АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2015, том 61, № 5, с. 576–582

НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА

УДК 517.977

О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ

© 2015 г. Л. И. Рубина*, О. Н. Ульянов*, **

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского
Уральского отделения РАН

**ФГАОУ ВПО "УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина"

E-mail: rli@imm.uran.ru, secretary@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 13.08.2014 г.

Ранее авторами был разработан геометрический метод исследования и решения нелинейных уравнений и систем уравнений в частных производных. Этот метод используется в данной статье для получения ряда точных решений некоторых уравнений нелинейной акустики, а также сведения системы уравнений Эйлера к системам обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: нелинейные уравнения в частных производных, методы решения дифференциальных уравнений, уравнения нелинейной акустики, точные решения.

DOI: 10.7868/S0320791915050159

Математические работы часто появляются в физических журналах, поскольку ряд актуальных физических моделей основан на нелинейных уравнениях. Общих методов их анализа, как известно, не существует. Для нахождения частных решений приходится развивать различные оригинальные приемы, каждый из которых не универсален. Однако совокупность таких приемов иногда позволяет получать решения, имеющие важный физический смысл. Статьи по этой тематике публикуются и в Акустическом журнале.

Например, в работе [1] развит метод априорного использования симметрий, основанный на разумном усложнении моделей нелинейной акустики. В работе [2] использовано преобразование Дарбу для нахождения частных решений неоднородного уравнения Бюргерса. Некоторые другие подходы к нахождению решений нелинейных уравнений описаны в работах [3, 4].

Особое место здесь занимают точные решения уравнений. В некоторых, и скорее исключительных, случаях точные решения позволяют решить содержательную задачу или получить характеристики интересующего исследователя явления. Достаточно часто точные решения позволяют выявить существенные особенности сложного физического процесса. И наконец, как правило, точные решения оказываются пригодными для оценки результатов, полученных при использовании численных, приближенных или асимптотических методов, в качестве "тестов".

В работе предлагается и иллюстрируется на конкретных уравнениях ряд подходов для получения таких точных решений.

Рассматриваются:

1) уравнение, которое описывает распространение конечных возмущений в релаксирующей среде [5]:

$$\tau\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\varepsilon}{c_0^2}v\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\left[\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\varepsilon}{c_0^2}v\frac{\partial v}{\partial y}\right]=\frac{m\tau}{2c_0}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (1)$$

Здесь $\tau = \text{const}$ – характерное время релаксации, $\varepsilon = \text{const}$ – нелинейный параметр, $c_0 = \text{const}$ – скорость звука, $m = c_\infty^2/c_0^2 - 1$, c_∞ – "замороженная" скорость звука, x – пространственная координата, t – время, $y = t - x/c_0$ – бегущая координата, v – скорость. Уравнение (1) тесно связано с интегро-дифференциальными уравнениями, широко используемыми в последнее время для описания волн в биотканях и геоструктурах [5]. Нахождению решений таких уравнений на основе методов группового анализа посвящена работа [6].

2) уравнение, которое используется в модифицированном нелинейно-акустическом подходе [7]:

$$\left[1+\frac{3\gamma-1}{4}\frac{\rho'}{\rho_0}\right]\frac{\partial\rho'}{\partial x}+\left[-\frac{\gamma+1}{2c_0}\frac{\rho'}{\rho_0}-\frac{(\gamma+1)(\gamma-3)}{4c_0}\left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^2\right]\frac{\partial\rho'}{\partial\tau}= \quad (2)$$

$$=\frac{b}{2c_0^3\rho_0}\left[1+\frac{\gamma-3}{2}\frac{\rho'}{\rho_0}\right]\frac{\partial^2\rho'}{\partial\tau^2}-\frac{5b}{4c_0^2\rho_0}\frac{\partial^2\rho'}{\partial x\partial\tau}+\frac{(\gamma-1)b}{4c_0^3\rho_0^2}\left(\frac{\partial\rho'}{\partial\tau}\right)^2.$$

Здесь γ – показатель адиабаты, $\rho_0 = \text{const}$, $c_0 = \text{const}$, $b = \text{const}$, $\rho' = \rho - \rho_0$, ρ – плотность среды.

3) уравнение, описывающее во втором приближении распространение ограниченных пуч-

ков в средах без потерь (уравнение Хохлова–Заболотской [8]):

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\rho'}{\partial x}-\frac{\varepsilon}{c_0\rho_0}\rho'\frac{\partial\rho'}{\partial\tau}\right)=\frac{c_0}{2}\left(\frac{\partial^2\rho'}{\partial y^2}\right). \quad (3)$$

Здесь $c_0 = \mathrm{const}$, $\varepsilon = \mathrm{const}$, $\rho_0 = \mathrm{const}$, $\rho' = \rho - \rho_0$, ρ – плотность среды.

В основе получения точных решений лежит разрабатываемый авторами статьи геометрический метод исследования нелинейных дифференциальных уравнений и систем в частных производных [9–14]. Опишем кратко идею метода.

