АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2015, том 61, № 4, с. 428–431

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534-16

ПАРАДОКСАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОЛЕЙ ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ В ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

© 2015 г. А. П. Киселев*, **, ***, А. М. Тагирджанов**

*Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН
191023 Санкт-Петербург, Фонтанка 27

**Санкт-Петербургский государственный университет, физический факультет
198504 Санкт-Петербург, Старый Петергоф, ул. Ульяновская 3

***Институт проблем машиноведения РАН
199178 Санкт-Петербург, Большой проспект В.О. 61

E-mail: kiselev@pdmi.ras.ru; aztagr@gmail.com

Поступила в редакцию 22.06.2014 г.

Рассматриваются компоненты нестационарного тензора Грина для однородной изотропной упругой среды – решения задачи о нестационарной сосредоточенной силе. Как известно, они могут содержать аномальное поле, которое отлично от нуля между фронтами волн P и S и растет, вообще говоря, со временем. В работе охарактеризованы временны́е зависимости источника, при которых аномальное поле отсутствует.

Ключевые слова: точечный источник, тензор Грина, упругие волны, дельтаобразная зависимость от времени.

DOI: 10.7868/S0320791915030089

1. ВВЕДЕНИЕ

Общеизвестно и считается несомненным, что волновые поля распространяются вдоль лучей, и в случае локализованных источников, действующих в течение короткого времени, сосредоточены вблизи соответствующих волновых фронтов. На этом основано широчайшее применение лучевого метода (по другой терминологии геометрической акустики) для расчета и интерпретации полей упругих волн[1].

Мы рассматриваем классическое решение задачи о сосредоточенной силе в однородной изотропной упругой среде. Для достаточно общей временно́й зависимости источника (в частности, дельтаобразной) поле в области между сферическими фронтами продольной и поперечной волн – мы называем их по сейсмической традиции волнами P и S – отлично от нуля. Заметка посвящена обсуждению этого аномального поля. Указываются временны́е зависимости источника, при которых аномальное поле не возникает, в частности, источники нулевой длительности.

[1] Так называемые "нелучевые эффекты" (термин был в большом ходу в начале 1980-х годов) оказались объяснимы с лучевых позиций при достаточно внимательном рассмотрении [1].

2. КЛАССИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА

Рассмотрим классическое решение нестационарной задачи о неподвижном точечном источнике возмущений упругой среды, восходящее к Стоксу [2]. Элементарный вывод соответствующих формул ясно изложен в учебниках, см., например, [3–5]. Среда считается однородной и изотропной. Обозначим скорости волн P и S через a и b, $a > b > 0$. Смещение $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$ описывается уравнением

$$a^2 \text{grad div}\mathbf{u} - b^2 \text{rot rot}\mathbf{u} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -\mathbf{F}. \quad (1)$$

В качестве источника $\mathbf{F}$ выбрана сосредоточенная сила, действующая вдоль оси x:

$$\mathbf{F} = 4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z)\chi(t)\mathbf{e}_1, \quad (2)$$

где δ – одномерная дельта-функция, $\mathbf{e}_1$ – орт оси x. Этот источник (в отличие от вырожденных источников, таких как центр расширения и центр вращения) возбуждает объемные волны обоих типов. Пусть временна́я зависимость источника $\chi(t)$ удовлетворяет условию

$$\chi(t)\big|_{t<0} \equiv 0, \quad (3)$$

которое гарантирует единственность решения уравнения во всем пространстве, удовлетворяющего условию причинности $\mathbf{u}\big|_{t<0} \equiv 0$. Простые, хотя и громоздкие выкладки приводят (см., например, [3–5]) к результату

$$\mathbf{u} = \frac{\chi(t - R/a)}{a^2 R} s_1\mathbf{s} - \frac{\chi(t - R/b)}{b^2 R}(s_1\mathbf{s} - \mathbf{e}_1) + \frac{3s_1\mathbf{s} - \mathbf{e}_1}{R^3} X, \quad (4)$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – расстояние от источника, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3) = \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R}\right)$ – единичный вектор, направленный из точки источника $(0, 0, 0)$ в точку наблюдения (x, y, z), и

