

## КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.833.5;539.3

### ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСПЕРСИОННЫХ СВОЙСТВ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ СВОЙСТВАМИ

© 2015 г. А. О. Ватульян, А. В. Моргунова

*Южный федеральный университет*

*344006 Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая 105*

*Донской государственный технический университет*

*344000 Ростов-на-Дону, пл. Гагарина 1*

*E-mail: vatulyan@math.rsu.ru, annmorgan2077@gmail.com*

Поступила в редакцию 17.09.2014 г.

Представлен способ анализа дисперсионных соотношений для полого неоднородного цилиндрического волновода с произвольным законом изменения модулей Ламе (разрывным или непрерывным). Сформулирована краевая задача, содержащая два спектральных параметра. Произведен асимптотический анализ длинноволнового приближения, изучена структура дисперсионного множества, приведены результаты расчетов дисперсионных множеств для различных законов изменения модулей Ламе.

*Ключевые слова:* неоднородный цилиндр, дисперсионные кривые, упругие волны.

**DOI:** 10.7868/S0320791915020148

Изучение колебаний в протяженных упругих структурах – волноводах – представляет собой актуальную задачу механики и акустики, имеющую многочисленные приложения при анализе динамического поведения различных протяженных структур, в частности, в сейсмологии при анализе законов распространения волн, при проектировании и мониторинге трубопроводов, в биомеханике при моделировании волновых процессов в крупных сосудах. Отметим, что волновые процессы достаточно давно изучены в однородных плоских и цилиндрических волноводах [1, 2], численные расчеты для некоторых видов материалов проведены в работе [3], волны кругового типа в полых цилиндрах изучены в [4]. Вместе с тем для моделирования многих объектов необходимо учитывать зависимость упругих характеристик (параметров Ламе) от координат, что приводит к исследованию краевых задач для дифференциальных операторов с переменными коэффициентами и существенно усложняет исследование задачи.

Важным аспектом задачи является изучение дисперсионного множества, позволяющего анализировать структуру волнового поля на поверхности и внутри цилиндра в зависимости от параметров волновода и законов неоднородности. Если для однородного цилиндра при такой структуре легко строится решение и дисперсионное уравнение, выражающееся через функции Бесселя [1, 2], то для цилиндра с переменными свойствами возможно лишь численное исследование задачи, однако не-

которые закономерности строения дисперсионных множеств и характеристики упругих волн могут быть исследованы аналитически.

Полное исследование действительных, мнимых и комплексных корней соответствующих трансцендентных уравнений, характеризующих дисперсионные соотношения для однородных цилиндров, проведено в конце XX века. Закономерности распространения волн в изотропном цилиндре достаточно подробно изложены в работах [5, 6]. В последние годы возрос интерес к различным обобщениям таких задач для цилиндрического волновода при наличии анизотропии различного вида [7] либо неоднородности в виде слоистости или функционально-градиентной структуры [8–15]. Задача о рассеянии плоской звуковой волны твердым цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием рассмотрена в работе [7]. На основе сочетания численных и полуаналитических методов исследованы особенности формирования волновых полей в скважинах с радиально-неоднородной зоной нарушения [8, 9]. В работах [10–15] анализируются подобные проблемы для слоистых и функционально-градиентных цилиндров при наличии радиальной неоднородности полиномиального вида.

Стандартная схема анализа такой проблемы в осесимметричном случае приводит к исследованию системы двух дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, зависящими как через изменения параметров

Ламе, так и их производных. Данный подход не позволяет анализировать разрывные законы, в частности дисперсионные свойства слоистых структур, особенно при большом количестве слоев. В настоящей работе представлен способ анализа дисперсионных соотношений для неоднородного цилиндрического волновода с произвольным законом изменения модулей Ламе (разрывным или непрерывным), состоящий в нахождении нетривиальных решений уравнений движения, сформулированных относительно компонент вектора  $Y = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$  смещений  $Y_1 = U_r$ ,  $Y_2 = iU_z$  радиального и касательного напряжений  $Y_3 = \sigma_r$ ,  $Y_4 = i\sigma_\tau$  в цилиндрической системе координат.