Пусть некоторый физический процесс описывается нелинейным уравнением в частных производных $F(\mathbf{x},u,\ u_i,u_{ij},\ldots,\ u_{i_1i_2\ldots i_m})=0$, $u=u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in R^m$, нижние индексы обозначают дифференцирование по соответствующим независимым переменным. Основная идея геометрического метода состоит в том, что предполагается, что решение уравнения в частных производных зависит от одной переменной (например, $u=u(\psi)$, где $\psi=\psi(\mathbf{x})$). Тогда $\psi(\mathbf{x}) = \mathrm{const}$ – поверхность уровня функции $u(\mathbf{x})$. Изменение переменной ψ ведет к изменению решения. При такой зависимости уравнение в частных производных обычно может быть записано в виде $\sum_k A_k(x,u,u',\ u'',\ldots,u^{(m)})\ B_k(\psi_i,\psi_{ij},\ldots,\psi_{i_1i_2\ldots i_m})=0$. Здесь штрих обозначает дифференцирование по переменной ψ. Полагая $B_k(\psi_i,\psi_{ij},\ldots,\psi_{i_1i_2\ldots i_m})=f_k(\psi)$, где $f_k(\psi)$ – первоначально произвольные функции, определяем, при каких зависимостях между функциями $f_k(\psi)$ система $B_k(\psi_i,\psi_{ij},\ldots,\ \psi_{i_1i_2\ldots i_m})=f_k(\psi)$ совместна. Далее, решая совместную систему при некоторых заданных начальных или краевых условиях, находим вид функции $\psi=\psi(\mathbf{x})$. Подставляя функции $f_k(\psi)$, для которых система $B_k(\psi_i,\psi_{ij},\ldots,\ \psi_{i_1i_2\ldots i_m})=f_k(\psi)$ совместна, имеем обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) для получения решения уравнения $\sum_k A_k(x,u,u',\ u'',\ldots,u^{(m)})f_k(\psi)=0$. Решая ОДУ и подставляя в полученное решение ранее определенную функцию $\psi=\psi(\mathbf{x})$, имеем решение исходного уравнения в частных производных. Данный геометрический метод допускает ряд модификаций. Например, можно считать, что $\psi=u$ [12].

Аналогичный подход к системам нелинейных уравнений в частных производных позволяет их сводить к системам ОДУ [13].

В работе на примере выписанных выше уравнений показано, как, пользуясь предлагаемым подходом, можно получать точные решения для содержательных задач нелинейной акустики, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями и системами в частных производных, используя, в том числе, их сведение к системам ОДУ.

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РЕЛАКСИРУЮЩИХ СРЕД

Рассмотрим уравнение (1). Будем использовать обозначения $\frac{\partial v}{\partial x}=v_x$, $\frac{\partial v}{\partial y}=v_y$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=v_{yy}$. Положим, что $v_x-\varepsilon v v_y/c_0^2=f(v)$, где $f(v)$ – пока неизвестная функция. Для того чтобы v была решением уравнения (1), должна выполняться зависимость

$$\tau v_y f'+f=m\tau v_{yy}/(2c_0). \quad (4)$$

Здесь и далее в этом разделе штрих обозначает дифференцирование по v.

Теорема 1. Если функция $f(v)$ удовлетворяет уравнению

$$f''\left[\frac{2c_0}{m}\left(\frac{\varepsilon}{c_0^2}Cv-1\right)+C\right]+\frac{4\varepsilon C}{c_0m}f'-\frac{6\varepsilon}{c_0m\tau}\left(\frac{\varepsilon Cv}{c_0^2}-1\right)=0, \quad (5)$$

где $C=\mathrm{const}$, $C>0$, и на начальном многообразии выполняется зависимость (4), то решения уравнения $v_x-\varepsilon v v_y/c_0^2=f(v)$ являются решениями уравнения (1).

Доказательство. Покажем, при каких условиях совместна система $\tau v_y f'+f=m\tau v_{yy}/(2c_0)$, $v_x-\varepsilon v v_y/c_0^2=f(v)$. Выпишем дифференциальные следствия соотношения $v_x-\varepsilon v v_y/c_0^2=f(v)$:

$$\begin{aligned} v_{xx}-\varepsilon v v_{yx}/c_0^2&=f'(v)v_x+\varepsilon v_x v_y/c_0^2,\\ v_{xy}-\varepsilon v v_{yy}/c_0^2&=f'(v)v_y+\varepsilon v_y^2/c_0^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Из соотношений (4) и (6) определим вторые производные функции $v(x,y)$:

$$v_{yy}=2c_0[\tau v_y f'+f]/(m\tau),$$

$$v_{xy}=v_y f'+\varepsilon v_y^2/c_0^2+2\varepsilon v[\tau v_y f'+f]/(c_0m\tau),$$

$$v_{xx}=\left(f+\frac{2\varepsilon}{c_0^2}v v_y\right)\left(f'+\frac{\varepsilon}{c_0^2}v_y\right)+\frac{2\varepsilon^2}{c_0^3m}v^2\left(v_y f'+\frac{f}{\tau}\right).$$

Для того чтобы условию (4) и соотношению $v_x-\varepsilon v v_y/c_0^2=f(v)$ удовлетворяла одна и та же функция $v(x,\ y)$, потребуем равенства третьих смешанных производных и выполнения соотношения $v_x-\varepsilon v v_y/c_0^2=f(v)$. Получим

$$\begin{aligned} v_x&=f+\frac{f[2\varepsilon v f'/(c_0m)-6\varepsilon^2 v/(c_0^3m\tau)]}{f''+4\varepsilon f'/(c_0m)},\\ v_y&=\frac{(f/m)[2c_0f''-6\varepsilon/(c_0\tau)]}{f''+4\varepsilon f'/(c_0m)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая, что $v_{xy}=v_{yx}$, получаем уравнение для определения функции $f(v)$:

$$f''\left[\frac{2c_0}{m}\left(\frac{\varepsilon}{c_0^2}Cv-1\right)+C\right]+\frac{4\varepsilon C}{c_0m}f'-\frac{6\varepsilon}{c_0m\tau}\left(\frac{\varepsilon Cv}{c_0^2}-1\right)=0,$$

что и требовалось доказать.

