

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.26

О ДИССИПАТИВНОЙ ПРИСОЕДИНЕННОЙ ДЛИНЕ ОТВЕРСТИЯ
ПЕРЕГОРОДКИ В КРУГЛОМ КАНАЛЕ

© 2015 г. А. И. Комкин*, М. А. Миронов**

*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

105005 Москва, ул. 2-я Бауманская 5

E-mail: akomkin@mail.ru

**Акустический институт им. Н.Н. Андреева

117036 Москва, ул. Шверника 4

E-mail: mironov@akin.ru

Поступила в редакцию 09.11.2014 г.

Проведен теоретический анализ вязкого трения, возникающего при прохождении плоской звуковой волной перегородки с отверстием в круглом канале. Решение ищется в виде ряда по собственным функциям канала. В результате находится сопротивление трения, которое описывается в терминах диссипативной присоединенной длины отверстия. Получена зависимость диссипативной присоединенной длины отверстия от отношения диаметра отверстия к диаметру канала.

Ключевые слова: звуковая волна, вязкость, канал, перегородка, отверстие, сопротивление трения, диссипативная присоединенная длина.

DOI: 10.7868/S032079191504005X

Как известно, при прохождении звуковой волной отверстия происходит частичный переход поля этой волны в поле быстро затухающих неоднородных волн в окрестности отверстия. Формально это обстоятельство, начиная с Рэлея [1], учитывается введением присоединенной длины (концевой поправки) отверстия. Аналитические оценки присоединенной длины отверстия перегородки в каналах различного поперечного сечения, которые в любом случае оказываются пропорциональными радиусу отверстия, даны в работах Фока [2] и Ингарда [3], а их дальнейшее обобщение – в [4]. Данный параметр правильнее было бы назвать инерционной присоединенной длиной, так как ее учет приводит к увеличению расчетной массы воздуха в отверстии.

Наряду с этим используется концевая поправка для сопротивления трения, связанная с потерями на трение в окрестности отверстия перегородки [3, 5]. Часто ограничиваются рассмотрением трения только на поверхности отверстия, описывая его сопротивлением трения R_s или его

нормированной величиной $R'_s = R_s/(\rho c) = (k\delta_v/a)l$, где $k = \omega/c$ – волновое число; ω – круговая частота; c – скорость звука в среде; $\delta_v = (2\nu/\omega)^{1/2}$ – глубина проникновения вязкой волны; ν – кинематическая вязкость среды; a – радиус отверстия; l – глубина отверстия, равная толщине перегородки. Для тонких перегородок, когда $l \ll a$, необходимо учитывать также трение на параллельных поверхностях

самой перегородки в окрестности отверстия. Имея это в виду, Ингард [3], основываясь на проведенной А.К. Нильсеном теоретической оценке сопротивления трения в перегородке с отверстием радиуса a в круглом канале радиуса b , приводит для предельного случая $a \ll b$ формулу для сопротивления трения при поршневом движении в отверстии, которая в наших обозначениях имеет вид

$$R'_s = (k\delta_v/a)(l + a). \quad (1)$$

Таким образом, наличие трения на поверхности перегородки формально можно также учесть увеличением действительной длины отверстия l на величину концевой поправки, равной a . Так как эта поправка обусловлена наличием диссипации энергии на поверхности перегородки, то представляется целесообразным эту вторую поправку назвать диссипативной присоединенной длиной отверстия, подобно тому как в [6] при рассмотрении движения тел в вязкой среде возникающую при этом силу сопротивления разделяют на две части: диссипативную и инерционную. Заметим, что как инерционная, так и диссипативная присоединенная длина оказываются пропорциональными радиусу отверстия. Первый параметр при рассмотрении, например, резонатора Гельмгольца, влияет на его собственную частоту, второй параметр оказывает влияние на коэффициент поглощения такого резонаторного элемента. Далее Ингард [3] для согласования расчетных данных с результатами проведенных им экспериментальных исследований

пришел к выводу о необходимости увеличения вдвое вязкой присоединенной длины отверстия. При этом формула для сопротивления трения преобразуется к виду $R'_s = (k\delta_v/a)(l + 2a)$. Эта формула используется и до настоящего времени [7, 8].