Вводя обозначения параметров:  $\gamma = kb$  (безразмерное волновое число),  $\kappa^2 = \frac{\rho\omega^2 b^2}{\mu_0}$  (безразмерная частота колебаний) и функций:

$$f(\xi) = \mu_0^{-1} \lambda(b\xi), g(\xi) = \mu_0^{-1} \mu(b\xi), \quad (1)$$

$$\mu_0 = \max \mu(r), \quad \xi = \frac{r}{b}, \quad \xi \in [\xi_0; 1], \quad \xi_0 = a/b,$$

где  $\lambda = \lambda(r)$ ,  $\mu = \mu(r)$  — известные положительные функции (параметры Ламе), зависящие от координаты  $r$ , сформулируем однородную краевую задачу для оператора с двумя спектральными параметрами  $\gamma$ ,  $\kappa$ .

Представим рассматриваемую задачу для цилиндра в виде операторного пучка

$$Y' = (A_{00} - \kappa^2 A_{01} + \gamma A_1 + \gamma^2 A_2) Y,$$

где

$$a_1 = -\frac{f(\xi)}{2g(\xi) + f(\xi)}, \quad a_2 = \frac{1}{2g(\xi) + f(\xi)},$$

$$a_3 = \frac{2g(\xi)f(\xi)}{2g(\xi) + f(\xi)}, \quad a_4 = \frac{4g(\xi)(g(\xi) + f(\xi))}{2g(\xi) + f(\xi)},$$

$$a_5 = -\frac{2g(\xi)}{2g(\xi) + f(\xi)}, \quad a_6 = \frac{1}{g(\xi)},$$

$$A_{00} = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\xi} & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_6 \\ \frac{a_4}{\xi^2} & 0 & \frac{a_5}{\xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\xi} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_3}{\xi} & 0 & -1 \\ \frac{a_3}{\xi} & 0 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

или в координатном виде

$$Y_1' = a_1 \left( \frac{Y_1}{\xi} + \gamma Y_2 \right) + a_2 Y_3, \quad Y_2' = \gamma Y_1 + a_6 Y_4,$$

$$Y_3' = \left( \frac{1}{\xi^2} a_4 - \kappa^2 \right) Y_1 + \left( \frac{\gamma}{\xi} a_3 \right) Y_2 + a_5 \frac{Y_3}{\xi} - \gamma Y_4, \quad (2)$$

$$Y_4' = \left( \frac{\gamma}{\xi} a_3 \right) Y_1 + (\gamma^2 a_4 - \kappa^2) Y_2 - \gamma a_1 Y_3 - \frac{Y_4}{\xi},$$

со следующими однородными краевыми условиями:

$$Y_3(1) = Y_4(1) = Y_3(\xi_0) = Y_4(\xi_0) = 0. \quad (3)$$

Краевая задача (2), (3) всегда имеет тривиальное решение. Соотношения между спектральными параметрами, при которых существует нетривиальное решение, и составляют дисперсионное множество рассматриваемой задачи. Отметим, что соответствующая краевая задача в общем случае при произвольных законах неоднородности, задаваемых положительными функциями  $f(\xi)$ ,  $g(\xi)$ , может быть изучена лишь численно. Изучим некоторые особенности строения дисперсионного множества для произвольных законов.

Важное значение для изучения структуры дисперсионного множества имеет анализ задачи при  $\gamma = 0$  и определение критических значений, из которых выходят ветви дисперсионных кривых, согласно общим свойствам [16, 17]. При этом общая задача (2), (3) распадается на две более простые задачи.

Задача 1 формулируется относительно  $Y_1$  и  $Y_3$  (радиальные смещения и радиальные напряжения) и имеет вид

$$Y_1' = a_1 \frac{Y_1}{\xi} + a_2 Y_3, \quad Y_3' = \left( \frac{1}{\xi^2} a_4 - \kappa^2 \right) Y_1 - a_3 \frac{Y_3}{\xi}, \quad (4)$$

$$Y_3(\xi_0) = Y_3(1) = 0.$$

Набор значений спектрального параметра  $\kappa$ , для которого существуют нетривиальные решения (4), характеризует критические частоты первого семейства или радиальные резонансы, которые представляют счетное множество, сгущающееся на бесконечности. Из этих точек аналитически продолжаются кривые первого семейства дисперсионного множества  $\gamma_j^1$  ( $j = 1, 2, \dots$ ).