Переходим к решению полученного уравнения (5). Выпишем его решение, положив $f' = p(v)$. Функция $p(v)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$p'\left[\frac{2c_0}{m}\left(\frac{\varepsilon}{c_0^2}Cv-1\right)+C\right]+\frac{4\varepsilon C}{c_0 m}p-\frac{6\varepsilon}{c_0 m\tau}\left(\frac{\varepsilon C v}{c_0^2}-1\right)=0.$$

Отсюда

$$p=\frac{\eta}{\left(\frac{2\varepsilon C}{c_0 m}v+C-\frac{2c_0}{m}\right)^2}+$$

$$+\frac{\frac{6\varepsilon}{c_0 m\tau}\left(\frac{2\varepsilon^2C^2}{3c_0^3 m}v^3+\frac{\varepsilon C(Cm-4c_0)}{2c_0^2 m}v^2-Cv+\frac{2c_0}{m}v\right)}{\left(\frac{2\varepsilon C}{c_0 m}v+C-\frac{2c_0}{m}\right)^2},$$

$$\eta=\mathrm{const}.$$

Тогда

$$f=\varepsilon v^2/(2c_0^2\tau)-$$
$$-(4c_0+Cm)v/(4Cc_0\tau)+c_0(2c_0+Cm)/(4C^2\varepsilon\tau). \tag{8}$$

Как показано выше, решения, удовлетворяющие условиям теоремы 1, удовлетворяют соотношениям (7). Подставим в эти соотношения функцию (8) и решим полученную систему уравнений. Получим

$$\frac{1}{C\tau}x+\frac{1}{\tau}y=-\int\frac{f'+m/(4c_0\tau)}{f}dv. \tag{9}$$

Обозначив $\frac{1}{C\tau}x+\frac{1}{\tau}y=z$, имеем $v=v(z)$. Подставив в (1) $v(z)$, получим ОДУ

$$\left(\frac{1}{C}-\frac{\varepsilon}{c_0^2}v\right)v_z-\frac{\varepsilon}{c_0^2}v_z^2=v_{zz}\left(\frac{m}{2c_0}-\frac{1}{C}+\frac{\varepsilon}{c_0^2}v\right). \tag{10}$$

Перейдем в уравнении (10) от функции $v(z)$ к функции $z(v)$. Получим

$$\left(\frac{1}{C}-\frac{\varepsilon}{c_0^2}v\right)z_v^2-\frac{\varepsilon}{c_0^2}z_v+z_{vv}\left(\frac{m}{2c_0}-\frac{1}{C}+\frac{\varepsilon}{c_0^2}v\right)=0. \tag{11}$$

Нетрудно проверить, что решение (9) удовлетворяет уравнению (11), а следовательно, и уравнению (1).

Замечание. Уравнение (1) можно записать в виде

$$v_x-\frac{\varepsilon}{c_0^2}vv_y-\frac{\varepsilon\tau}{c_0^2}v_y^2=\left(\frac{m\tau}{2c_0}+\frac{\varepsilon\tau}{c_0^2}v\right)v_{yy}-\tau v_{xy}$$

и приравнять обе части данного уравнения к $f(v)$. Далее, аналогично предыдущему рассмотрению, найдем такую функцию $f(v)$, для которой полученная система уравнений

$$v_x-\frac{\varepsilon}{c_0^2}vv_y-\frac{\varepsilon\tau}{c_0^2}v_y^2=f(v),$$
$$\left(\frac{m\tau}{2c_0}+\frac{\varepsilon\tau}{c_0^2}v\right)v_{yy}-\tau v_{xy}=f(v)$$

будет совместна. Тогда решение первого уравнения выписанной системы будет решением уравнения (1), если на начальном многообразии второе уравнение системы обращается в тождество.

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО НЕЛИНЕЙНО-АКУСТИЧЕСКОГО ПОДХОДА

Рассмотрим уравнение (2). Обозначим $\rho' = r$ и перепишем уравнения (2) в виде

$$\left(1+\frac{3\gamma-1}{4}\frac{r}{\rho_0}\right)r_x-\left[\frac{\gamma+1}{2}\frac{1}{c_0}\frac{r}{\rho_0}+\right.$$
$$\left.+\frac{(\gamma+1)(\gamma-3)}{4}\frac{1}{c_0}\left(\frac{r}{\rho_0}\right)^2\right]r_\tau-\frac{\gamma-1}{4}\frac{b}{c_0^3\rho_0^2}r_\tau^2=$$
$$=\frac{b}{2c_0^3\rho_0}\left(1+\frac{\gamma-3}{2}\frac{r}{\rho_0}\right)r_{\tau\tau}-\frac{5b}{4c_0^2\rho_0}r_{x\tau}, \tag{12}$$
$$r_x=\frac{\partial r}{\partial x},\quad r_\tau=\frac{\partial r}{\partial\tau},\quad r_{\tau\tau}=\frac{\partial^2 r}{\partial\tau^2},\quad r_{x\tau}=\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial\tau}.$$

Будем полагать, что $r=r(\psi(x,\tau))$. Тогда $\psi(x,\tau)=$ $=\mathrm{const}$ – поверхность уровня функции r, $r_x=r'\psi_x$, $r_\tau=r'\psi_\tau$, $r_{\tau\tau}=r''\psi_\tau^2+r'\psi_{\tau\tau}$, $r_{x\tau}=r''\psi_x\psi_\tau+r'\psi_{x\tau}$. Здесь и далее в этом разделе штрих обозначает дифференцирование по независимой переменной ψ. Подставив эти выражения в уравнение (12), получим соотношение

$$\left(1+\frac{3\gamma-1}{4}\frac{r}{\rho_0}\right)r'\psi_x-\left[\frac{\gamma+1}{2}\frac{1}{c_0}\frac{r}{\rho_0}+\right.$$
$$\left.+\frac{(\gamma+1)(\gamma-3)}{4}\frac{1}{c_0}\left(\frac{r}{\rho_0}\right)^2\right]r'\psi_\tau-$$
$$-\frac{\gamma-1}{4}\frac{b}{c_0^3\rho_0^2}(r')^2\psi_\tau^2=\frac{b}{2c_0^3\rho_0}\left(1+\frac{\gamma-3}{2}\frac{r}{\rho_0}\right)\times \tag{13}$$
$$\times(r''\psi_\tau^2+r'\psi_{\tau\tau})-\frac{5b}{4c_0^2\rho_0}(r''\psi_x\psi_\tau+r'\psi_{x\tau}).$$

