepsilon_2}{\rho_0 c_0^4}\dfrac{\partial^2\left(p^{(\mathrm{I})}\right)^2}{\partial t^2}$, см. (38). Согласно (41) и (42), неизлучающая часть $Q^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/r}}$ нелинейных источников второго порядка в случае взаимодействия двух *первичных* волн представима в виде полного даламбериана от некоторой функции. Поэтому источники $Q^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/r}}$ создают локальные поля $p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}$, не распространяющиеся вне области взаимодействия $\Re$. В случае же второго акта взаимодействия – взаимодействия первичной волны с нелокальными $(p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}}, \mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc}})$ и локальными $(p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}}, \mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{loc}})$ полями второго порядка, соответствующие члены

$$\begin{gathered}\frac{1}{\rho_0 c_0^4}\frac{\partial^2(2p^{(\mathrm{I})}p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc(loc)}})}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0 c_0^4}\left(2\frac{\partial p^{(\mathrm{I})}}{\partial t}\frac{\partial p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc(loc)}}}{\partial t}\right) - \\ - \frac{1}{2}\rho_0\nabla^2\left(2\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc(loc)}}\right) - \\ - \rho_0\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\left(\nabla^2\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc(loc)}}\right) - \rho_0\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc(loc)}}\left(\nabla^2\mathbf{v}^{(\mathrm{I})}\right)\end{gathered} \tag{68}$$

в выражении (33) для источников третьего порядка $Q^{(\mathrm{III})}$ представить в виде полного даламбериана уже нельзя. Поэтому во втором акте взаимодействия источники (68) дают вклад в поля чисто третьего порядка $p^{(3)}$ и в поля от двукратного взаимодействия второго порядка $p^{(2\times2)}$, которые уже излучаются наружу области взаимодействия $\Re$. Это объясняется тем, что для полей второго порядка $p^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc(loc)}}$, $\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}_{\mathrm{n/loc(loc)}}$ не выполняются все условия, необходимые для выделения полного даламбериана в членах (68). Так, не выполняется условие линеаризации уравнений гидродинамики (в этих уравнениях уже необходимо учитывать нелинейные члены), поскольку $\rho_0\dfrac{\partial\mathbf{v}^{(\mathrm{II})}}{\partial t} \neq -\nabla p^{(\mathrm{II})}$, $\dfrac{\partial\rho^{(\mathrm{II})}}{\partial t} + \rho_0\nabla\mathbf{v}^{(\mathrm{II})} \neq 0$, $p^{(\mathrm{II})} \neq c_0^2\rho^{(\mathrm{II})}$. Кроме того, не выполняется условие равенства нулю внутри области $\Re$ даламбериана каждого из взаимодействующих полей, поскольку нелинейные вторичные источники полей второго порядка возникают как раз внутри области взаимодействия первичных волн $\Re$, за счет чего $\Box^2 \mathbf{v}^{(11)} \neq 0$, $\Box^2 p^{(11)} \neq 0$, $\Box^2 \rho^{(11)} \neq 0$ внутри $\Re$.

Надо отметить, что разделение нелинейных вторичных источников на источники чисто третьего порядка и источники от двукратного взаимодействия второго порядка не всегда является строгим. Так, при расчете поля $\mathbf{v}^{(11)}_{\mathrm{n/loc}}$, зависящего от $\nabla p^{(11)}_{\mathrm{n/loc}}$ согласно (55), или при расчете поля $p^{(11)}$, зависящего от $\nabla \mathbf{v}^{(11)}$ как

$$p^{(11)} = \frac{\varepsilon_2 - 1}{\rho_0 c^2}\left(p^{(1)}\right)^2 - $$
$$- c^2 \int^t \left[\rho_0 \nabla \mathbf{v}^{(11)} + \nabla \mathbf{v}^{(1)}\left(\nabla \rho^{(1)}\right)\right] dt',$$