Задача 2 формулируется относительно  $Y_2$  и  $Y_4$  (продольные смещения и касательные напряжения) и имеет вид

$$Y_2' = a_6 Y_4, \quad Y_4' = -\kappa^2 Y_2 - \frac{Y_4}{\xi}, \quad (5)$$

$$Y_4(\xi_0) = Y_4(1) = 0.$$

Набор значений спектрального параметра  $\kappa$ , для которого существуют нетривиальные решения задачи (5), характеризует критические частоты

второго семейства или продольно-сдвиговые резонансы. Из этих точек аналитически продолжаются кривые второго семейства дисперсионного множества  $\gamma_j^1$  ( $j = 1, 2, \dots$ ). Нетрудно видеть, что эта краевая задача, независимо от закона изменения функции  $g(\xi)$ , имеет следующее нетривиальное решение:  $Y_2 = 1, Y_4 = 0$ .

Это обстоятельство позволяет искать некоторое простое решение в окрестности точки ( $\gamma = \kappa = 0$ ) в виде линейной зависимости, которое характеризует некоторую стержневую скорость. В области малых  $\gamma$ ,  $\kappa$  будем строить решение задачи (2), (3) в виде разложения по малому параметру, полагая  $\kappa = \gamma(1 + O(\gamma))$  и  $Y_j = Y_{j0} + \gamma Y_{j1} + \gamma^2 Y_{j2} + o(\gamma^2)$ . В соответствии с общей схемой регулярных разложений [16] сформулируем ряд вспомогательных задач при одинаковых степенях параметра  $\gamma$ .

При  $\gamma^0$  краевая задача имеет вид

$$Y_0' = A_{00} Y_0$$

или в компонентах

$$Y_{10}' = a_1 \frac{Y_{10}}{\xi} + a_2 Y_{30}, \quad Y_{20}' = a_6 Y_{40},$$

$$Y_{30}' = \left(\frac{1}{\xi^2} a_4\right) Y_{10} + a_5 \frac{Y_{30}}{\xi}, \quad Y_{40}' = -\frac{Y_{40}}{\xi}, \quad (6)$$

$$Y_{30}(1) = Y_{40}(1) = 0 \quad Y_{30}(\xi_0) = Y_{40}(\xi_0) = 0.$$

Нетривиальное решение (6) дается следующим вектором:

$$Y_0 = (0 \ 1 \ 0 \ 0).$$

Краевая задача при  $\gamma^1$  имеет следующий вид:

$$Y_1' = A_{00} Y_1 + A_1 Y_0,$$

или в компонентах

$$Y_{11}' = a_1 \left(\frac{Y_{11}}{\xi} + Y_{20}\right) + a_2 Y_{31}, \quad Y_{21}' = Y_{10} + a_6 Y_{41},$$

$$Y_{31}' = \left(\frac{1}{\xi^2} a_4\right) Y_{11} + \left(\frac{1}{\xi} a_3\right) Y_{20} + a_5 \frac{Y_{31}}{\xi} - Y_{40}, \quad (7)$$

$$Y_{41}' = \left(\frac{1}{\xi} a_3\right) Y_{10} - a_1 Y_{30} - \frac{Y_{41}}{\xi},$$

$$Y_{31}(1) = Y_{41}(1) = Y_{31}(\xi_0) = Y_{41}(\xi_0) = 0.$$

Часть компонент вектора решений в (7) определяется в явном виде:  $Y_{21} = 1, Y_{41} = 0$ , а решение для остальных компонент находится из краевой задачи

$$Y_{11}' = a_1 \left(\frac{Y_{11}}{\xi} + Y_{20}\right) + a_2 Y_{31},$$

$$Y_{31}' = \frac{1}{\xi^2} a_4 Y_{11} + \frac{1}{\xi} a_3 Y_{20} + a_5 \frac{Y_{31}}{\xi} - Y_{40}, \quad (8)$$

$$Y_{31}(1) = Y_{31}(\xi_0) = 0,$$

которая решается численно. Отметим, что в важном частном случае неоднородности, когда  $\frac{f(\xi)}{2g(\xi) + f(\xi)} = \text{const}$ , что соответствует постоянно-му коэффициенту Пуассона, задача (8) имеет точное решение