Пусть в выражении (13) $\psi_\tau\neq 0$. Поделив каждое слагаемое на ψ_τ, положим, что

$$\frac{\psi_x}{\psi_\tau}=f_1(\psi),\quad \psi_\tau=f_2(\psi),$$
$$\frac{\psi_{\tau\tau}}{\psi_\tau}=f_3(\psi),\quad \frac{\psi_{x\tau}}{\psi_\tau}=f_4(\psi). \tag{14}$$

Этого достаточно, чтобы соотношение (13) стало ОДУ. Из соотношений (14) следует, что $\psi_x=$ $=f_1(\psi)f_2(\psi)$, и из равенства смешанных производных получаем, что $\psi=\psi(z)$, где $z=ax+c\tau$, $a=\mathrm{const}$, $c=\mathrm{const}$. Но тогда можно считать, что $r=r(z)$, и уравнение (12) привести к ОДУ

$$\left(1+\frac{3\gamma-1}{4}\frac{r}{\rho_0}\right)r_z a-\frac{\gamma+1}{2}\frac{1}{c_0}\frac{r}{\rho_0}r_z c-\frac{(\gamma+1)(\gamma-3)}{4}\times$$
$$\times\frac{1}{c_0}\left(\frac{r}{\rho_0}\right)^2 r_z c-\frac{\gamma-1}{4}\frac{bc^2}{c_0^3\rho_0^2}r_z^2= \quad (15)$$
$$=\frac{b}{2c_0^3\rho_0}\left(1+\frac{\gamma-3}{2}\frac{r}{\rho_0}\right)r_{zz}c^2-\frac{5b}{4c_0^2\rho_0}r_{zz}ac.$$

Выпишем некоторые точные решения уравнения (15).

1) Если $\gamma = 3$ и $z = c(x + c_0\tau)$, то $r(z) = (2c_0^2\rho_0^2)z/(bc) + k$, $k = \mathrm{const}$.

2) Если $r(z)$ имеет обратную функцию, то, полагая $r_z = p(r)$, получаем линейное уравнение, которому удовлетворяет функция $p(r)$:

$$\left[\frac{b}{2c_0^3\rho_0}\left(1+\frac{\gamma-3}{2}\frac{r}{\rho_0}\right)c^2-\frac{5b}{4c_0^2\rho_0}ac\right]p'+$$
$$+\frac{\gamma-1}{4}\frac{b}{c_0^3\rho_0^2}c^2p=A(r).$$

Отсюда получаем, что

$$z=\int\frac{[(\gamma-3)cr+\rho_0(2c-5ac_0)]^{(\gamma-1)/(\gamma-3)}dr}{\eta+\int[(\gamma-3)cr+\rho_0(2c-5ac_0)]^{2/(\gamma-1)}A(r)dr},$$
$$\eta=\mathrm{const},\quad A(r)=\left(1+\frac{3\gamma-1}{4}\frac{r}{\rho_0}\right)a-$$
$$-\left[\frac{\gamma+1}{2}\frac{1}{c_0}\frac{r}{\rho_0}+\frac{(\gamma+1)(\gamma-3)}{4}\frac{1}{c_0}\left(\frac{r}{\rho_0}\right)^2\right]c.$$

В частности, уравнение (2) имеет решение вида $r = M + N/(z + k)$, где $k = \mathrm{const}$,

$$M=4\rho_0\left[-(3\gamma-1)\pm D^{1/2}\right]/\left(13\gamma^2-24\gamma-29\right),$$
$$D=(5\gamma^3-29\gamma^2+43\gamma-35)/[2(\gamma-3)],$$
$$N=[(3\gamma-7)b]/\left[(\gamma+1)(\gamma-3)c_0^2\right],$$
$$z=\frac{(\gamma+1)(\gamma-3)}{(\gamma^2+4\gamma-37)c_0\rho_0}\left[4(2-\gamma)M-\frac{2(\gamma-1)}{\gamma-3}\rho_0\right]x+\tau.$$

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ЗВУКОВЫХ ПУЧКОВ

Рассмотрим уравнение (3). Обозначим $\rho' = r$. Считаем, что $r = r(\psi(x, y, \tau))$. Тогда $\psi(x, y, \tau) = \mathrm{const}$ – поверхность уровня функции r, и, используя обозначения $\frac{\partial r}{\partial x} = r_x$, $\frac{\partial r}{\partial y} = r_y$, $\frac{\partial r}{\partial \tau} = r_\tau$, $\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial \tau} = r_{x\tau}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial \tau^2} = r_{\tau\tau}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = r_{yy}$, имеем (здесь штрих обозначает дифференцирование по переменной ψ) $r_x = r'\psi_x$, $r_y = r'\psi_y$, $r_\tau = r'\psi_\tau$, $r_{\tau\tau} = r''\psi_\tau^2 + r'\psi_{\tau\tau}$, $r_{yy} = r''\psi_y^2 + r'\psi_{yy}$, $r_{\tau\tau} = r''\psi_x\psi_\tau + r'\psi_{x\tau}$. Подставив эти выражения в уравнение (3), получим

$$r''\left(\psi_x\psi_\tau-\frac{c_0}{2}\psi_y^2\right)-\frac{\varepsilon}{c_0\rho_0}(r'^2+rr'')\psi_\tau^2+$$
$$+r'\left(\psi_{x\tau}-\frac{c_0}{2}\psi_{yy}\right)-\frac{\varepsilon rr'}{c_0\rho_0}\psi_{\tau\tau}=0. \quad (16)$$