$$X = X(R,t) := \int_{R/a}^{R/b} \tau\chi(t - \tau)d\tau. \quad (5)$$

Первые два слагаемых в (4) – это сферические P и S волны с фронтами $t = \frac{R}{a}$ и $t = \frac{R}{b}$, движущимися из источника, после его включения, с соответствующими скоростями. Поляризации смещений, описываемых этими слагаемыми, чисто продольны и чисто поперечны, соответственно.

Третье же слагаемое не имеет видимой связи с фронтами, быстрее первых двух слагаемых убывает с удалением от источника, сосредоточено в сферическом слое между фронтами волн P и S и, вообще говоря, может линейно нарастать со временем[2] в каждой точке внутри этого слоя. В нем присутствуют поляризации обоих типов. Соответствующее поле мы и называем аномальным.

Мы специально рассмотрим случай дельтаобразной временно́й зависимости, которая популярна как математически удобная модель короткодействующего импульса. Затем мы покажем, для каких сосредоточенных в точке временны́х зависимостей $X \equiv 0$ между фронтами сферических волн, и рассмотрим математически простые несингулярные, но действующие в течение короткого времени временны́е зависимости $\chi(t)$. Будут указаны условия на $\chi(t)$, при которых аномальное поле отсутствует.

3. СЛУЧАЙ ДЕЛЬТАОБРАЗНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВРЕМЕНИ

Рассмотрим вслед за рядом авторов (например, [4, 5]) дельтаобразную зависимость временно́й функции

$$\chi(t) = \delta(t). \quad (6)$$

Теперь два первых слагаемых в (4) сосредоточены на фронтах P и S волн, а третье равно

$$X = t\left[H\left(t - \frac{R}{a}\right) - H\left(t - \frac{R}{b}\right)\right], \quad (7)$$

где H – функция Хевисайда:

$$H(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t \le 0, \\ 1 \text{ при } t > 0. \end{cases} \quad (8)$$

[2] Отметим, что линейный рост поля по времени характерен для задач, в которых источники движутся с резонансными скоростями, см., например, [6, 7].

Причина странного поведения этого члена в том, что источник (2), (6) монополярен и дает на нулевой частоте статическое смещение среды. Попробуем заменить его простым с математической точки зрения сосредоточенным по времени источником с нулевым средним.

4. ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ВРЕМЕННЫ́Е ЗАВИСИМОСТИ, ДЛЯ КОТОРЫХ $X \equiv 0$ МЕЖДУ ФРОНТАМИ

Положим

$$\chi(t) = \delta''(t) = \frac{d^2\delta(t)}{dt^2}. \quad (9)$$

Решение для этого случая получается двукратным дифференцированием по времени выражения (7) с использованием простейших правил обращения с обобщенными функциями (см., например, [8]). Теперь

$$X = \frac{R}{a}\delta'\left(t - \frac{R}{a}\right) - \frac{R}{b}\delta'\left(t - \frac{R}{b}\right) + 2\delta\left(t - \frac{R}{a}\right) - 2\delta\left(t - \frac{R}{b}\right). \quad (10)$$

Выражение (10) сосредоточено на фронтах волн P и S.

Очевидно, $X \equiv 0$ между фронтами, т.е. при $\frac{R}{a} < t < \frac{R}{b}$, не только для (9), но и для любой сосредоточенной в одной точке функции вида

$$\chi(t) = \frac{d^m\delta(t)}{dt^m}, \quad m \ge 2. \quad (11)$$

Нетрудно показать, что линейная комбинация выражений (11) дает полное описание обобщенных функций, для которых $X \equiv 0$ между фронтами.

5. СТУПЕНЧАТЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ВРЕМЕННЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ (11)

Производная функции $f(t)$ аппроксимируется, как известно, формулой

$$f'(t) \approx \frac{f(t + h/2) - f(t - h/2)}{h}, \quad 0 < h \ll 1.$$

Рассмотрим ступенчатые аппроксимации сингулярных обобщенных функций δ, δ', ..., $\delta^{(m)}$. Как известно, $\delta(t)$ является пределом ступенчатых функций

$$\delta_N(t) := \frac{H(t + h/2) - H(t - h/2)}{h}$$

большой высоты $N = \frac{1}{h}$ и малой ширины h, см. рис. 1. Аналогичные разностные аппроксимации известны и для производных высших порядков. В частности, функции

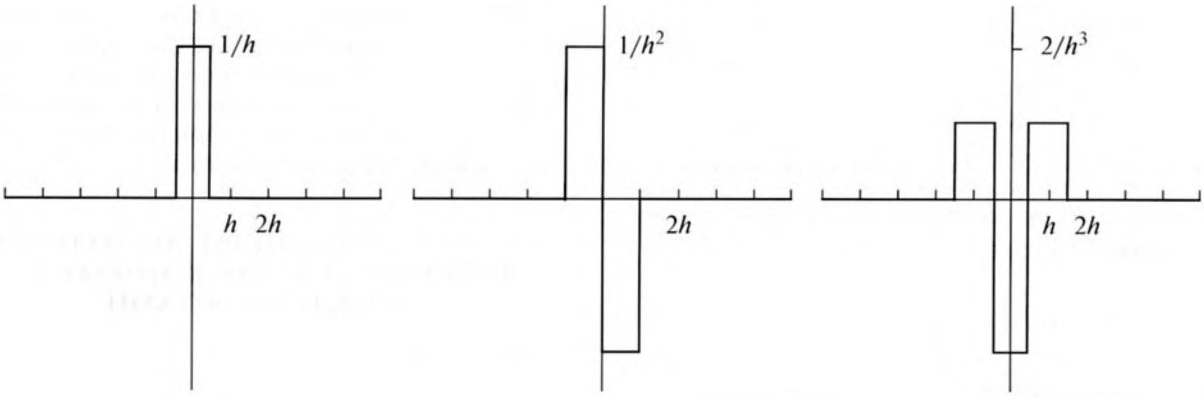

Рис. 1. Ступенчатые функции $\delta_N(t)$, $\delta'_N(t)$, $\delta''_N(t)$.

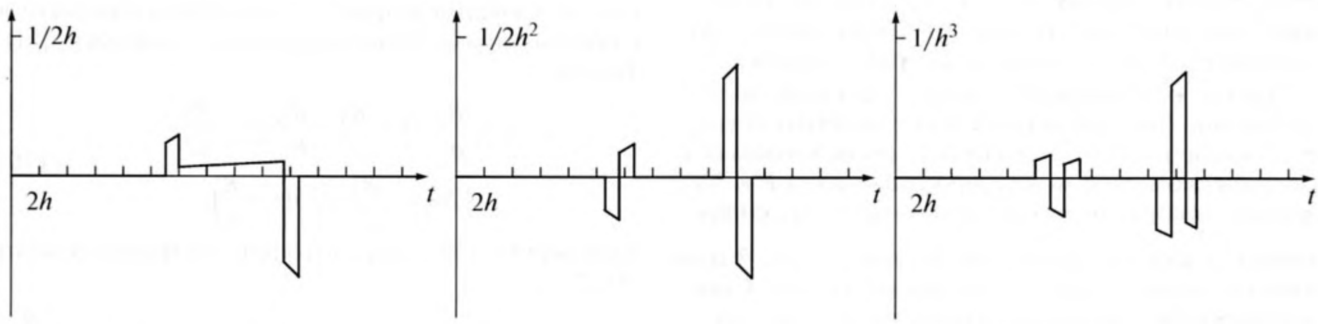

Рис. 2. Горизонтальные компоненты поля u_2 для источников с $\chi(t) = \delta_N(t)$, $\chi(t) = \delta'_N(t)$ и $\chi(t) = \delta''_N(t)$ при $R = 20h$, $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, $\mathbf{s} = \left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0\right)$.

$$\delta''_N(t) := \frac{\delta_N(t+h) + \delta_N(t-h) - 2\delta_N(t)}{h^2}$$

приближают (11) при $h \to 0$ в смысле обобщенных функций.