$$Y_{31} = 0, \quad Y_{11} = -\frac{f(\xi)}{2g(\xi) + f(\xi)} \xi. \quad (9)$$

Краевая задача при  $\gamma^2$  имеет вид

$$Y_2' = A_{00} Y_2 + (-t_0^2 A_{01} + A_2) Y_0 + A_1 Y_1,$$

или в компонентах

$$Y_{12}' = a_1 \left(\frac{Y_{12}}{\xi} + Y_{21}\right) + a_2 Y_{32}, \quad Y_{22}' = Y_{11} + a_6 Y_{42},$$

$$Y_{32}' = \left(\frac{1}{\xi^2} a_4\right) Y_{12} - t^2 Y_{10} + \left(\frac{1}{\xi} a_3\right) Y_{21} + a_5 \frac{Y_{32}}{\xi} - Y_{41}, \quad (10)$$

$$Y_{42}' = \left(\frac{1}{\xi} a_3\right) Y_{11} - (a_4 - t^2) Y_{20} - a_1 Y_{31} - \frac{Y_{42}}{\xi},$$

$$Y_{32}(1) = Y_{42}(1) = Y_{32}(\xi_0) = Y_{42}(\xi_0) = 0.$$

В общем случае она также решается численно и служит для определения параметра  $t$ , который входит в систему

$$Y_{22} = Y_{11} + a_6 Y_{42},$$

$$Y_{42}' = \left(\frac{1}{\xi} a_3\right) Y_{11} + (a_4 - t^2) Y_{20} - a_1 Y_{31} - \frac{Y_{42}}{\xi}, \quad (11)$$

$$Y_{42}(1) = Y_{42}(\xi) = 0.$$

Считая  $Y_{11}$  и  $Y_{31}$  найденными на предыдущем этапе интегрирования задачи (8), из второго уравнения (11) путем интегрирования и несложных преобразований находим

$$t^2 = \frac{2}{1 - \xi_0^2} \int_{\xi_0}^1 \xi \left[ a_4 - a_1 Y_{31} + \frac{1}{\xi} a_3 Y_{11} \right] d\xi. \quad (12)$$

В частном случае (9), когда решение вспомогательных задач записывается в явном виде, параметр  $t$ , определяющий угол наклона первой дисперсионной кривой, также находится в явном виде

$$t^2 = \frac{2}{1 - \xi_0^2} \int_{\xi_0}^1 \frac{g(\xi)(2g(\xi) + 3f(\xi))}{g(\xi) + f(\xi)} \xi d\xi$$

и выражается через переменный модуль Юнга:

$$t^2 = \frac{2}{1 - \xi_0^2} \int_{\xi_0}^1 E(\xi) \xi d\xi, \quad (13)$$

что фактически характеризует стержневую моду для волновода с переменными упругими свойствами.

Анализ этого коэффициента на основе численного анализа (метода пристрелки [19]) и по формуле (13) был произведен для различных типов неод-

Сравнение численных и аналитических результатов

$$f(\xi) = 2 + 2\xi^2, g(\xi) = 1 + \xi^2$$

$\kappa$	$\gamma$	$t$ (численно)	$t$ (по (14))
0.01538	0.00682	2.25432	2.2538
0.07692	0.03413	2.25381	
0.13846	0.06144	2.25348	
0.18461	0.08193	2.25316	
0.21538	0.09560	2.25279	
0.44615	0.19835	2.24929	
0.75384	0.33655	2.23986	

$$f(\xi) = 1 + e^{-\xi}, g(\xi) = \frac{1}{2}(1 + e^{-\xi})$$

$\kappa$	$\gamma$	$t$ (численно)	$t$ (по (14))
0.01538	0.01131	1.35928	1.3596
0.13846	0.10188	1.35897	
0.27692	0.20410	1.35676	
0.399	0.29556	1.35333	
0.52307	0.38798	1.34817	
0.64615	0.48193	1.34074	
0.70769	0.52975	1.33587	
0.76923	0.57836	1.330	

нородностей и дал весьма близкие результаты (для двух видов неоднородностей результаты отражены в табл. 1). Можно сделать вывод, что формулой (13) с погрешностью менее 1% описывается линейный участок первой моды (длинноволновое приближение) при значениях параметра  $\kappa \leq 0.8$ .