Пусть $\psi_\tau \neq 0$. Разделим каждое слагаемое в уравнении (16) на ψ_τ^2 и положим, что

$$(\psi_x\psi_\tau-0.5c_0\psi_y^2)/\psi_\tau^2=f(\psi),$$
$$(\psi_{x\tau}-0.5c_0\psi_{yy})/\psi_\tau^2=f_1(\psi),\quad \psi_{\tau\tau}/\psi_\tau^2=f_2(\psi). \quad (17)$$

Тогда уравнение (3) можно представить в виде

$$r''f-\frac{\varepsilon}{c_0\rho_0}(r'^2+rr'')+r'f_1-\frac{\varepsilon}{c_0\rho_0}rr'f_2=0.$$

Покажем, при каких функциях $f(\psi)$, $f_1(\psi)$, $f_2(\psi)$ система (17) совместна.

Теорема 2. Пусть $f \neq \mathrm{const}$. Если система уравнений (17) совместна, то $f_2 = -f''/f'$, $f_1 = [(3f'^2 - 4ff'') \pm f'^2]/(4f')$, вторые производные функции $\psi(\tau, x, y)$ удовлетворяют зависимостям

$$\psi_{\tau x}=0.5c_0f_2\psi_y^2+(ff_2+f')\psi_\tau^2,\quad \psi_{y\tau}=f_2\psi_\tau\psi_y,$$
$$\psi_{\tau\tau}/\psi_\tau^2=f_2(\psi),\quad \psi_{xx}=[0.25c_0^2f_2\psi_y^4+$$
$$+c_0\psi_\tau^2\psi_y^2(3ff_2+3f'-3f_1)+\psi_\tau^4f(ff_2+2f')]/\psi_\tau^2,$$
$$\psi_{xy}=[0.5c_0f_2\psi_y^3+(3ff_2+3f'-2f_1)\psi_\tau^2\psi_y]/\psi_\tau,$$
$$\psi_{yy}=f_2\psi_y^2+2(ff_2+f'-f_1)\psi_\tau^2/c_0.$$

Доказательство. Рассмотрим первое уравнение системы (17):

$$(\psi_x\psi_\tau-0.5c_0\psi_y^2)/\psi_\tau^2=f(\psi). \quad (18)$$

Выпишем для уравнения (18) систему уравнений характеристик

$$\frac{d\tau}{ds}=\psi_x-2\psi_\tau,\quad \frac{dx}{ds}=\psi_\tau,\quad \frac{dy}{ds}=-c_0\psi_y,\quad \frac{d\psi}{ds}=0,$$
$$\frac{d\psi_\tau}{ds}=f'\psi_\tau^3,\quad \frac{d\psi_x}{ds}=f'\psi_\tau^2\psi_x,\quad \frac{d\psi_y}{ds}=f'\psi_\tau^2\psi_y. \quad (19)$$

Расширим систему (19) до производных второго порядка. Для этого распишем подробнее $\frac{d\psi_\tau}{ds} = \psi_{\tau\tau}\frac{d\tau}{ds} + \psi_{\tau x}\frac{dx}{ds} + \psi_{\tau y}\frac{dy}{ds} = f'\psi_\tau^3$. Подставив вместо производных от независимых переменных их значения из (19) и продифференцировав полученное выражение сначала по τ, а затем последовательно по x и по y, получим первые три уравнения. Проделав аналогичные действия с $\frac{d\psi_y}{ds}$, получим последние уравнения системы:

$$\frac{d\psi_{\tau\tau}}{ds} = -2\psi_{\tau\tau}\psi_{x\tau} + 2f\psi_{\tau\tau}^2 + \\ + 2f'\psi_{\tau\tau}\psi_\tau^2 + c_0\psi_{\tau y}^2 + f''\psi_\tau^4 + 3f'\psi_\tau^2\psi_{\tau\tau},$$

$$\frac{d\psi_{\tau x}}{ds} = -\psi_{\tau\tau}\psi_{xx} + 2f\psi_{\tau\tau}\psi_{\tau x} + 2f''\psi_{\tau\tau}\psi_\tau\psi_x - \\ - \psi_{\tau x}^2 + c_0\psi_{\tau y}\psi_{xy} + f''\psi_\tau^3\psi_x + 3f'\psi_\tau^2\psi_{\tau x},$$

$$\frac{d\psi_{\tau y}}{ds} = -\psi_{\tau\tau}\psi_{yx} + 2f\psi_{\tau\tau}\psi_{\tau y} + 2f'\psi_{\tau\tau}\psi_\tau\psi_y - \\ - \psi_{\tau x}\psi_{\tau y} + c_0\psi_{\tau y}\psi_{yy} + f''\psi_\tau^3\psi_y + 3f'\psi_\tau^2\psi_{\tau y}, \quad (20)$$

$$\frac{d\psi_{yy}}{ds} = -2\psi_{\tau y}\psi_{xy} + 2f\psi_{\tau y}^2 + \\ + 4f'\psi_{\tau y}\psi_\tau\psi_y + c_0\psi_{yy}^2 + f''\psi_\tau^2\psi_y^2 + f'\psi_\tau^2\psi_{yy},$$

$$\frac{d\psi_{xy}}{ds} = -\psi_{\tau y}\psi_{xx} + 2f\psi_{y\tau}\psi_{\tau x} + \\ + 2f'\psi_{\tau y}\psi_\tau\psi_x + \psi_{xy}\psi_{\tau x} + c_0\psi_{yy}\psi_{yx} + \\ + f''\psi_\tau^2\psi_x\psi_y + 2f'\psi_\tau\psi_y\psi_{\tau x} + f'\psi_\tau^2\psi_{xy}.$$

