

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ
АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК: 534.23:537.874.6

ГИБРИДНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ
НА ПЛОСКИХ ЭКРАНАХ

© 2015 г. А. Г. Кюркчан*, **, С. А. Маненков*

*Московский технический университет связи и информатики

111024 Москва, ул. Авиамоторная 8а

**Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
141190 Московская обл., Фрязино, пл. Введенского 1

E-mail: mail44471@mail.ru

Поступила в редакцию 19.07.2014 г.

Предложен новый вариант метода продолженных граничных условий для решения задачи дифракции плоской волны на плоских трехмерных экранах, больших по сравнению с длиной волны. Рассмотрены случаи акустически мягкого и жесткого экранов. Приведены численные результаты для экранов круговой, эллиптической и квадратной формы. Проведена проверка выполнения оптической теоремы и теоремы Уфимцева для указанных форм экранов.

Ключевые слова: дифракция волн, метод продолженных граничных условий, тонкие экраны.

DOI: 10.7868/S0320791915020082

ВВЕДЕНИЕ

Классические задачи дифракции остаются весьма актуальными, что подтверждается недавними публикациями на эту тему (см., например, [1–3]). К числу такого рода задач, несомненно, относится задача дифракции волн на плоских экранах. Наиболее изученными можно считать задачи дифракции на полуплоскости, тонкой ленте и круговом диске [4, 5]. Значительно менее изучены экраны иной формы. Ниже для решения задачи дифракции на плоских экранах предлагается гибридный подход [6, 7]. Существо предлагаемого подхода заключается в следующем. Экран разбивается на “центральную” и “краевую” части, определение которых носит эвристический характер. Далее, на центральной части искомое распределение источников рассеянного поля (назовем его током) полагается равным соответствующему распределению на бесконечной плоскости, а на краевой части ток полагается неизвестным. Очевидно, что подобное разбиение уместно при рассмотрении экранов, размеры которых много больше длины волны падающего поля. Предлагаемый подход в определенном смысле является обобщением метода краевых волн [5].

Для уменьшения объема вычислений в работе рассмотрены экраны, обладающие симметрией различного вида, в частности исследована дифракция на большом круговом диске, а также рассеяние на экранах, симметричных относительно двух осей – x и y (если считать, что экран располо-

жен в плоскости $z = 0$). Таким образом, в настоящей работе объем требуемых вычислений удастся сократить как за счет использования гибридного метода, так и за счет учета той или иной симметрии рассеивателя.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим математическую постановку задачи. Требуется найти функцию $U^1(\mathbf{r}) \equiv U^1(x, y, z)$, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца всюду вне поверхности экрана, занимающего плоскую область D с границей S , лежащую в плоскости $z = 0$. При этом предполагаем, что ось z перпендикулярна плоскости экрана. Всюду ниже будем обозначать поверхность экрана и проекцию поверхности экрана на плоскость $z = 0$ одной и той же буквой D . На поверхности экрана предполагается выполненным условие Дирихле

$$U = 0, \quad \mathbf{r} \in D, \quad (1)$$

или Неймана

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad \mathbf{r} \in D, \quad (2)$$

где $U = U^0 + U^1$, причем U^0 – известная функция (поле падающей на рассеиватель волны), которая имеет вид

$$U^0 = \exp(-ik(x \sin \theta_0 \cos \varphi_0 + y \sin \theta_0 \sin \varphi_0 + z \cos \theta_0)). \quad (3)$$

Здесь θ_0, φ_0 – углы падения плоской волны. Рассеянное поле U^1 удовлетворяет условию излучения на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial U^1}{\partial r} + ikU^1 \right) = 0, \quad (4)$$

где r – радиальная координата в сферической системе координат.

ВЫВОД ДВУМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Будем решать поставленную задачу при помощи метода продолженных граничных условий (МПГУ) [6]. В соответствии с этим методом запишем интегральное представление для рассеянного волнового поля в виде

$$U^1(\mathbf{r}) = k^2 \int_D j(x', y') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Big|_{z'=0} dz' dx' dy' \quad (5)$$

в случае условия Дирихле, либо

$$U^1(\mathbf{r}) = k \int_D j(x', y') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial z'} \Big|_{z'=0} dz' dx' dy' \quad (6)$$

в случае условия Неймана. В формулах (5) и (6)

$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-ikR}}{4\pi kR}$, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, k – волновое число,

$j(x', y')$ – неизвестная функция, которая равна

$\frac{1}{k} \left[\frac{\partial U}{\partial z} \right]_D$ либо $-[U]_D$, соответственно в (5) либо в (6).

В последних формулах скобки означают скачок либо производной, либо самого волнового поля. Далее будем считать, что условие (1) или (2) выполнены не на поверхности D экрана, а на плоской поверхности D_δ , которая получается смещением поверхности экрана на небольшое положительное число δ по оси z . Подставим теперь формулу (5) в указанное условие на поверхности D_δ , либо продифференцируем равенство (6) по z и подставим в соответствующее условие на D_δ . В результате получим следующее интегральное уравнение:

$$\int_D j(x', y') K(x, y, x', y') dx' dy' = f(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (7)$$

где в случае условия Дирихле

$$K(x, y, x', y') = k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Big|_{z'=0} \quad (8)$$

и

$$K(x, y, x', y') = \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial z \partial z'} \Big|_{z'=0} \quad (9)$$

в случае условия Неймана. Правая часть уравнения (7) имеет вид

$$f(x, y) = -U^0(x, y, \delta), \quad (10)$$

либо

$$f(x, y) = -\frac{1}{k} \frac{\partial U^0}{\partial z} \Big|_{z=\delta} \quad (11)$$

соответственно. Заметим, что в интегральном уравнении (7) ядро является гладкой функцией, так как точка источника и точка наблюдения не совпадают, т.е. находятся на разных поверхностях. Вследствие этого в случае условия Неймана на поверхности экрана мы дифференцируем под знаком интеграла (см. (9)), что допустимо, так как подынтегральное выражение не имеет особенности в рассматриваемом случае. Такая структура ядра полученного интегрального уравнения очень удобна для построения вычислительных алгоритмов.