Нетрудно установить, что

$$\delta_N^{(k)}(t) = \frac{1}{h^k}\sum_{m=0}^{k}(-1)^m C_m^k \delta_N\left(t - \left(\frac{k}{2} - m\right)h\right), \qquad (12)$$

откуда получается следующее выражение для соответствующей величины (5):

$$X(t) = X_N(t) :=$$

$$:= \frac{1}{h^k}\sum_{m=0}^{k}(-1)^m C_m^k \int_{R/a}^{R/b} \delta_N\left(t - \left(\frac{k}{2} - m\right)h - \tau\right)\tau d\tau. \qquad (13)$$

Горизонтальные компоненты поля u_2 для источников с $\chi(t) = \delta_N(t)$, $\chi(t) = \delta'_N(t)$ и $\chi(t) = \delta''_N(t)$, вычисленные с помощью формул (4), (12), (13), изображены на рис. 2.

6. ОБСУЖДЕНИЕ

Отметим, что если в качестве $\chi(t)$ взять гладкую функцию, обращающуюся в нуль вне отрезка $0 \le t \le T$, такую, что она сама и интеграл от нее имеют нулевые средние, то $X \equiv 0$ при $\frac{R}{a} + T \le$ $\le t \le \frac{R}{b} - T$.

Как известно, причинное фундаментальное решение гиперболического оператора с постоянными коэффициентами при нечетном числе пространственных переменных (частным случаем которого является решение задачи (1)–(2)) имеет дельтаобразные особенности на фронтах соответствующих волн и тождественно равно нулю впереди самой быстрой волны и позади самой медленной [8]. Поведение решения между фронтами, насколько нам известно, не исследовалось, исключая отдельные численные эксперименты. Так, для однородной анизотропной среды из [9] явствует, что поле между фронтами, вообще говоря, отлично от нуля. Однако вопрос о том, является ли оно линейным по времени и, следовательно, исчезает ли для источников, рассмотренных выше, остается открытым.

В заключение авторы благодарят Ю.И. Бобровницкого, Дж.Х. Вудхауза [J.H. Woodhouse], М. Дешампа [M. Deschamps], Э. Дюкасса [É. Ducasse], Д.П. Коузова, А.В. Попова и А.В. Шанина за полезные обсуждения. Авторы признательны рецензентам за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Babich V.M., Kiselev A.P.* Non-geometrical waves – are there any? An asymptotic description of some "nongeometrical" phenomena in seismic wave propagation // Geophys. J. Intern. 1989. V. 99. № 2. P. 415–420.
2. *Stokes G.G.* On the dynamical theory of diffraction // Trans. Cambridge Phil. Soc. 1851. V. 9. № 1. P. 1–62.
3. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.–Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 674 с.
4. *Hudson J.A.* Excitation and propagation of elastic waves. Cambridge: Cambridge University Press, 1980. 226 p.
5. *Бабич В.М., Киселев А.П.* Упругие волны. Высокочастотная теория. СПб: БХВ, 2014. 310 с.
6. *Поручиков В.Б.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1986.
7. *Kaplunov J., Nolde E., Prikazchikov D.A.* A revisit to the moving load problem using an asymptotic model for the Rayleigh wave // Wave Motion. 2010. V. 47. № 1. P. 440–451.
8. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Добросвет, 2000. 408 с.
9. *Ducasse É., Deschamps M.* An alternative approach to calculate the time-domain Green's tensor for anisotropic elastic media // EUROMECH Colloquium 481, Recent advances in the theory and application of surface and edge waves, June 11–13, Keele, 2007.