Потребуем, чтобы второе и третье уравнения системы (17) были первыми интегралами системы (20). Получим зависимости, при которых это будет иметь место:

$$-2\psi_{\tau\tau}\psi_{x\tau} + 2f\psi_{\tau\tau}^2 + 5f'\psi_{\tau\tau}\psi_\tau^2 + c_0\psi_{y\tau}^2 + f''\psi_\tau^4 - \\ - 2f_2f'\psi_\tau^4 = 0, \\ -0.5c_0[2f\psi_{\tau y}^2 + 4f'\psi_{\tau y}\psi_\tau\psi_y + \\ + c_0\psi_{yy}^2 + f''\psi_\tau^2\psi_y^2 + f'\psi_\tau^2\psi_{yy}] - 2f_1f'\psi_\tau^4 - \\ -\psi_{\tau\tau}\psi_{xx} + 2f\psi_{\tau\tau}\psi_{\tau x} + 2f'\psi_{\tau\tau}\psi_\tau\psi_x - \psi_{\tau x}^2 + \\ + 2c_0\psi_{y\tau}\psi_{xy} + f''\psi_\tau^3\psi_x + 3f\psi_\tau^2\psi_{\tau x} = 0. \quad (21)$$

К соотношениям (21) добавим дифференциальные следствия уравнения (18) и второе и третье соотношения (17):

$$\psi_{\tau\tau}\psi_x + \psi_{x\tau}\psi_\tau - c_0\psi_y\psi_{y\tau} - f'\psi_\tau^3 - 2f\psi_\tau\psi_{\tau\tau} = 0, \\ \psi_{\tau x}\psi_x + \psi_\tau\psi_{xx} - c_0\psi_y\psi_{xy} - f'\psi_\tau^2\psi_x - \\ - 2f\psi_\tau\psi_{\tau x} = 0, \\ \psi_x\psi_{y\tau} + \psi_\tau\psi_{xy} - \\ - c_0\psi_y\psi_{yy} - f'\psi_\tau^2\psi_y - 2f\psi_\tau\psi_{y\tau} = 0, \\ (\psi_{x\tau} - 0.5c_0\psi_{yy})/\psi_\tau^2 = f_1(\psi), \quad \psi_{\tau\tau}/\psi_\tau^2 = f_2(\psi). \quad (22)$$

Определяя из системы (21)–(22) вторые производные функции $\psi(\tau, x, y)$ и требуя тождественного выполнения всех указанных уравнений, получаем, что

$$\psi_{\tau x} = 0.5c_0f_2\psi_y^2 + (ff_2 + f')\psi_\tau^2, \quad \psi_{y\tau} = f_2\psi_\tau\psi_y, \\ \psi_{yy} = f_2\psi_y^2 + 2(ff_2 + f' - f_1)\psi_\tau^2/c_0, \\ \psi_{xy} = [0.5c_0f_2\psi_y^3 + (3ff_2 + 3f' - 2f_1)\psi_\tau^2\psi_y]/\psi_\tau, \\ \psi_{xx} = [0.25c_0^2f_2\psi_y^4 + c_0\psi_\tau^2\psi_y^2(3ff_2 + 3f' - 3f_1) + \\ + \psi_\tau^4 f(ff_2 + 2f')]/\psi_\tau^2, \\ \text{где } f_2 = -f''/f', \\ f_1 = [(3f'^2 - 4ff'') \pm f'^2]/(4f'),$$

что и требовалось доказать.

Если полученные в теореме 2 условия выполняются, то уравнение (16) принимает вид

$$r''f - \frac{\varepsilon}{c_0\rho_0}(r'^2 + rr'') + \\ + \frac{r'}{4f'}[(3f'^2 - 4ff'') \pm f'^2] + \frac{\varepsilon}{c_0\rho_0}rr'\frac{f''}{f'} = 0. \quad (23)$$

Здесь $f(\psi)$ – произвольная функция. Уравнение (23) обращается в тождество для любых c_0, ρ_0, ε, если $r = A\sqrt{f}$, $A = \text{const}$ и в выражении для функции f_1 выбран знак минус. Если в выражении для f_1 выбрать знак плюс, то соотношение (23) будет обращаться в тождество при любых c_0, ρ_0, ε только тогда, когда $f' = 0$. Мы этот случай не рассматриваем.

Итак, мы получили, что решение уравнения (3) сводится к решению уравнения (23), если поверхность уровня $\psi(\tau, x, y) = \text{const}$ определяется из уравнения (18). Чтобы определить $r = r(\tau, x, y)$, обратимся к решению этого уравнения. Решая систему уравнений характеристик (19), получаем

$$\psi_\tau = \frac{1}{\sqrt{2f'(a-s)}}, \quad \psi_y = \frac{C(\psi, \alpha)}{\sqrt{(a-s)}}, \\ \psi_x = \frac{C_1(\psi, \alpha)}{\sqrt{a-s}}, \quad C_1 = \frac{C^2c_0f' + f}{\sqrt{2f'}}, \quad a = \text{const}, \quad (24)$$

$$\tau = \frac{\sqrt{2}(f - C^2c_0f')}{\sqrt{f'}}\sqrt{a-s} + g, \\ x = -\sqrt{\frac{2}{f'}(a-s)} + g_1, \quad y = 2Cc_0\sqrt{a-s} + g_2. \quad (25)$$