Полагая, что размер экрана велик по сравнению с длиной волны, будем считать, что на центральной части экрана D_0 неизвестная функция $j(x, y)$ может быть заменена на величину

$$j_{\varphi_0}(x, y) = -2i \cos \theta_0 \exp(-ik(x \sin \theta_0 \cos \varphi_0 + y \sin \theta_0 \sin \varphi_0)), \quad (12)$$

либо

$$j_{\varphi_0}(x, y) = -2 \exp(-ik(x \sin \theta_0 \cos \varphi_0 + y \sin \theta_0 \sin \varphi_0)) \quad (13)$$

соответственно в случае условий (1) или (2). В результате интегральное уравнение (7) примет вид

$$\int_{D_1} j(x', y') K(x, y, x', y') dx' dy' = f(x, y) + f_{\varphi_0}(x, y), \quad (14)$$

$$(x, y) \in D_1,$$

где

$$f_{\varphi_0}(x, y) = - \int_{D_0} j_{\varphi_0}(x', y') K(x, y, x', y') dx' dy' \quad (15)$$

– известная функция. В уравнении (14) $D_1 = D \setminus D_0$. Таким образом, носитель неизвестной функции в (14) меньше (см. численные результаты ниже) носителя в исходном уравнении (7). Отметим, что в качестве области D_0 можно, например, выбрать область, подобную области D экрана.

После решения интегрального уравнения находим диаграмму рассеяния экрана по формуле

$$g(\theta, \varphi) = g_{\varphi_0}(\theta, \varphi) + g_1(\theta, \varphi), \quad (16)$$

где

$$g_{\phi_0}(\theta, \varphi) = F \int_{D_0} j_{\phi_0}(x', y') \exp(ikx' \sin \theta \cos \varphi +iky' \sin \theta \sin \varphi) dx' dy',$$

$$g_1(\theta, \varphi) = F \int_{D_1} j(x', y') \exp(ikx' \sin \theta \cos \varphi +iky' \sin \theta \sin \varphi) dx' dy',$$
(17)

причем $F = k^2/4\pi$ в случае условия Дирихле на поверхности экрана, либо $F = ik^2 \cos \theta/4\pi$ в случае условия Неймана.

ДИФРАКЦИЯ НА БОЛЬШОМ КРУГОВОМ ДИСКЕ

Рассмотрим вначале частный случай, когда экран представляет собой круглый идеально отражающий диск радиуса a . В качестве области D_0 выбираем круг радиуса $a_1 < a$ с центром в начале координат. В исследуемом случае можно учесть симметрию вращения тела. С этой целью запишем интегральное уравнение (14) в виде

$$\int_0^{2\pi} \int_{a_1}^a j(\rho', \varphi') K(\rho, \varphi, \rho', \varphi') \rho' d\rho' d\varphi' =$$

$$= f(\rho, \varphi) + f_{\phi_0}(\rho, \varphi),$$
(18)

где

$$f_{\phi_0}(\rho, \varphi) = - \int_0^{2\pi} \int_0^{a_1} j_{\phi_0}(\rho', \varphi') K(\rho, \varphi, \rho', \varphi') \rho' d\rho' d\varphi',$$

$$a_1 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$
(19)

В формулах (18) и (19) (ρ, φ) – полярные координаты. Далее, разлагая ядро интегрального уравнения и неизвестную функцию в ряды Фурье

$$j(\rho', \varphi') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} j_m(\rho') \exp(im\varphi'),$$
(20)

$$K(\rho, \varphi, \rho', \varphi') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_m(\rho, \rho') \exp(im\psi),$$

$$\psi = \varphi - \varphi',$$
(21)

получим бесконечную систему одномерных интегральных уравнений следующего вида:

$$\int_{a_1}^a K_m(\rho, \rho') j_m(\rho') \rho' d\rho' = f_m(\rho) + f_m^{\phi_0}(\rho),$$

$$a_1 \leq \rho \leq a, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$
(22)

где

$$K_m(\rho, \rho') = \begin{cases} \frac{k^2}{2} S_m \Big|_{z'=0}^{z=\delta}, & \text{условие Дирихле,} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S_m}{\partial z \partial z'} \Big|_{z'=0}^{z=\delta}, & \text{условие Неймана,} \end{cases}$$
(23)

$$S_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-ikR - im\psi)}{kR} d\psi,$$
(24)

$$R = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \psi + (z - z')^2},$$

$$f_m(\rho) = Ai^{-m} J_m(k\rho \sin \theta_0) \exp(-im\varphi_0),$$
(25)

$$f_m^{\phi_0}(\rho) = Bi^{-m} \times$$

$$\times \exp(-im\varphi_0) \int_0^{a_1} K_m(\rho, \rho') J_m(k\rho' \sin \theta_0) \rho' d\rho',$$
(26)

$$A = \begin{cases} -\exp(-ik\delta \cos \theta_0), & \text{условие Дирихле,} \\ i \cos \theta_0 \exp(-ik\delta \cos \theta_0), & \text{условие Неймана,} \end{cases}$$
(27)

$$B = \begin{cases} 2i \cos \theta_0, & \text{условие Дирихле,} \\ 2, & \text{условие Неймана.} \end{cases}$$
(28)

Уравнения (22) решаются численно методом коллокации. Для этого на интервале $[a_1, a]$ выбираем точки коллокации

$$\rho_n = a_1 + (n - 0.5) \frac{a - a_1}{N}, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$
(29)

Неизвестные функции $j_m(\rho)$ разлагаем по базису из кусочно-постоянных функций. В результате подстановки этого разложения в (22) и приравнивания правой и левой частей полученного равенства в точках коллокации (29), получаем набор систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$\sum_{n=1}^N A_{jn}^m c_n^m = b_j^m, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$
(30)

в которых

$$A_{jn}^m = \int_{\rho_n - h/2}^{\rho_n + h/2} K_m(\rho_j, \rho') \rho' d\rho', \quad b_j^m = f_m(\rho_j) + f_m^{\phi_0}(\rho_j),$$
(31)

причем $h = (a - a_1)/N$ – шаг сетки. В СЛАУ (30) c_n^m представляют собой неизвестные коэффициенты при базисных функциях.