Вместе с тем, следует отметить, что в предложенной Ингардом формуле не учитывается влияние конечности размера перегородки. В связи с этим возникает необходимость рассмотрения более общего случая: оценки сопротивления трения в перегородке при произвольном соотношении между радиусами отверстия и канала. Решению этой задачи и посвящена данная работа.

Рассмотрим канал круглого поперечного радиуса b с установленной в нем поперечной перегородкой толщиной l с осесимметричным отверстием радиуса a . Совместим положение перегородки в канале с началом координат так, чтобы поперечная ось r лежала на правой поверхности перегородки, а ось симметрии канала совпадала с продольной осью x (рис. 1а). Решение задачи будет состоять в рассмотрении волнового уравнения для вязкой среды в канале и нахождении с его помощью колебательной скорости акустической волны в канале. Соответствующие этому движению линии тока условно показаны на рис. 1б сплошными линиями. В вязкой среде касательная скорость на стенках перегородки должно быть равна нулю, что обеспечивается добавлением поля вязких волн, занимающих тонкий пристеночный слой, показанный на этом рисунке пунктирными линиями. Амплитуда вязкой волны на стенке должна быть равна амплитуде соответствующей акустической волны, но иметь противоположный знак. Вычисляя касательное напряжение, пропорциональное касательной скорости в потенциальном поле, и умножая его на колебательную скорость, получаем плотность потока теряемой мощности. Она оказывается пропорциональной квадрату касательной скорости в потенциальном поле. Интегрируя квадрат модуля этой скорости по поверхности перегородки, получим диссипируемую мощность, а затем эффективную силу трения и искомое сопротивление трения на перегородке.

Положим, что в левой стороне канала генерируется плоская звуковая волна, а с противоположной стороны канала имеет место поглощающая нагрузка, обеспечивающая отсутствие в канале отраженных волн. Тогда звуковое давление при $x > 0$ можно представить в виде суммы нормальных мод:

$$P(r, x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r/b) e^{ik_n x}, \quad (2)$$

где A_n – амплитуда n -й моды звуковых колебаний; J_0 – функция Бесселя нулевого порядка; α_n – нули

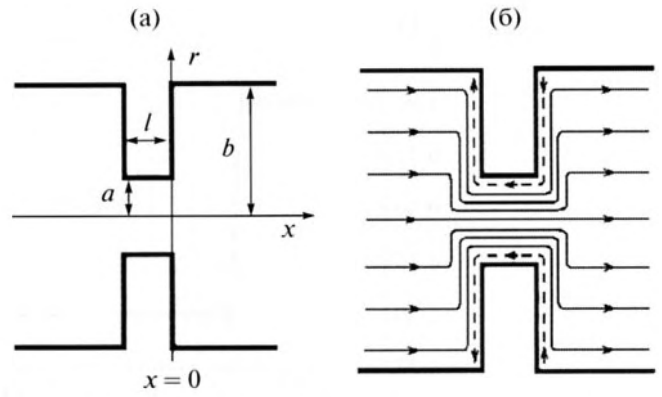


Рис. 1. Перегородка в канале: (а) расчетная схема; (б) линии тока.

функции Бесселя 1-го порядка; $k_n = k\sqrt{1 - \alpha_n^2/(kb)^2} = k\bar{k}_n$ – продольная компонента волнового числа.