В общем случае можно положить, что $g = g(\psi, \alpha)$, $g_1 = g_1(\psi, \alpha)$, $g_2 = g_2(\psi, \alpha)$, тогда формулы (25) задают переход к независимым переменным $\{s, \psi, \alpha\}$, если тождественно выполняется соотношение $\psi \equiv \equiv \psi(\tau(s, \psi, \alpha), x(s, \psi, \alpha), y(s, \psi, \alpha))$. Это соотношение будет обращаться в тождество, когда

$$1 = \psi_\tau\tau_\psi + \psi_x x_\psi + \psi_y y_\psi, \\ 0 = \psi_\tau\tau_s + \psi_x x_s + \psi_y y_s, \quad 0 = \psi_\tau\tau_\alpha + \psi_x x_\alpha + \psi_y y_\alpha. \quad (26)$$

Второе соотношение (26) выполняется тождественно. Подставляя в первое и третье соотношения (26) значения соответствующих величин из (24), (25), придем к следующим необходимым условиям:

$$\frac{\partial g}{\partial \psi} + \frac{\partial g_1}{\partial \psi}(C^2 c_0 f' + f) + \frac{\partial g_2}{\partial \psi} C\sqrt{2f'} = 0,$$
$$\frac{\partial g}{\partial \alpha} + \frac{\partial g_1}{\partial \alpha}(C^2 c_0 f' + f) + \frac{\partial g_2}{\partial \alpha} C\sqrt{2f'} = 0. \qquad (27)$$

Соотношения (27), в частности, выполняются, если $g = \mathrm{const}$, $g_1 = \mathrm{const}$, $g_2 = \mathrm{const}$. Далее, зададим функции $f(\psi)$, $C(\psi, \alpha)$. Определим $\psi(\tau, x, y)$, исключив α и s из формул (25). Подставим найденную функцию $\psi(\tau, x, y)$ в выражение $r = A\sqrt{f(\psi(\tau, x, y))}$. Получим $r = r(\tau, x, y)$, которое будет удовлетворять уравнению (3).

Рассмотрим для примера один частный случай. Пусть $g = g_1 = g_2 = 0$, $f = M\psi$, $C = K\psi\alpha$. Тогда, подставив эти значения в (25) и исключив из полученных выражений s и α, найдем, что $f = M\psi = \left[y^2/(2c_0x^2) - \tau/x\right]$ и, следовательно, $r = A\sqrt{f} = A\sqrt{y^2/(2c_0x^2) - \tau/x}$ — точное решение уравнения (3).

Задавая набор других функций f, C, g, g_1, g_2, удовлетворяющих условиям (27), и исключая из соотношений (25) переменные s и α, будем получать другие функции $\psi(\tau, x, y)$ и другие точные решения уравнения (3).

О СВЕДЕНИИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА К СИСТЕМЕ ОДУ

Этот метод можно применять и для исследования систем нелинейных дифференциальных уравнений.

Выпишем систему уравнений Эйлера в виде [8]

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}\right] = -\nabla p,$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{V}) = 0, \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}. \qquad (28)$$

Здесь $\gamma = \mathrm{const}$ — показатель адиабаты, $\mathbf{V}$ — вектор скоростей с компонентами u, v, w.

Пусть $u = u(\psi)$, $v = v(\psi)$, $w = w(\psi)$, $\rho = \rho(\psi)$. Тогда систему (28) можно представить в виде

$$(1 + uf_1 + vf_2 + wf_3)u' + (\gamma p_0/\rho_0^{\gamma}) f_1\rho^{(\gamma-2)}\rho' = 0,$$
$$(1 + uf_1 + vf_2 + wf_3)v' + (\gamma p_0/\rho_0^{\gamma}) f_2\rho^{(\gamma-2)}\rho' = 0, \qquad (29)$$
$$(1 + uf_1 + vf_2 + wf_3)w' + (\gamma p_0/\rho_0^{\gamma}) f_3\rho^{(\gamma-2)}\rho' = 0,$$
$$(1 + uf_1 + vf_2 + wf_3)\rho' + \rho f_1u' + \rho f_2v' + \rho f_3w' = 0.$$

Здесь (при предположении, что $\psi_t \neq 0$) $f_1(\psi) = \psi_x/\psi_t$, $f_2(\psi) = \psi_y/\psi_t$, $f_3(\psi) = \psi_z/\psi_t$, $f_1(\psi)$, $f_2(\psi)$, $f_3(\psi)$ — произвольные функции. Штрих (') обозначает дифференцирование по ψ.

Чтобы система (29) имела нетривиальное решение, определитель при производных должен быть равен нулю. Приравнивая определитель нулю, получаем

$$\rho = \left[\frac{\rho_0^{\gamma}(1 + uf_1 + vf_2 + wf_3)^2}{\gamma p_0(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)}\right]^{1/(\gamma-1)}. \qquad (30)$$

Нетрудно проверить, что зависимости $f_1(\psi) = \psi_x/\psi_t, f_2(\psi) = \psi_y/\psi_t, f_3(\psi) = \psi_z/\psi_t$ имеют место, если $\psi = \psi(s)$, $s = t + f_1x + f_2y + f_3z$. Тогда можно считать, что $\mathbf{V} = \mathbf{V}(s)$, $\rho = \rho(s)$, $f_1(s), f_2(s), f_3(s)$.

Далее продемонстрируем как в частных случаях, задавая конкретный вид произвольных функций, можно сводить систему уравнений Эйлера к системе ОДУ. Положим, что $f_1(s) = f_2(s) = f_3(s) = s$, тогда система (28) сводится к системе ОДУ

$$[1 + s(u + v + w)]\frac{d\mathbf{V}}{ds} + \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^{\gamma}}\right)s\rho^{(\gamma-2)}\frac{d\rho}{ds} = 0,$$
$$s = \frac{t}{1 - x - y - z}, \qquad (31)$$

где, согласно (30), имеем $\rho = \left[\frac{\rho_0^{\gamma}[1 + s(u + v + w)]^2}{3\gamma p_0 s^2}\right]^{1/(\gamma-1)}$.