в выражениях для $\mathbf{v}^{(11)}_{\mathrm{n/loc}}$ или $p^{(11)}_{\mathrm{n/loc}}$ могут возникнуть члены, пропорциональные произведению двух первичных полей. Тогда после повторного взаимодействия этих членов с первичной волной возникают нелинейные источники, являющиеся, по сути, нелинейными источниками чисто третьего порядка. Такие источники чисто третьего порядка могут также возникать за счет операции дифференцирования по координатам источников в виде произведения поля первого порядка на поле второго порядка. Кроме того, результат свертки по *пространственной* переменной нелинейных вторичных источников $Q^{(2\times 2)}$ с функцией Грина может дать вклад не только в $p^{(2\times 2)}$, но и в $p^{(3)}$. Например, такая ситуация имеет место в одномерном случае при рассмотрении коллинеарного взаимодействия плоских волн в среде, однородной по линейным и нелинейным характеристикам [6]. Таким образом, разделение на взаимодействие чисто третьего порядка и двукратное взаимодействие второго порядка может быть, в определенной степени, условным. Это не столь принципиально для целей томографии, так как экспериментально регистрируется общий нелинейно рассеянный сигнал $p^{(111)} = p^{(2\times 2)} + p^{(3)}$.

По физическому смыслу нелинейные источники $Q^{(2\times 2)}$ и $Q^{(3)}$ можно разделить на три вида, которые для краткости будут называться “физическими” (нижний индекс “phys”), “геометрическими” (индекс “geom”), и “физико-геометрическими” (индекс “phys-geom”). Физические источники связаны только с присутствием в уравнении состояния нелинейных параметров среды второго порядка в виде $(\varepsilon_2 - 1)$ и третьего порядка в виде ε_3, т.е. физические источники обусловлены физическими нелинейными характеристиками самой среды. Напротив, чисто геометрические источники зависят только от волновых движений в среде, но не от внутренних физических процессов в ней. Они обусловлены нелинейностью именно уравнений движения и непрерывности и не содержат никакой информации о нелинейных характеристиках среды (поэтому геометрические источники возникают даже в случае взаимодействия волн в линейной среде, т.е. когда $\varepsilon_2 - 1 \equiv 0$ и $\varepsilon_3 \equiv 0$). Наконец, физико-геометрические (или смешанные) источники имеют двоякую природу их происхождения – вследствие как физической нелинейности среды, так и, одновременно, геометрической нелинейности уравнений движения и непрерывности.

Источники от двукратного взаимодействия второго порядка $Q^{(2\times 2)}$, согласно (65), формируются за счет произведений нелокальных полей второго порядка $p^{(11)}_{\mathrm{n/loc}}$, $\mathbf{v}^{(11)}_{\mathrm{n/loc}}$ и первичных полей. В свою очередь, поле $p^{(11)}_{\mathrm{n/loc}}$ подчиняется волновому уравнению (38):

$$\Box^2 p^{(11)}_{\mathrm{n/loc}} = Q^{(11)}_{\mathrm{r}} \equiv -\frac{(\varepsilon_2(\mathbf{r}) - 1)}{\rho_0 c_0^4}\frac{\partial^2 (p^{(1)})^2}{\partial t^2} - $$
$$- \frac{1}{\rho_0 c_0^4}\frac{\partial^2 (p^{(1)})^2}{\partial t^2},$$

где ε_2 представлено как $(\varepsilon_2 - 1) + 1$. Тем самым, излучающие нелинейные источники второго порядка $Q^{(11)}_{\mathrm{r}} = Q^{(11)}_{\mathrm{r\_phys}} + Q^{(11)}_{\mathrm{r\_geom}}$ состоят из физической части $Q^{(11)}_{\mathrm{r\_phys}} = -\frac{(\varepsilon_2 - 1)}{\rho_0 c_0^4}\frac{\partial^2 (p^{(1)})^2}{\partial t^2}$ и геометрической части $Q^{(11)}_{\mathrm{r\_geom}} = -\frac{1}{\rho_0 c_0^4}\frac{\partial^2 (p^{(1)})^2}{\partial t^2}$, порождающих, соответственно, физическую $p^{(11)}_{\mathrm{n/loc\_phys}}$ и геометрическую $p^{(11)}_{\mathrm{n/loc\_geom}}$ части нелокального поля:

$$p^{(11)}_{\mathrm{n/loc}} \equiv p^{(11)}_{\mathrm{n/loc\_phys}} + p^{(11)}_{\mathrm{n/loc\_geom}}. \tag{69}$$