Скорости частиц v в звуковой волне, распространяющейся в среде с плотностью ρ , находим из уравнения движения

$$\rho \partial v / \partial t + \nabla p = 0.$$

Подстановка в это уравнение решения (2) приводит к следующим выражениям для амплитуд скоростей в продольном V_x и радиальном V_r направлениях:

$$V_x(r, x) = \frac{1}{\rho c} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \bar{k}_n J_0(\alpha_n r/b) e^{ik_n x}, \quad (3)$$

$$V_r(r, x) = \frac{i}{\rho c k b} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \alpha_n J_1(\alpha_n r/b) e^{ik_n x}. \quad (4)$$

Для того, чтобы найти значения коэффициентов A_n в этих выражениях, разложим продольную компоненту скорости при $x = 0$ в ряд по функциям Бесселя [9]:

$$V_x(r) = V_{x0} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\alpha_n r/b), \quad (5)$$

где коэффициенты Фурье

$$a_0 = \frac{2}{b^2} \int_0^b V_{x0} r dr, \quad a_n = \frac{2}{b^2 J_0^2(\alpha_n)} \int_0^b V_{x0} J_0(\alpha_n r/b) r dr. \quad (6)$$

Следуя [1, 3], будем считать, что осевое движение частиц среды в отверстии перегородки является поршневым и совершается с амплитудой скорости V_0 . Учитывая также, что значение осевой скорости в канале на стенках самой перегородки равно нулю, можно в верхнем пределе интегрирования (6) заменить величину b на a . Тогда коэффициенты Фурье приводятся к виду

$$a_0 = V_0 g^2, \quad a_n = V_0 \frac{2g J_1(\alpha_n g)}{\alpha_n J_0^2(\alpha_n)}, \quad (7)$$

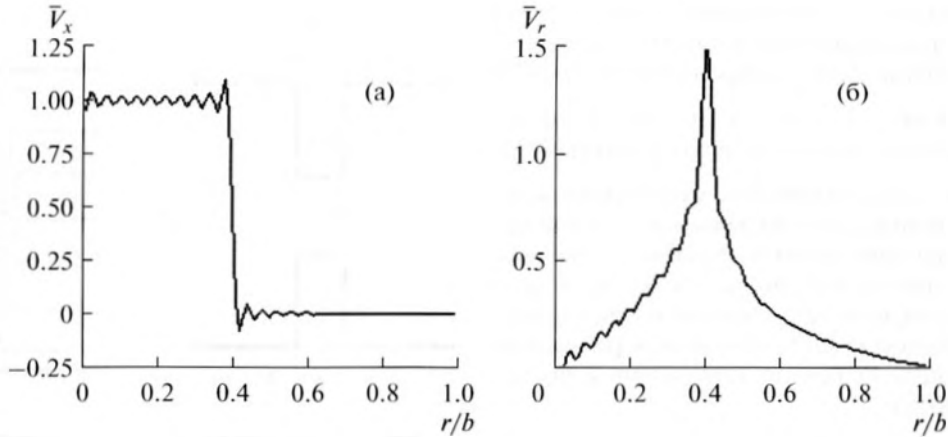


Рис. 2. Распределение продольной (а) и радиальной (б) компонент скорости в поперечном сечении канала у перегородки.

где $g = a/b$. Из сравнения выражений (3) и (5) при $x = 0$ вытекает соотношение $\bar{k}_n A_n = \rho c a_n$, из которого с учетом (7) находим искомые значения коэффициентов A_n :

$$A_0 = \rho c V_0 g^2, \quad A_n = \rho c V_0 \frac{2gJ_1(\alpha_n g)}{\bar{k}_n \alpha_n J_0^2(\alpha_n)}. \quad (8)$$

Подставляя теперь (8) в (2), получим выражение, описывающее распределение звукового давления при $x = 0$:

$$P(r) = \rho c V_0 \left[g^2 - ika \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\alpha_n g)}{\alpha_n^2 J_0^2(\alpha_n)} J_0(\alpha_n r/b) \right] = \rho c V_0 \left[g^2 - ika \bar{P}_H(r) \right]. \quad (9)$$