Отметим еще одну особенность строения дисперсионных множеств для неоднородного цилиндра. Анализ задачи (4) позволил установить наличие некоторого простого решения. В частном случае  $\frac{a_1}{\xi^2} = \text{const}$ , например при  $f(\xi) = f_0\xi^2$ ,  $g(\xi) = g_0\xi^2$ , нетрудно найти решение

$$Y_3 = 0, \quad Y_1 = \frac{1}{\xi} \frac{f_0}{2g_0 + f_0}, \quad \kappa = 2 \sqrt{1 - \frac{g_0}{2g_0 + f_0}}. \quad (14)$$

В случае параболических законов неоднородности по формуле (14), положив  $f_0 = 2, g_0 = 1$ , находим значение  $\kappa = 1.73$ , результат же метода пристрелки дает  $\kappa = 1.74$ . Выражение (14) определяет точку, откуда выходит вторая дисперсионная кривая.

При отыскании нетривиального решения задачи (2), (3) в общем случае используются численные методы, в частности метод пристрелки [19]. Для каждого значения  $\kappa$ , задаваемого в цикле с некото-

рым шагом, задавался параметр  $\gamma$  и решались две задачи Коши для системы уравнений (2) со следующими граничными условиями:

– для первой задачи сформулируем условия

$$Y_1^{(1)}(\xi_0) = 1, \quad Y_2^{(1)}(\xi_0) = 0,$$

$$Y_3^{(1)}(\xi_0) = 0, \quad Y_4^{(1)}(\xi_0) = 0,$$

что дает вектор решений  $\mathbf{Y}^{(1)} = (Y_1^{(1)}, Y_2^{(1)}, Y_3^{(1)}, Y_4^{(1)})$ ;

– для второй задачи сформулируем условия

$$Y_1^{(2)}(\xi_0) = 1, \quad Y_2^{(2)}(\xi_0) = 0,$$

$$Y_3^{(2)}(\xi_0) = 0, \quad Y_4^{(2)}(\xi_0) = 0,$$

что дает вектор решений  $\mathbf{Y}^{(2)} = (Y_1^{(2)}, Y_2^{(2)}, Y_3^{(2)}, Y_4^{(2)})$ .

Образует линейную комбинацию этих векторов  $\alpha_1 \mathbf{Y}^{(1)} + \alpha_2 \mathbf{Y}^{(2)}$ , которая должна удовлетворить оставшимся граничным условиям  $Y_3(1) = Y_4(1) = 0$ . Таким образом, для определения параметров  $\alpha_1, \alpha_2$  получим линейную систему

$$\alpha_1 Y_3^{(1)} + \alpha_2 Y_3^{(2)} = 0, \quad \alpha_1 Y_4^{(1)} + \alpha_2 Y_4^{(2)} = 0.$$

Для определения точек дисперсионного множества находим такие соотношения между  $\gamma$  и  $\kappa$ , для которых система имеет нетривиальное решение (определитель равен нулю). Проведены численные расчеты по определению структуры дисперсионных множеств, определяемых различными законами изменений неоднородности, отображенных на рис. 1–4. На рис. 1 изображены компоненты дисперсионных множеств для монотонно растущих изменений  $f(\xi), g(\xi)$ , на рис. 2 – при немонотонных изменениях, а на рис. 3 – при тех же изменениях, что и на рис. 2, только для тонкостенного цилиндра. На рис. 4 представлены компоненты дисперсионных множеств для разрывных изменений – слоистый цилиндр.

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что общая структура дисперсионных кривых сохраняется для различных законов изменений неоднородности. Имеется счетное число ветвей, аналитически продолжающихся из точек, расположенных на оси  $\gamma = 0$ , все ветви, начиная со второй, подходят к этой оси под прямым углом, выявлено наличие областей аномальной дисперсии, аналогично однородному случаю [5, 6, 16]. В зависимости от структуры неоднородности изменяется число ветвей на рассматриваемом участке, угол наклона, густота. Участок аномальной дисперсии всегда присутствует на четвертой дисперсионной ветви. Для случая тонкостенного цилиндра имеет место сдвиг ветвей по оси  $\kappa$  от начала координат, первые две ветви практически не подвержены деформации. Численный и асимптотический анализ краевой задачи (1), (2) позволил