ДИФРАКЦИЯ НА БОЛЬШОМ ЭКРАНЕ, ОБЛАДАЮЩЕМ ДВУМЯ ОСЯМИ СИММЕТРИИ

Предположим теперь, что экран обладает симметрией относительно осей координат x и y . В этом случае можно свести интегрирование в формулах (14) и (15) к интегрированию по четверти области D_0 и D_1 . Действительно, представим неизвестную функцию в виде

$$j = j_{11} + j_{12} + j_{21} + j_{22}, \tag{32}$$

где

$$j_{11}(-x, y) = j_{11}(x, y), \quad j_{11}(x, -y) = j_{11}(x, y), \tag{33}$$

$$j_{12}(-x, y) = j_{12}(x, y), \quad j_{12}(x, -y) = -j_{12}(x, y), \tag{34}$$

$$j_{21}(-x, y) = -j_{21}(x, y), \quad j_{21}(x, -y) = j_{21}(x, -y), \tag{35}$$

$$j_{22}(-x, y) = -j_{22}(x, y), \quad j_{22}(x, -y) = -j_{22}(x, -y), \tag{36}$$

В результате вместо одного интегрального уравнения (14) получим четыре уравнения

$$\int_{\tilde{D}_1} j_{pq}(x', y') K_{pq}(x, y, x', y') dx' dy' = \tag{37}$$

$$= f_{pq}(x, y) + f_{pq}^{\text{фо}}(x, y), \quad (x, y) \in \tilde{D}_1,$$

где $p, q = 1, 2$, а \tilde{D}_0 и \tilde{D}_1 – части областей D_0 и D_1 , лежащие в первом квадранте. В формуле (37) обозначено

$$K_{11}(x, y, x', y') = K(x, y, x', y') + \tag{38}$$

$$+ K(x, y, x', -y') + K(x, y, -x', y') + K(x, y, -x', -y'),$$

$$K_{12}(x, y, x', y') = K(x, y, x', y') - \tag{39}$$

$$- K(x, y, x', -y') + K(x, y, -x', y') - K(x, y, -x', -y'),$$

$$K_{21}(x, y, x', y') = K(x, y, x', y') + \tag{40}$$

$$+ K(x, y, x', -y') - K(x, y, -x', y') - K(x, y, -x', -y'),$$

$$K_{22}(x, y, x', y') = K(x, y, x', y') - \tag{41}$$

$$- K(x, y, x', -y') - K(x, y, -x', y') + K(x, y, -x', -y'),$$

$$f_{pq}(x, y) = A j_{pq}^0(x, y), \tag{42}$$

$$f_{pq}^{\text{фо}}(x, y) = B \int_{\tilde{D}_0} j_{pq}^0(x', y') K_{pq}(x, y, x', y') dx' dy', \tag{43}$$

$$p, q = 1, 2.$$

В формулах (42) и (43)

$$j_{11}^0(x, y) = \cos(\xi_0 x) \cos(\eta_0 y), \tag{44}$$

$$j_{12}^0(x, y) = -i \cos(\xi_0 x) \sin(\eta_0 y),$$

$$j_{21}^0(x, y) = -i \sin(\xi_0 x) \cos(\eta_0 y), \tag{45}$$

$$j_{22}^0(x, y) = -\sin(\xi_0 x) \sin(\eta_0 y),$$

где $\xi_0 = k \sin \theta_0 \cos \varphi_0$, $\eta_0 = k \sin \theta_0 \sin \varphi_0$.

Предположим, что граница S области D экрана является координатной линией в некоторой системе координат (ρ_1, φ_1) , причем $\rho_1 \in [0, 1]$ и $\varphi_1 \in [0, \pi/2]$ если $(\rho_1, \varphi_1) \in \tilde{D}$. В частности, если уравнение контура S в полярных координатах

имеет вид $\rho = \rho_0(\varphi)$, то можно, например, положить [8] (см. также ниже)

$$\rho_1 = \frac{\rho}{\rho_0(\varphi)}, \quad \varphi_1 = \varphi. \tag{46}$$

В результате интегральные уравнения (37) примут вид

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\kappa} j_{pq}(\rho_1^j, \varphi_1^j) K_{pq}(\rho_1, \varphi_1, \rho_1^j, \varphi_1^j) |J| d\rho_1^j d\varphi_1^j = \tag{47}$$

$$= f_{pq}(\rho_1, \varphi_1) + f_{pq}^{\text{фо}}(\rho_1, \varphi_1),$$

где величина

$$f_{pq}^{\text{фо}}(\rho_1, \varphi_1) = \tag{48}$$

$$= B \int_0^{\pi/2} \int_0^{\kappa} j_{pq}^0(\rho_1^j, \varphi_1^j) K_{pq}(\rho_1, \varphi_1, \rho_1^j, \varphi_1^j) |J| d\rho_1^j d\varphi_1^j,$$

$$p, q = 1, 2.$$

В формулах (47) и (48) J – якобиан, $0 < \kappa < 1$. Таким образом, в (47) интегрирование осуществляется по прямоугольной области.