Эта формула соответствует низкочастотному приближению, когда $\bar{k}_n \approx i\alpha_n/(kb)$, которое будет использоваться и в дальнейшем. При этом первое слагаемое в квадратных скобках определяет амплитуду плоской волны, а слагаемые под знаком суммы — амплитуды затухающих неоднородных волн. Вид функции существенно зависит от параметра g . Заметим, что если найти среднее значение второго слагаемого в (9), проинтегрировав его по поперечному сечению канала, то получим величину, определяющую нормированный импеданс отверстия в перегородке с правой стороны канала:

$$\xi_c = -ika \frac{2\pi}{\pi a^2} \int_0^a \bar{P}_H(r) r dr = ika \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4J_1(\alpha_n g)}{g \alpha_n^3 J_0^2(\alpha_n)} = ikl_{ai}, \quad (10)$$

где l_{ai} — инерционная присоединенная длина отверстия, которая для небольших отверстий в перегородке, когда $g < 0.25$, аппроксимируется линейной зависимостью [4]:

$$l_{ai} = 0.81(1 - 1.34g)a. \quad (11)$$

Аналогично, подставляя (8) в (3) и (4), получим выражения, описывающие распределение продольной и радиальной компонент скорости частиц в поперечном сечении канала при $x = 0$:

$$V_x(r) = V_0 g^2 + V_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2gJ_1(\alpha_n g)}{\alpha_n J_0^2(\alpha_n)} J_0(\alpha_n r/b) = V_0 \bar{V}_x(r), \quad (12)$$

$$V_r(r) = V_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2gJ_1(\alpha_n g)}{\alpha_n J_0^2(\alpha_n)} J_1(\alpha_n r/b) = V_0 \bar{V}_r(r). \quad (13)$$

Графики величин $\bar{V}_x(r)$ и $\bar{V}_r(r)$ как функций безразмерного параметра r/b , вычисляемые здесь и в дальнейшем для 50 членов ряда, представлены на рис. 2. Продольная компонента скорости, как и следовало ожидать, удовлетворяет заданным граничным условиям, обращаясь в ноль на стенке перегородки. Радиальная компонента скорости принимает максимальные значения на кромке отверстия при $r/b = g$. Величина этого максимума зависит от g и в соответствии с (13) определяется выражением

$$\bar{V}_{r \max}(g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2gJ_1^2(\alpha_n g)}{\alpha_n J_0^2(\alpha_n)}.$$

График функции $\bar{V}_{r \max}(g)$, представленный на рис. 3, имеет экстремум при $g = 0.6$. Следует отметить, что отсутствие бесконечности поля радиальной скорости на кромке отверстия связано с предположением о поршневом движении среды в отверстии.

Как отмечалось выше, равенство нулю полной касательной скорости в вязкой среде на поверхности перегородки обеспечивается добавлением вихревого (вязкого) поля скорости, амплитуда которого должна быть равна по модулю амплитуде радиальной компоненты скорости частиц V_{r0} на этой поверхности, но иметь противоположный знак. При этом диссипируемая в единицу времени энергия на поверхности перегородки определится формулой [3, 6]

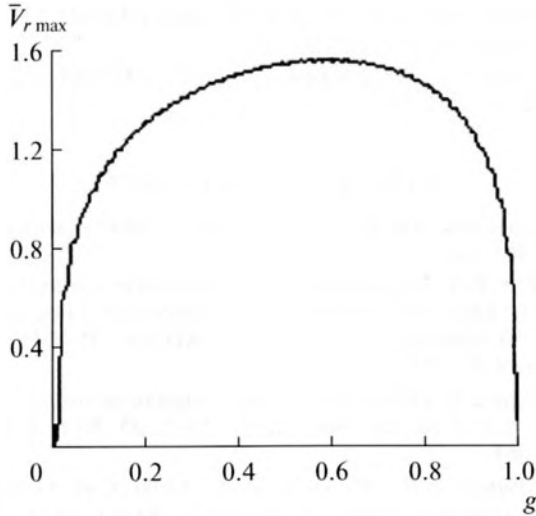


Рис. 3. Зависимость амплитуды радиальной компоненты скорости на кромке отверстия от параметра g .