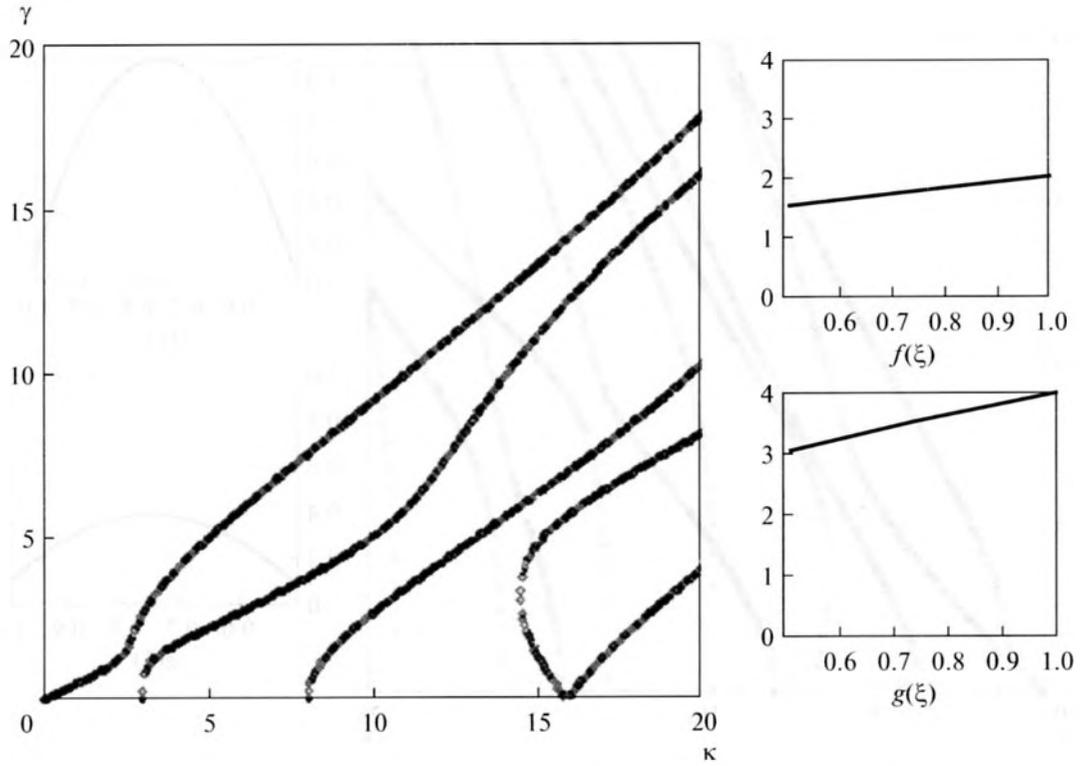


Рис. 1.  $f(\xi) = 1 + \xi$ ,  $g(\xi) = 2 + 2\xi$ ,  $\xi_0 = 0.5$ .