Для решения уравнений (47) можно вновь использовать метод коллокации. Для этого мы разбиваем прямоугольник $[0, \pi/2] \times [\kappa, 1]$ на малые прямоугольные области G_n ($n = 1, 2, \dots, N$) и заменяем неизвестные функции $j_{pq}(\rho_1, \varphi_1)$ их разложениями по кусочно-постоянным функциям, которые имеют вид

$$\chi_n(\rho_1, \varphi_1) = \begin{cases} 1, & (\rho_1, \varphi_1) \in G_n, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{49}$$

Далее приравниваем левую и правую части полученных равенств в точках коллокации, которые выбираем в серединах указанных выше малых прямоугольников. В результате получим СЛАУ вида

$$\sum_{n=1}^N A_{jn}^{pq} c_n^{pq} = b_j^{pq}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad p, q = 1, 2, \tag{50}$$

в которых

$$A_{jn}^{pq} = \int_{D_n} K_{pq}(\rho_1^j, \varphi_1^j, \rho_1^j, \varphi_1^j) |J| d\rho_1^j d\varphi_1^j, \tag{51}$$

$$b_j^{pq} = f_{pq}(\rho_1^j, \varphi_1^j) + f_{pq}^{\text{фо}}(\rho_1^j, \varphi_1^j).$$

В СЛАУ (50) через c_n^{pq} обозначены амплитуды базисных функций в разложении для неизвестных функций $j_{pq}(\rho_1, \varphi_1)$. В формуле (51) (ρ_1^j, φ_1^j) – координаты точек коллокации. Заметим, что разбиение области интегрирования на частичные области можно осуществлять неравномерно, например, так, как рассмотрено выше.

Сделаем замечание относительно вычисления матричных элементов СЛАУ (50). Как следует из определения ядер интегральных уравнений (37) или (47), данные функции изменяются очень рез-

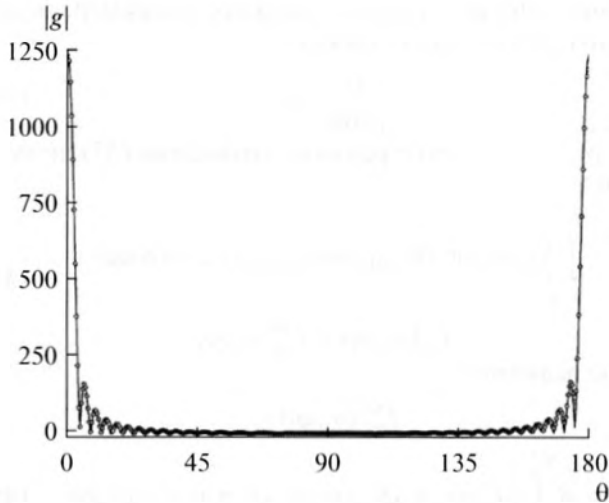


Рис. 1. Диаграмма рассеяния круглого диска радиуса $ka = 50$ и сфероида с размерами $ka = 50, kc = 0.5$. Нормальное падение волны.

ко в том случае, если точка интегрирования и точка коллокации близки друг к другу. Особенно это проявляется в случае условия Неймана на поверхности экрана. В результате затрачивается большое время на вычисление двойных интегралов в формуле (51). С целью ускорения вычислений интегралы по частичным областям G_n можно вычислять двумя способами. В случае, если расстояние

$R_{jn} = \sqrt{(x_j - x_n)^2 + (y_j - y_n)^2}$ между центрами соответствующих прямоугольников мало (т.е. меньше заданной величины), необходимо вычислять интегралы в (51) более точно, например, используя адаптивные алгоритмы. Если же указанное расстояние достаточно велико, то можно вычислять матричные элементы по формуле, аналогичной формуле прямоугольников для вычисления одномерных интегралов.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Были проведены расчеты для трех геометрий экрана: квадратного, эллиптического и кругового. В случае квадратного экрана использовалась прямоугольная сетка в декартовых координатах (в методе коллокации) для разбиения области \tilde{D}_1 . В случае эллиптического (и, в частности, кругового) экрана использовались обобщенные полярные координаты:

$$x = a\rho \cos \varphi, \quad y = b\rho \sin \varphi, \quad (52)$$

где a и b — полуоси эллиптического экрана. При этом область D_0 , в которой неизвестные функции $j_{pq}(\rho, \varphi)$ вычисляются в приближении физической оптики, была ограничена эллипсом $\rho = \kappa, 0 < \kappa < 1$, подобным границе экрана S . Для разбиения области D_1 (точнее, \tilde{D}_1) на малые подобласти G_n мы раз-

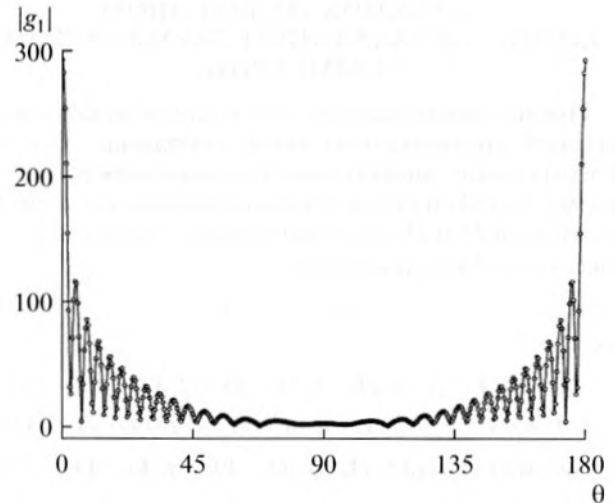


Рис. 2. Диаграмма рассеяния краевого тока. Дифракция на круглом диске радиуса $ka = 50$. Нормальное падение волны.