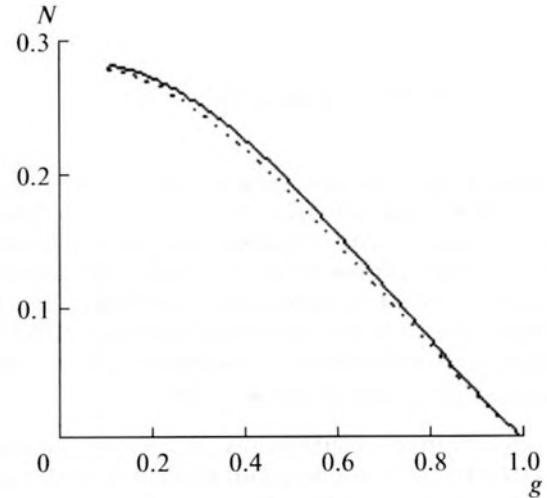


Рис. 4. Графики функции $N(g)$ для исходной (—) и уточненной (⋯) расчетной модели.

$$W_v = \frac{\rho}{2} \sqrt{\frac{v\omega}{2}} \int_S |V_{r0}|^2 ds, \quad (14)$$

где ρ — плотность среды; S — площадь поверхности перегородки с одной стороны канала. С учетом (13) формула (14) преобразуется к виду

$$W_v = \pi \rho V_0^2 g^2 \sqrt{\frac{v\omega}{2}} \int_a^b \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\alpha_n g)}{\alpha_n J_0^2(\alpha_n)} J_1(\alpha_n r/b) \right|^2 r dr = \pi \rho V_0^2 g^2 \sqrt{\frac{v\omega}{2}} \int_a^b |\tilde{V}_{r0}|^2 r dr. \quad (15)$$

Согласно [6], соответствующая диссипируемой энергии сила трения $F_v = 2W_v/V_0$. Переходя далее от силы трения к нормированному сопротивлению трения R_s , получим

$$R'_s = \frac{F_v}{V_0 \rho c \pi a^2} = \frac{k \delta_v}{a^2} g^2 \int_a^b |\tilde{V}_{r0}|^2 r dr. \quad (16)$$

Осуществляя теперь в интеграле (16) замену переменной $\hat{r} = r/b$, приведем последнее выражение к виду

$$R'_s = k \delta_v \int_g^1 |\tilde{V}_{r0}|^2 \hat{r} d\hat{r} = k \delta_v N(g). \quad (17)$$

Рисунок 4 показывает, что график функции $N(g)$ является монотонно убывающей функцией g . Как и следовало ожидать, при $g \rightarrow 1$ (т.е. в отсутствие перегородки) $N(g) \rightarrow 0$. В другом предельном случае, при $g \rightarrow 0$, функция $N(g)$ принимает значения близкие к 0.28, что ниже предельного значения 0.5, полученного, как отмечалось выше, Нильсеном и приведенного в [3].

Сравнение (17) с формулой (1) показывает, что диссипативная длина отверстия с одной стороны перегородки $l_{ad} = N(g)a$. Как и в случае с инерционной присоединенной длиной, она оказывается пропорциональной радиусу отверстия. Для больших отверстий перегородки, когда $g > 0.4$, функция $N(g)$, а следовательно, и присоединенная длина l_{ad} , может быть аппроксимирована линейной зависимостью: $l_{ad} = 0.38(1 - g)a$. Заметим, что линейной зависимостью, определяемой (10), аппроксимируется и инерционная присоединенная длина l_{ai} , однако эта аппроксимация правомерна, наоборот, для небольших отверстий при $g < 0.25$. Кроме того, постоянный множитель в линейной аппроксимации, характеризующий присоединенную длину отверстия в бесконечном экране (перегородке), оказывается для инерционной присоединенной длины существенно большим, чем для диссипативной. Заметим также, что формула (17) описывает сопротивление трения на одной поверхности перегородки. Общее нормированное сопротивление перегородки с отверстием запишется в виде