Аналогично, для поля колебательной скорости (55) будет:

$$\mathbf{v}^{(11)}_{\mathrm{n/loc}} \equiv \mathbf{v}^{(11)}_{\mathrm{n/loc\_phys}} + \mathbf{v}^{(11)}_{\mathrm{n/loc\_geom}}, \tag{70}$$

где

$$\mathbf{v}^{(11)}_{\mathrm{n/loc\_phys}} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla\left(\int^t p^{(11)}_{\mathrm{n/loc\_phys}} dt'\right),$$

$$\mathbf{v}^{(11)}_{\mathrm{n/loc\_geom}} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla\left(\int^t p^{(11)}_{\mathrm{n/loc\_geom}} dt'\right).$$

Подстановка выражений (69), (70) в (65) приводит к следующим выражениям для источников $Q^{(2\times 2)}$, разделенных на три группы – физическую

($Q^{(2\times2)}_{\rm phys}$), физико-геометрическую ($Q^{(2\times 2)}_{\rm phys\text{-}geom}$) и геометрическую ($Q^{(2\times2)}_{\rm geom}$): $Q^{(2\times 2)} \equiv Q^{(2\times 2)}_{\rm phys} + Q^{(2\times 2)}_{\rm phys\text{-}geom} + Q^{(2\times 2)}_{\rm geom}$. Физическая группа зависит от (ε_2-1), фактически, квадратично, так как $p^{(\rm II)}_{\rm n/loc\_phys}$ зависит от (ε_2-1) линейно:

$$Q^{(2\times 2)}_{\rm phys} = \frac{-(\varepsilon_2(\mathbf{r})-1)}{\rho_0 c_0^4}\frac{\partial^2(2p^{(\rm I)}p^{(\rm II)}_{\rm n/loc\_phys})}{\partial t^2}.$$

Физико-геометрическая группа зависит от (ε_2-1) линейно, в том числе, посредством поля $p^{(\rm II)}_{\rm n/loc\_phys}$:

$$Q^{(2\times 2)}_{\rm phys\text{-}geom} = -\frac{(\varepsilon_2(\mathbf{r})-1)}{\rho_0 c_0^4}\frac{\partial^2(2p^{(\rm I)}p^{(\rm II)}_{\rm n/loc\_geom})}{\partial t^2} - $$
$$-\frac{1}{\rho_0 c_0^4}\left(2\frac{\partial p^{(\rm I)}}{\partial t}\frac{\partial p^{(\rm II)}_{\rm n/loc\_phys}}{\partial t}\right) - \frac{1}{2}\rho_0\Box^2(2\mathbf{v}^{(\rm I)}\mathbf{v}^{(\rm II)}_{\rm n/loc\_phys}) -$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\rho_0}{c_0^2}\frac{\partial^2(2\mathbf{v}^{(\rm I)}\mathbf{v}^{(\rm II)}_{\rm n/loc\_phys})}{\partial t^2} - \frac{\rho_0}{c_0^2}\mathbf{v}^{(\rm I)}\frac{\partial^2\mathbf{v}^{(\rm II)}_{\rm n/loc\_phys}}{\partial t^2} -$$
$$-\frac{\rho_0}{c_0^2}\mathbf{v}^{(\rm II)}_{\rm n/loc\_phys}\frac{\partial^2\mathbf{v}^{(\rm I)}}{\partial t^2}.$$