бивали отрезок $[0, \pi/2]$ равномерно точками деления $\varphi_l = \frac{\pi}{2L}(l - 1/2), l = 1, 2, \dots, L$, а затем разбивали каждый отрезок $\rho \in [\kappa, 1]$, $\varphi = \varphi_l$ точками $\rho_{lt} = \kappa + \frac{(1 - \kappa)}{N_l}(t - 1/2), t = 1, 2, \dots, N_l$. При этом число точек разбиения N_l выбиралось равным целому числу, ближайшему к величине $\frac{d_l}{\lambda} N_\lambda$, где d_l — длина указанного l -го отрезка, λ — длина волны, а параметр N_λ — число точек разбиения на длину волны. Заметим, что, как показывают расчеты, в случае кругового экрана (тонкого диска) целесообразно использовать общий подход, т.е. сводить задачу к двумерному интегральному уравнению в полярных координатах, а не использовать круговую симметрию, так как при использовании круговой симметрии также приходится вычислять двойные интегралы. Поэтому в дальнейшем при рассмотрении задачи дифракции на круглом диске использовался общий метод (см. пояснения к рис. 2). Отметим также, что во всех приведенных ниже расчетах мы выбирали параметр $N_\lambda = 15$ и величину $k\delta = 0.001$ [6].

Для проверки корректности разработанного метода мы сравнили зависимости диаграммы рассеяния $g(\theta, \varphi)$ (здесь (θ, φ) — сферические координаты) тонкого диска радиуса $ka = 50$ и сильно сплюснутого сфероида с размерами полуосей $ka = 50$ и $kc = 0.5$, где c — полуось сфероида вдоль оси z . Для решения задачи дифракции плоской волны на сплюснутом сфероиде использовался вариант модифицированного метода дискретных источников, предложенный в работах [9, 10]. На рис. 1 показаны угловые зависимости модуля диаграм-

Таблица 1. Проверка выполнения оптической теоремы

	Квадратный экран		Круглый экран	
	$\theta_0 = 0, \varphi_0 = 0$	$\theta_0 = 45^\circ, \varphi_0 = 0$	$\theta_0 = 0, \varphi_0 = 0$	$\theta_0 = 45^\circ, \varphi_0 = 0$
Условие Дирихле	6.37×10^{-4}	7.25×10^{-4}	1.14×10^{-3}	5.86×10^{-4}
Условие Неймана	8.29×10^{-3}	1.21×10^{-3}	8.84×10^{-3}	3.13×10^{-3}

мы рассеяния для тонкого диска (сплошная кривая) и сфероида (кружки) указанных выше размеров. Рассматривалось осевое падение плоской волны и условие Дирихле на поверхности рассеивателей. В случае использования гибридного подхода радиус круговой области D_0 составлял $a_1 = a - \lambda$. Угол наблюдения $\varphi = 0$. Таким образом, линейный размер $2a_1$ области D_0 меньше размера экрана на две длины волны, т.е. носитель неизвестных неравномерных токов достаточно мал. Как видно из рис. 1, обе зависимости практически совпадают. Имеется лишь небольшое отличие диаграмм в теневой области. При этом диаграмма тонкого диска симметрична относительно угла $\theta = 90^\circ$, а диаграмма сфероида имеет небольшую асимметрию в силу конечной толщины сфероида.

В качестве еще одной проверки предлагаемого алгоритма мы построили угловую зависимость модуля величины $g_1(\theta, \varphi)$, где $g_1(\theta, \varphi) = g(\theta, \varphi) - g_{\varphi_0}(\theta, \varphi)$, причем $g_{\varphi_0}(\theta, \varphi)$ – диаграмма рассеяния, обусловленная током j_{φ_0} , получаемым в приближении физической оптики. Рассматривалось рассеяние нормально падающей плоской волны на акустически мягком тонком круговом диске радиуса $ka = 50$. При этом диаграмма $g(\theta, \varphi)$ получена двумя методами: при помощи гибридного подхода без учета круговой симметрии и при помощи МПГУ,

использующего круговую симметрию задачи. В последнем случае алгоритм решения краевой задачи описан выше в разделе “Дифракция на большом круговом диске”. Остальные параметры задачи были следующие: $a_1 = a - \lambda$, угол наблюдения $\varphi = 0$. Указанные зависимости диаграммы построены на рис. 2. Сплошной кривой на рисунке показана зависимость, полученная при помощи решения двумерного интегрального уравнения, а кружками изображена зависимость, полученная при помощи МПГУ, учитывающего круговую симметрию. Как видно, обе кривые совпадают с графической точностью. Отметим, что применение МПГУ, учитывающего круговую симметрию задачи, для случая наклонного падения плоской волны сопряжено с достаточно большими трудностями, возникающими при вычислении интегралов (24) (приходится вычислять эти интегралы для больших значений m).

Для контроля точности результатов, получаемых при помощи гибридного метода, мы проверили выполнение оптической теоремы, которая в рассматриваемом случае имеет вид [4]

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |g(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi = -\text{Im } g(\theta_0, \varphi_0). \quad (53)$$

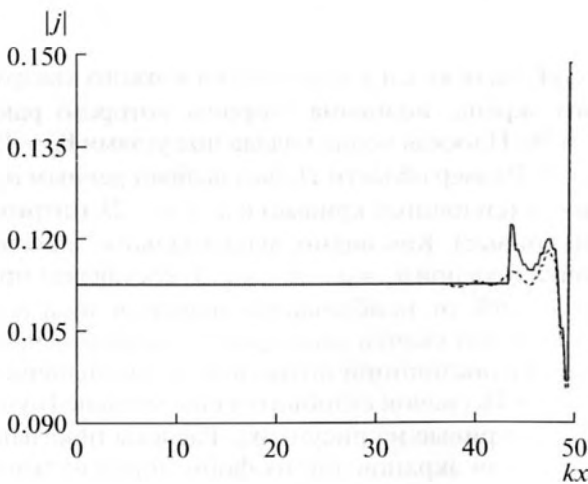


Рис. 3. Распределение модуля тока на оси x квадратного экрана размера $ka = 50$.