$$R'_s = (k \delta_v / a) [l + 2N(g)a]. \quad (18)$$

Приведенные выше результаты были получены в предположении поршневого движения воздуха в отверстии перегородки. Можно отойти от этой идеализации и, следуя Рэлею [1], положить, что распределение осевой скорости в отверстии описывается зависимостью: $V_x(r) = V_0 [1 + m_1(r/a)^{m_2}]$, где m_1 и m_2 — постоянные. Это приведет к тому, что коэффициенты Фурье (7) преобразуются к виду

$$a_0 = V_0 g^2 [1 + m_1 / (m_2 + 2)], \quad (19)$$

$$a_n = V_0 \frac{2g}{\alpha_n J_0^2(\alpha_n)} [J_1(\alpha_n g) + \Delta_n],$$

где

$$\Delta_n = m_1 \int_0^1 \tilde{r}^{(m_2+1)} J_0(\alpha_n g \tilde{r}) d\tilde{r}, \quad \tilde{r} = r/a. \quad (20)$$

У Рэлея значения постоянных $m_1 = 1.1$ и $m_2 = 4$. Между тем, как следует из результатов работы [10], в которой теоретически получено распределение осевой скорости в отверстии перегородки для случая вязкой среды, используемая аппроксимация будет в большей степени соответствовать расчетным кривым, если увеличить значение постоянной m_2 , положив $m_2 = 30$.

Вычисления уточненных значений коэффициентов Фурье и последующие расчеты показали, что сделанные уточнения приводит к незначительным изменениям, начинающимся с третьей значащей цифры, в результатах расчетов. Значения функции $N(g)$ при этом несколько уменьшаются, что отражается точечной линией на рис. 4. Следовательно, форма кривой распределения осевой скорости в отверстии перегородки не оказывает существенного влияния на диссипативную присоединенную длину отверстия. Это согласуется с результатами Рэлея [1] по уточнению инерционной присоединенной длины отверстия.

Таким образом, в работе дана оценка диссипативной присоединенной длины отверстия в перегородке при произвольных отношениях диаметра отверстия к диаметру канала, что особенно важно для тонких по сравнению с диаметром отверстия перегородок, когда потери на трение в самом отверстии становятся малыми. Полученные результаты могут быть использованы при определении

акустических характеристик реактивных элементов глушителей шума.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 14-08-00703).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стретт Дж.В. (Лорд Рэлей). Теория звука. М.: ГИТТЛ, 1955. Т. 2. 476 с.
2. Фок В.А. Теоретическое исследование проводимости круглого отверстия в перегородке, поставленной поперек трубы // Докл. АН СССР. 1941. Т. 31. № 9. С. 875–878.
3. Ingard U. On the theory and design of acoustic resonators // J. Acoust. Soc. Am. 1953. V. 25. № 6. P. 1037–1061.
4. Комкин А.И., Миронов М.А., Юдин С.И. О присоединенной длине отверстий // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 6. С. 677–682.
5. Велижанина К.А., Вощукова Е.А., Свирина Л.Д. Влияние потерь в объеме резонатора на его акустические характеристики // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 3. С. 386–388.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
7. Kim S.R., Kim Y.-H., Jang J.-H. A theoretical model to predict the low-frequency sound absorption of a Helmholtz resonator array // J. Acoust. Soc. Am. 2006. V. 119. № 4. P. 1933–1936.
8. Allard J.F., Atalla N. Propagation of sound in porous media. 2nd ed. John Wiley & Sons, 2009. 358 p.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966. 296 с.
10. Davis A.M.J., Nagem R.J. Influence of viscosity on the diffraction of sound by a circular aperture in a plane screen // J. Acoust. Soc. Am. 2003. V. 3. № 6. P. 3080–3090.