Положим, что $f_1 = f_2 = f_3 = 1/s$, тогда система (28) сводится к системе ОДУ

$$[s \pm (u + v + w)]\frac{d\mathbf{V}}{ds} \pm \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^{\gamma}}\right)\rho^{(\gamma-2)}\frac{d\rho}{ds} = 0,$$
$$\rho = \left[\frac{\rho_0^{\gamma}s^2[s \pm (u + v + w)]^2}{\gamma p_0}\right]^{1/(\gamma-1)}, \qquad (32)$$
$$s = \frac{t \pm \sqrt{t^2 + 4(x + y + z)}}{2}.$$

Положим $f_1 = s$, $f_2 = 1/s$, $f_3 = 1$, тогда система (28) сводится к системе ОДУ

$$\mp(s \mp us^2 - v + sw)\frac{du}{ds} + \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^{\gamma}}\right)\rho^{(\gamma-2)}s^2\frac{d\rho}{ds} = 0,$$
$$\mp(s \mp us^2 - v + sw)\frac{dv}{ds} \pm \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^{\gamma}}\right)\rho^{(\gamma-2)}\frac{d\rho}{ds} = 0,$$
$$\mp(s \mp us^2 - v + sw)\frac{dw}{ds} \mp \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^{\gamma}}\right)\rho^{(\gamma-2)}s\frac{d\rho}{ds} = 0, \qquad (33)$$
$$\rho = \left[\frac{\rho_0^{\gamma}(s \mp us^2 - v + sw)^2}{\gamma p_0(s^4 + s^2 + 1)}\right]^{1/(\gamma-1)},$$
$$s = \frac{-(t + z) \pm \sqrt{(t + z)^2 - 4y(x - 1)}}{2(x - 1)}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье применение геометрического метода для получения точных решений уравнений нелинейной акустики иллюстрируется на примере трех уравнений, но данный подход может использоваться для решения и других нелинейных уравнений в частных производных, встречающихся в нелинейной акустике. Для рассмотренных уравнений также могут быть получены другие точные решения, если задавать другие начальные поверхности.

Применение геометрического метода к системе нелинейных уравнений в частных производных Эйлера позволило свести эту систему к системам ОДУ (31), (32), (33). Этот процесс можно продолжать, задавая разные функции $f_1(\psi), f_2(\psi), f_3(\psi)$.

Следует заметить, что существует достаточно много методов получения точных решений. Библиография по этому вопросу займет не одну страницу. Особенность нашего подхода в том, что он позволяет не только получать серии точных решений, но и замечать особенности развития процессов [9, 14]. Так, нетрудно заметить, что для наблюдения за процессом, описываемым уравнением (2), достаточно задать начальные условия на одной поверхности уровня и затем получать решение на других поверхностях уровня. Иное поведение наблюдается в случае уравнения (3). Здесь, чтобы получить общую картину, нужно на каждой поверхности уровня что-то задавать. Существуют такие процессы в нелинейной теплопроводности, когда возмущение из одной точки распространяется по типу конической рефракции, и это позволяет заметить наш подход к получению точных решений [11].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке в рамках проекта "Разработка новых аналитических, численных и асимптотических методов исследования задач математической физики и приложения к обработке сигналов" Комплексной Программы ФНИ УрО РАН и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ибрагимов Н.Х., Руденко О.В.* Принцип априорного использования симметрий в теории нелинейных волн // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 4. С. 481–495.
2. *Кудрявцев А.Г., Сапожников О.А.* Получение точных решений неоднородного уравнения Бюргерса с использованием преобразования Дарбу // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 3. С. 313–322.
3. *Карасев В.Ю.* О некоторых частных решениях одного уравнения нелинейной акустики // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 6. С. 928–929.
4. *Лапидус Ю.Р., Руденко О.В.* Об одном точном решении уравнения Хохлова–Заболотской // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 2. С. 363–364.
5. *Руденко О.В.* Нелинейные интегро-дифференциальные модели для интенсивных волн в средах типа биотканей и геоструктур со сложной внутренней динамикой релаксационного типа // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 4. С. 368–375.
6. *Ibragimov N.H., Meleshko S.V., Rudenko O.V.* Group analysis of evolutionary integro-differential equations describing nonlinear waves: the general model // J. Phys. A: Math. Theor. 2011. V. 44. 315201 (21 pp).
7. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.
8. *Руденко О.В.* К 40-летию уравнения Хохлова–Заболотской // Акуст.журн. 2010. Т. 56. № 4. С. 452–462.
9. *Рубина Л.И., Ульянов О.Н.* О решении уравнения потенциала // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14. № 1. С. 130–145.
10. *Рубина Л.И., Ульянов О.Н.* Один геометрический метод решения нелинейных уравнений в частных производных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 2. С. 209–225.
11. *Рубина Л.И., Ульянов О.Н.* Решение нелинейных уравнений в частных производных геометрическим методом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 2. С. 265–280.
12. *Рубина Л.И., Ульянов О.Н.* Об одном методе решения уравнения нелинейной теплопроводности // Сибирский математический журн. 2012. Т. 53. № 5. С. 1091–1101.
13. *Рубина Л.И., Ульянов О.Н.* Об одном методе решения систем нелинейных уравнений в частных производных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 1. С. 238–246.
14. *Рубина Л.И., Ульянов О.Н.* К вопросу об отличиях в поведении решений линейного и нелинейного уравнения теплопроводности // Вестник Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Физика. 2013. Т. 5. № 2. С. 52–59.