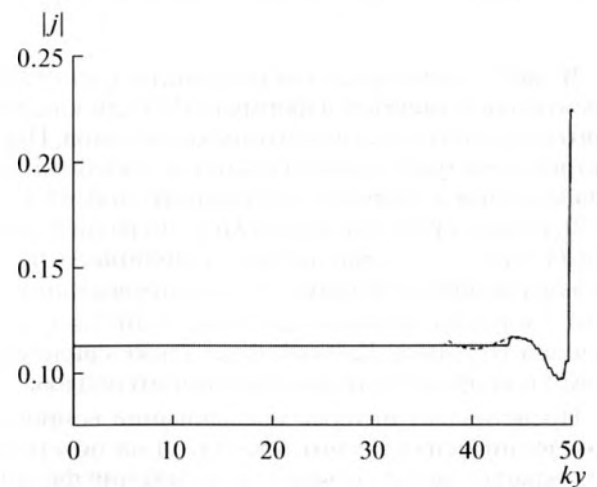


Рис. 4. Распределение модуля тока на оси y квадратного экрана размера $ka = 50$.

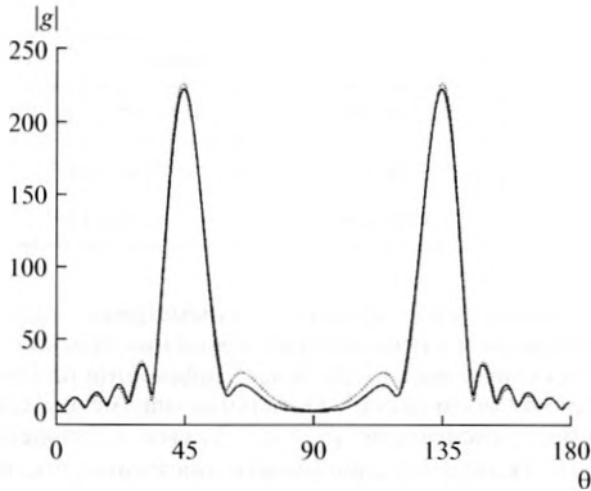


Рис. 5. Диаграмма рассеяния круглого диска радиуса $ka = 25$ для разных размеров области D_0 .

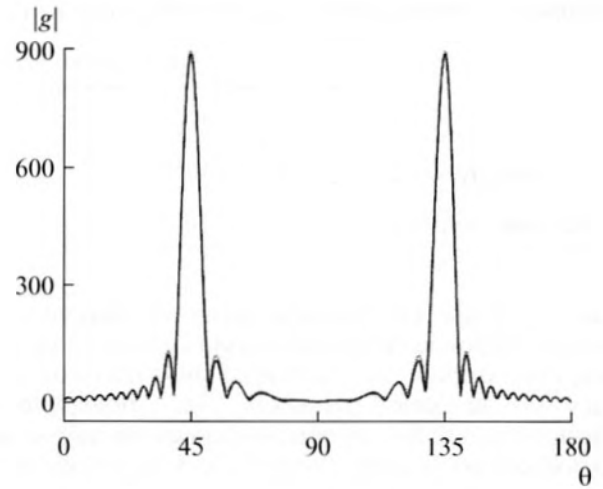


Рис. 6. Диаграмма рассеяния круглого диска радиуса $ka = 50$ для разных размеров области D_0 .

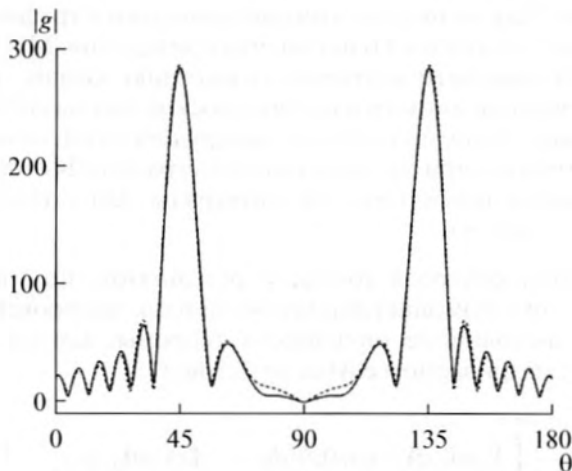


Рис. 7. Диаграмма рассеяния квадратного экрана с размером $ka = 25$ для разных размеров области D_0 .

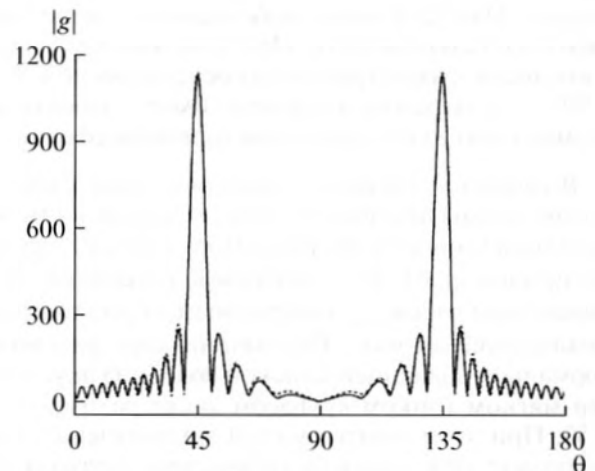


Рис. 8. Диаграмма рассеяния квадратного экрана с размером $ka = 50$ для разных размеров области D_0 .

В табл. 1 представлены результаты расчета относительной ошибки в формуле (53) для квадратного и круглого (т.е. тонкого диска) экранов. Параметры геометрии экранов были следующими: половина длины стороны квадратного экрана $ka = 50$, радиус круглого экрана $ka = 50$, размер области $D_0 - a_1 = a - \lambda$. Как видно из таблицы, относительная ошибка в формуле (53) не превосходит 2×10^{-3} в случае условия Дирихле и 10^{-2} в случае условия Неймана. Данный факт также свидетельствует о корректности разработанного подхода.