Геометрическая группа вовсе не зависит от (ε_2-1):

$$Q^{(2\times 2)}_{\rm geom} = -\frac{1}{\rho_0 c_0^4}\left(2\frac{\partial p^{(\rm I)}}{\partial t}\frac{\partial p^{(\rm II)}_{\rm n/loc\_geom}}{\partial t}\right) -$$
$$-\frac{1}{2}\rho_0\Box^2(2\mathbf{v}^{(\rm I)}\mathbf{v}^{(\rm II)}_{\rm n/loc\_geom}) -$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\rho_0}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(2\mathbf{v}^{(\rm I)}\mathbf{v}^{(\rm II)}_{\rm n/loc\_geom}) - \frac{\rho_0}{c_0^2}\mathbf{v}^{(\rm I)}\frac{\partial^2\mathbf{v}^{(\rm II)}_{\rm n/loc\_geom}}{\partial t^2} -$$
$$-\frac{\rho_0}{c_0^2}\mathbf{v}^{(\rm II)}_{\rm n/loc\_geom}\frac{\partial^2\mathbf{v}^{(\rm I)}}{\partial t^2}.$$

При делении нелинейных источников чисто третьего порядка, описываемых выражениями (66) и (67), на соответствующие группы $Q^{(3)} \equiv Q^{(3)}_{\rm phys} + Q^{(3)}_{\rm phys\text{-}geom} + Q^{(3)}_{\rm geom}$ учитывается, что локальные поля второго порядка $p^{(\rm II)}_{\rm loc}$, $\mathbf{v}^{(\rm II)}_{\rm loc}$ не зависят от (ε_2-1), т.е. являются геометрическими. Физическая группа источников чисто третьего порядка зависит от $(\varepsilon_2-1)^2$ и ε_3 в виде комбинации $2(\varepsilon_2-1)^2-\varepsilon_3$:

$$Q^{(3)}_{\rm phys} = \frac{\{2(\varepsilon_2(\mathbf{r})-1)^2-\varepsilon_3(\mathbf{r})\}}{\rho_0^2 c_0^6}\frac{\partial^2(p^{(\rm I)})^3}{\partial t^2}. \qquad (71)$$

Первый член в (71), т.е.

$$Q^{(3)}_{\rm phys\_1} \equiv \frac{2(\varepsilon_2(\mathbf{r})-1)^2}{\rho_0^2 c_0^6}\frac{\partial^2(p^{(\rm I)})^3}{\partial t^2},$$

– это источник, появляющийся вследствие квадратичного эффекта нелинейности среды второго порядка, т.е. вследствие $(\varepsilon_2-1)^2$. Второй член, т.е.

$$Q^{(3)}_{\rm phys\_2} \equiv -\frac{\varepsilon_3(\mathbf{r})}{\rho_0^2 c_0^6}\frac{\partial^2(p^{(\rm I)})^3}{\partial t^2},$$

порожден чисто кубической нелинейностью среды, т.е. вследствие ε_3. Это единственный член, содержащий информацию об акустическом нелинейном параметре третьего порядка $\varepsilon_3(\mathbf{r})$. Источники $Q^{(3)}_{\rm phys\_1}$ и $Q^{(3)}_{\rm phys\_2}$ имеют противоположный знак (поскольку $\varepsilon_3>0$), тем самым взаимно ослабляя наиболее информативную часть сигнала чисто третьего порядка $p^{(3)}$.

Физико-геометрическая группа зависит от (ε_2-1) линейно:

$$Q^{(3)}_{\rm phys\text{-}geom} = \frac{2(\varepsilon_2(\mathbf{r})-1)}{\rho_0^2 c_0^6}\left\{\left(\frac{\partial p^{(\rm I)}}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial (p^{(\rm I)})^2}{\partial t}\right) - \right.$$
$$\left. -\rho_0 c_0^2\frac{\partial^2(p^{(\rm I)}p^{(\rm II)}_{\rm loc})}{dt^2}\right\} - \frac{1}{\rho_0 c_0^4}\mathbf{v}^{(\rm I)}\nabla\left[(\varepsilon_2(\mathbf{r})-1)\frac{\partial(p^{(\rm I)})^2}{\partial t}\right] =$$
$$= \frac{2(\varepsilon_2(\mathbf{r})-1)}{\rho_0^2 c_0^6}\left\{\left(\frac{\partial p^{(\rm I)}}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial (p^{(\rm I)})^2}{\partial t}\right) - \rho_0 c_0^2\frac{\partial^2(p^{(\rm I)}p^{(\rm II)}_{\rm loc})}{dt^2} + \right.$$
$$\left. +\rho_0^2 c_0^2\mathbf{v}^{(\rm I)}\frac{\partial}{\partial t}\left(p^{(\rm I)}\frac{\partial \mathbf{v}^{(\rm I)}}{\partial t}\right)\right\} - \frac{[\nabla\varepsilon_2(\mathbf{r})]}{\rho_0 c_0^4}\mathbf{v}^{(\rm I)}\frac{\partial(p^{(\rm I)})^2}{\partial t}.$$

Геометрическая группа не зависит от (ε_2-1) или ε_3:

$$Q^{(3)}_{\rm geom} = \frac{2}{c_0^2}(\nabla\mathbf{v}^{(\rm I)})\nabla(p^{(\rm I)}\mathbf{v}^{(\rm I)}) -$$
$$-\frac{1}{c_0^2}\nabla[\mathbf{v}^{(\rm I)}\{\nabla(p^{(\rm I)}\mathbf{v}^{(\rm I)})\}] - \frac{1}{2c_0^2}\nabla[p^{(\rm I)}\nabla(\mathbf{v}^{(\rm I)})^2] -$$
$$-\frac{\rho_0}{c_0^2}\mathbf{v}^{(\rm I)}\left\{\nabla\frac{\partial(\mathbf{v}^{(\rm I)})^2}{\partial t}\right\} - \frac{2}{\rho_0 c_0^4}\frac{\partial p^{(\rm I)}}{\partial t}\frac{\partial p^{(\rm II)}_{\rm loc}}{\partial t} - \rho_0\Box^2(\mathbf{v}^{(\rm I)}\mathbf{v}^{(\rm II)}_{\rm loc}) -$$
$$-\frac{\rho_0}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mathbf{v}^{(\rm I)}\mathbf{v}^{(\rm II)}_{\rm loc}) - \frac{\rho_0}{c_0^2}\mathbf{v}^{(\rm I)}\frac{\partial^2\mathbf{v}^{(\rm II)}_{\rm loc}}{\partial t^2} - \frac{\rho_0}{c_0^2}\mathbf{v}^{(\rm II)}_{\rm loc}\frac{\partial^2\mathbf{v}^{(\rm I)}}{\partial t^2}.$$