Представляет интерес исследование вопроса о поведении неизвестного тока $j(x, y)$ на поверхности экрана в месте "стыка" приближения физической оптики и краевого тока, найденного из решения интегрального уравнения. На рис. 3 и 4 показано распределение модуля тока, т.е. функции

$|j(x, y)|$, на осях x и y акустически мягкого квадратного экрана, половина стороны которого равна $ka = 50$. Плоская волна падала под углами $\theta_0 = 45^\circ$, $\varphi_0 = 0$. Размер области D_0 был выбран равным $a_1 = a - \lambda$ (сплошные кривые) и $a_1 = a - 2\lambda$ (штриховые кривые). Как видно, максимальное значение скачка тока при $a_1 = a - \lambda$ (рис. 3) составляет примерно 10% от наибольшего значения тока и не превосходит скачка тока при его аппроксимации кусочно-постоянной функцией. С уменьшением области D_0 скачок становится еще меньше (пунктирные кривые на рисунках). Расчеты показывают, что для экранов других форм порядок скачка тока такой же. Таким образом, данный скачок не может оказать большего влияния на ошибку вычисления диаграммы рассеяния, чем приближение

неравномерной части тока с помощью кусочно-постоянной функции.

Рассмотрим далее результаты расчета диаграммы рассеяния для экранов различной формы. Представляет интерес проверить насколько сильно будут меняться результаты для различных размеров области D_0 . На рис. 5–8 представлены графики угловой зависимости модуля диаграммы рассеяния для экранов круговой (рис. 5, 6) и квадратной (рис. 7, 8) формы. Рассматривалось рассеяние на абсолютно жестком экране, так как в этом случае точность вычислений ниже, чем в случае абсолютно мягкого экрана (см. табл. 1). Размер квадратного экрана $ka = 25$ для рис. 7 и $ka = 50$ для рис. 8, а круговой экран вписан в квадратный, т.е. его радиус $ka = 25$ (рис. 5), либо $ka = 50$ (рис. 6). Плоская волна падала под углами $\theta_0 = 45^\circ$, $\varphi_0 = 0$. Угол наблюдения $\varphi = 0$. Сплошные кривые на рисунках соответствуют размеру области D_0 , равному $a_1 = a - \lambda$, а штриховые – $a_1 = a - 2\lambda$. Видно, во-первых, что наибольшее отличие диаграмм при разных размерах области D_0 наблюдается для углов θ , близких к $\theta = 90^\circ$, т.е. в плоскости экрана. Во-вторых, с увеличением размера экрана графики диаграммы меняются незначительно при изменении размера области D_0 , т.е. гибридный подход позволяет получать приемлемые по точности результаты в случае больших размеров экрана.

На рис. 9 изображены зависимости модуля диаграммы рассеяния для абсолютно жесткого эллиптического экрана с длинами полуосей $ka = 50$ и $kb = 25$. Плоская волна падала под углами $\theta_0 = 45^\circ$, $\varphi_0 = 0$. Угол наблюдения $\varphi = 0$. Сплошные кривые на рисунках соответствуют размерам области D_0 , равным $a_1 = a - \lambda$, $b_1 = b - \lambda$, а штриховые – $a_1 = a - 2\lambda$, $b_1 = b - 2\lambda$. Как видно, обе зависимости также отличаются незначительно. Таким образом, при использовании гибридного метода в случае, если волновые размеры экрана не меньше 50, размеры области D_0 можно выбирать так, чтобы они отличались примерно на две длины волны от размеров области экрана.

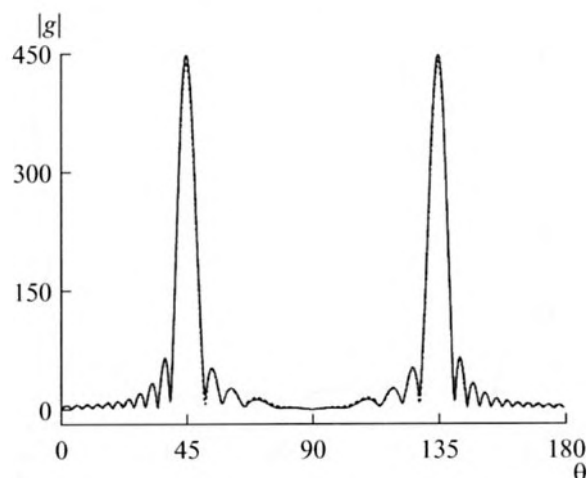


Рис. 9. Диаграмма рассеяния эллиптического экрана с размерами $ka = 50$, $kb = 25$ для разных размеров области D_0 .

В табл. 2 представлены результаты расчета интегрального поперечника рассеяния для идеально отражающего квадратного экрана с волновым размером $2ka$, а также для так называемого “черного” рассеивателя той же формы. Для “черных” экранов диаграмма рассеяния рассчитывается с использованием модели Макдональда [11] по формуле

$$g_M(\theta, \varphi) = \frac{1}{2}(g_0(\theta, \varphi) + g_\infty(\theta, \varphi)), \quad (54)$$

где $g_0(\theta, \varphi)$ – диаграмма рассеяния абсолютно мягкого экрана, $g_\infty(\theta, \varphi)$ – диаграмма абсолютно жесткого экрана с теми же размерами и при том же направлении падения волны. Для “черных” рассеивателей имеет место теорема Уфимцева [12], согласно которой интегральный поперечник рассеяния “черного” тела ровно в два раза меньше интегрального поперечника рассеяния идеально отражающего (в нашем случае абсолютно мягкого) тела, имеющего тот же теневой контур (т.е. границу между освещенной и теневой частями поверхности рассеивателя). Это утверждение выполнено для всех выпуклых тел, линейные размеры и мини-