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлено подробное описание нелинейных процессов третьего порядка, выполненное в целях разработки математического аппарата, предназначаемого для использования в практических задачах акустической нелинейной томографии. В связи с описанием волновых процессов, обусловленных нелинейным взаимодействием чисто третьего порядка и двукратным взаимодействием второго порядка, дана классификация возникающих нелинейных вторичных источников и нелинейно рассеянных полей на основе характера их происхождения. Предложенная классификация позволяет, во-первых, понять, какая информация об акустических нелинейных параметрах томографируемого объекта содержится в сигналах определенного типа, регистрируемых на приемнике. Во-вторых, переходя к плану дальнейших исследований, нужно сказать, что с типом сигнала связана степень сложности извлечения этой информации на этапе корреляционной обработки регистрируемого сигнала. Оказывается, что извлечь желательную информацию из сигналов, обусловленных взаимодействием чисто третьего порядка, относительно легко, и поэтому такие сигналы можно назвать полезными. Напротив, извлечь информацию из сигналов, обусловленных двукратным взаимодействием второго порядка, весьма затруднительно, в общем случае; тем самым, такие сигналы выступают как мешающие. Приведенные в настоящей работе выражения для нелинейных вторичных источников и соответствующих полей могут быть использованы для численного моделирования и взаимного сравнения уровней полезных и мешающих сигналов, имеющих место в реальных нелинейных томографических схемах. Кроме того, эти выражения необходимы для разработки алгоритма, позволяющего выделить из оценки нелинейного рассеивателя, получаемой в результате корреляционной обработки регистрируемого общего сигнала, пространственные распределения акустических нелинейных параметров второго и третьего порядков. Обоснование разделения сигналов на полезные и мешающие, результаты численного моделирования уровней таких сигналов и вытекающие из них практические следствия, анализ составляющих оценки нелинейного рассеивателя и алгоритм разделения этих составляющих с целью получения значений нелинейных параметров предполагается изложить в последующих публикациях.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-22-00042).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Буров В.А., Шмелев А.А., Зотов Д.И.* Прототип томографической системы, использующей акустические нелинейные эффекты третьего порядка // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 1. С. 31–51.
2. *Буров В.А., Шмелев А.А.* Численное и физическое моделирование процесса томографирования на основе акустических нелинейных эффектов третьего порядка // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 4–5. С. 466–480.
3. *Буров В.А., Шмелев А.А., Румянцева О.Д.* Томография пространственного распределения рассеивателя в нелинейных процессах третьего порядка // Изв. РАН. Сер. Физическая. 2008. Т. 72. № 1. С. 92–99.
4. *Буров В.А., Евтухов С.Н., Ткачева А.М., Румянцева О.Д.* Акустическая томография нелинейного параметра с помощью малого числа преобразователей // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 6. С. 760–776.
5. *Береза С.А., Буров В.А., Евтухов С.Н.* Модельные эксперименты по акустической томографии нелинейного параметра // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 4. С. 522–534.
6. *Буров В.А., Крюков Р.В., Румянцева О.Д., Шмелев А.А.* Проблемы использования нелинейных коллинеарных процессов в акустической томографии третьего порядка // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 1. С. 57–79.
7. *Буров В.А., Шмелев А.А, Евтухов С.Н., Крюков Р.В., Зотов Д.И., Раттэль М.И., Бобов К.Н., Румянцева О.Д.* Ультразвуковой томограф // Патент на изобретение RU 2526424 C2. Приоритет от 08.08.2012. Москва, 2014.
8. *Буров В.А., Шмелев А.А, Евтухов С.Н., Крюков Р.В., Зотов Д.И., Раттэль М.И., Бобов К.Н., Румянцева О.Д.* Ультразвуковой томограф // Патент на изобретение RU 2530659 C2. Приоритет от 08.08.2012. Москва, 2014.
9. *Горюнов А.А., Сасковец А.В.* Обратные задачи рассеяния в акустике. М.: МГУ, 1989. 152 с.
10. *Крюков Р.В.* Роль возмущений энтропии в задачах нелинейной акустической томографии третьего порядка // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 2. С. 184–192.
11. *Hagelberg M.P.* Calculation of *B/A* for water from measurements of ultrasonic velocity versus temperature and pressure to 10000 kg/cm^2 // J. Acoust. Soc. Am. 1967. V. 41. № 3. P. 564–567.
12. *Tjøtta J.N., Tjøtta S.* Interaction of sound waves. Part I: Basic equations and plane waves // J. Acoust. Soc. Am. 1987. V. 82. № 4. P. 1425–1428.
13. *Aanonsen S.I., Barkve T., Tjøtta J.N., Tjøtta S.* Distortion and harmonic generation in the nearfield of a finite amplitude sound beam // J. Acoust. Soc. Am. 1984. V. 75. № 3. P. 749–768.
14. *Nonlinear Acoustics.* Ed. Hamilton M.F. and Blackstock D.T. San Diego, New York: Academic Press, 1998. 455 p.
15. *Hamilton M.F., Blackstock D.T.* On the coefficient of nonlinearity β in nonlinear acoustics // J. Acoust. Soc. Am. 1988. V. 83. № 1. P. 74–77.
16. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 520 с.