Таблица 2. Проверка теоремы Уфимцева для квадратного экрана

ka	$\theta_0 = 0, \varphi_0 = 0$			$\theta_0 = 45^\circ, \varphi_0 = 0$		
	идеальный экран	модель Макдональда	отношение поперечн. расс.	идеальный экран	модель Макдональда	отношение поперечн. расс.
5	194.5897	103.852	1.873721	135.8229	69.22371	1.962086
10	792.2401	395.0096	2.005623	561.0739	282.4358	1.986553
15	1791.690	906.8452	1.97574	1263.888	634.043	1.99338

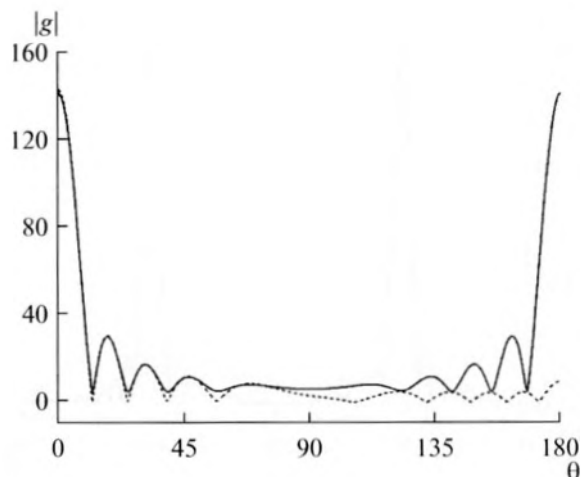


Рис. 10. Сравнение диаграмм рассеяния для идеального и "черного" квадратных экранов. Нормальное падение волны.

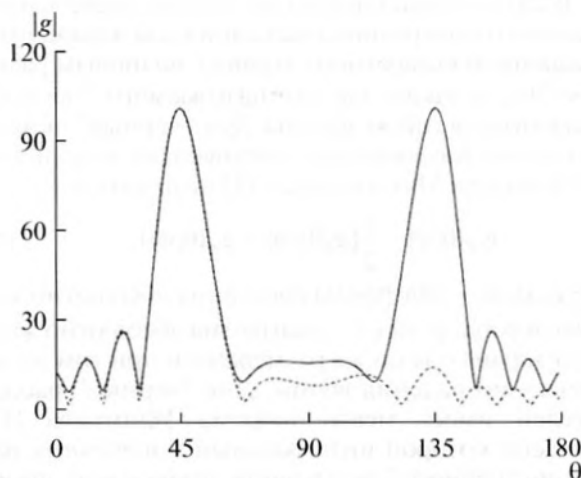


Рис. 11. Сравнение диаграмм рассеяния для идеального и "черного" квадратных экранов. Наклонное падение волны.

мальный радиус кривизны которых много больше длины волны. Как видно из таблицы, в рассматриваемом случае теорема Уфимцева выполняется с точностью 6% уже для линейного волнового размера экрана, равного $2ka = 10$. С увеличением размера экрана ошибка становится еще меньше. Таким образом, при достаточно большом размере экрана краевые эффекты, связанные с наличием кромки экрана, не сказываются существенным образом на выполнении теоремы Уфимцева. Заметим, что при расчетах интегрального поперечника рассеяния квадратного экрана рассмотренных выше размеров мы не использовали гибридный подход, а решали интегральные уравнения (37), в которых $\bar{D}_1 = \bar{D}$, где \bar{D} — четвертая часть экрана, лежащая в первом квадранте.

На рис. 10 и 11 представлены угловые зависимости модуля диаграммы рассеяния идеально отражающего (сплошные кривые на рисунках) и абсолютно "черного" (штриховые кривые) квадратных экранов размера $2ka = 30$. Рисунок 10 относится к случаю нормального падения плоской волны, а рис. 11 — к случаю $\theta_0 = 45^\circ$, $\varphi_0 = 0$. Угол наблюдения $\varphi = 0$. Из рисунков видно, что уровень обратного рассеяния у "черного" экрана примерно в пятнадцать (при нормальном падении), либо в семь раз (при наклонном падении) меньше уровня рассеяния в направлении падения плоской волны. При этом уровень рассеяния в направлении падения плоской волны одинаков у идеального и "черного" экранов для обоих углов падения. Такое поведение диаграммы рассеяния хорошо согласуется с интуитивными представлениями о черном теле.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 12-02-00062, 14-02-00976).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Урусовский И.А. Дифракция звука на экране с веерной насадкой // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 1. С. 86–95.
2. Андронов И.В. Расчет дифракции на сильно вытянутых телах вращения // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 1. С. 28–35.
3. Шанин А.В., Валяев В.Ю. Модифицированное преобразование Конторовича–Лебедева и его применение к решению канонических конических задач дифракции // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 6. С. 755–762.
4. Шендеров Е.Л. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989.
5. Уфимцев П.Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. М.: Сов. радио, 1962.
6. Кюркчан А.Г., Смирнова Н.И. Математическое моделирование в теории дифракции с использованием априорной информации об аналитических свойствах решения. М.: Медиа Паблишер, 2014.
7. Алероева Х.Т., Кюркчан А.Г., Маненков С.А. Использование априорной информации при анализе дифракции волн на тонких экранах // Т-Comm. 2012. № 11. С. 3–6.
8. Ильинский А.С., Слепян Г.Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М.: МГУ, 1983.
9. Kyurkchan A.G., Manenkov S.A. Application of different orthogonal coordinates using modified method of discrete sources for solving a problem of wave diffraction on a body of revolution // J. Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer. 2012. V. 113. P. 2368–2378.
10. Кюркчан А.Г., Маненков С.А. Применение различных ортогональных систем координат для моделирования рассеяния волн группой тел // Радиотехника и электроника. 2012. Т. 57. № 9. С. 987–995.
11. Захарьев Л.Н., Леманский А.А. Рассеяние волн "черными" телами. М.: Сов. радио, 1972.
12. Уфимцев П.Я. Три лекции по физической теории дифракции. Л.: ЛГУ, 1972.