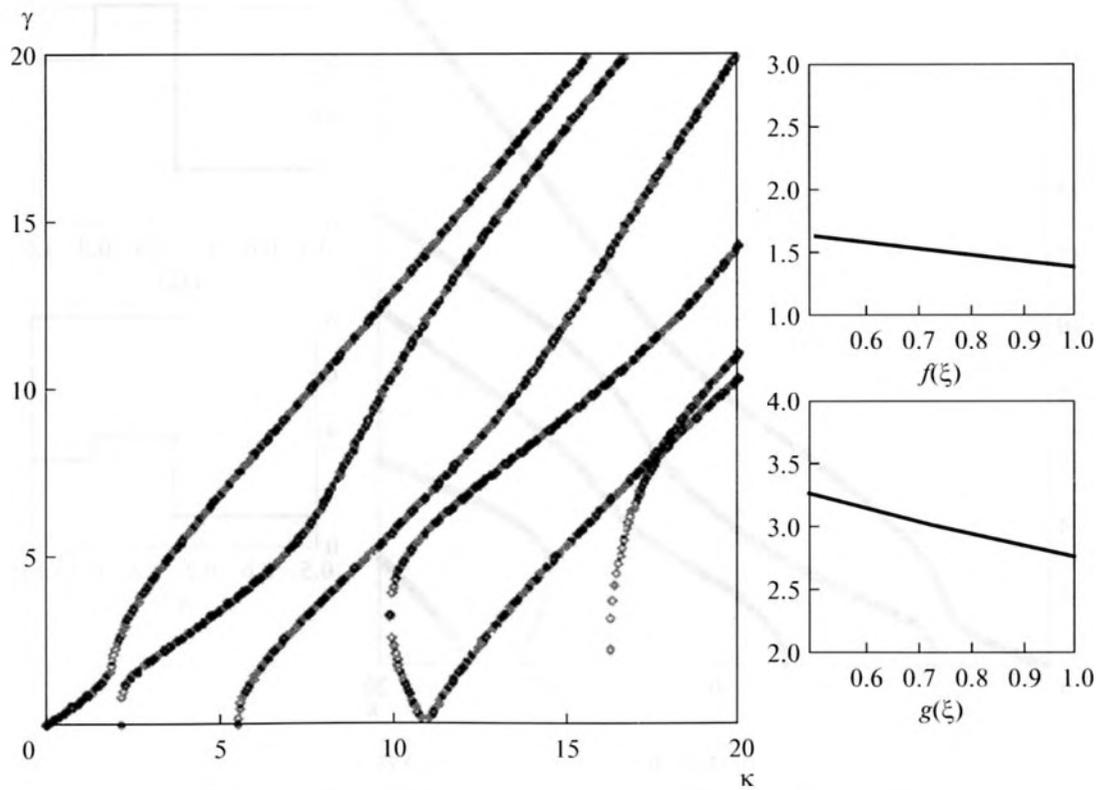


Рис. 2.  $f(\xi) = 1 + e^{-\xi}$ ,  $g(\xi) = 2 + 2e^{-\xi}$ ,  $\xi_0 = 0.5$ .

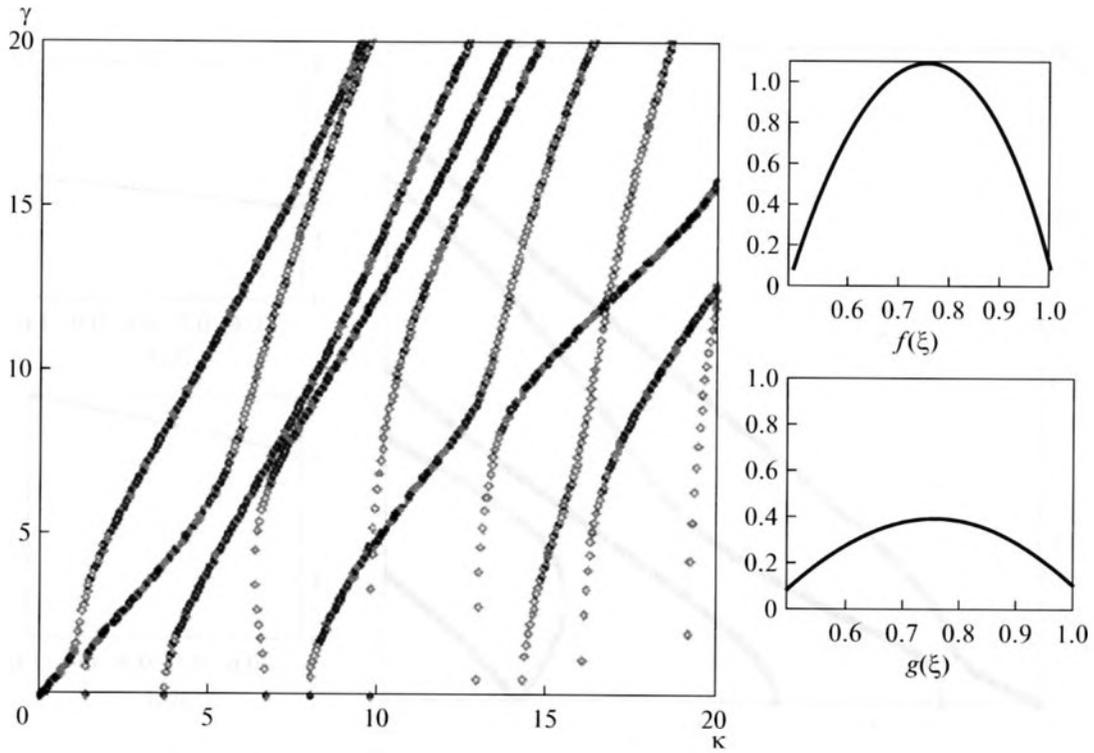


Рис. 3.  $f(\xi) = -15.9\xi^2 + 23.9\xi - 7.9$ ,  $g(\xi) = -4.7\xi^2 + 7.1\xi - 2.3$ ,  $\xi_0 = 0.5$ .

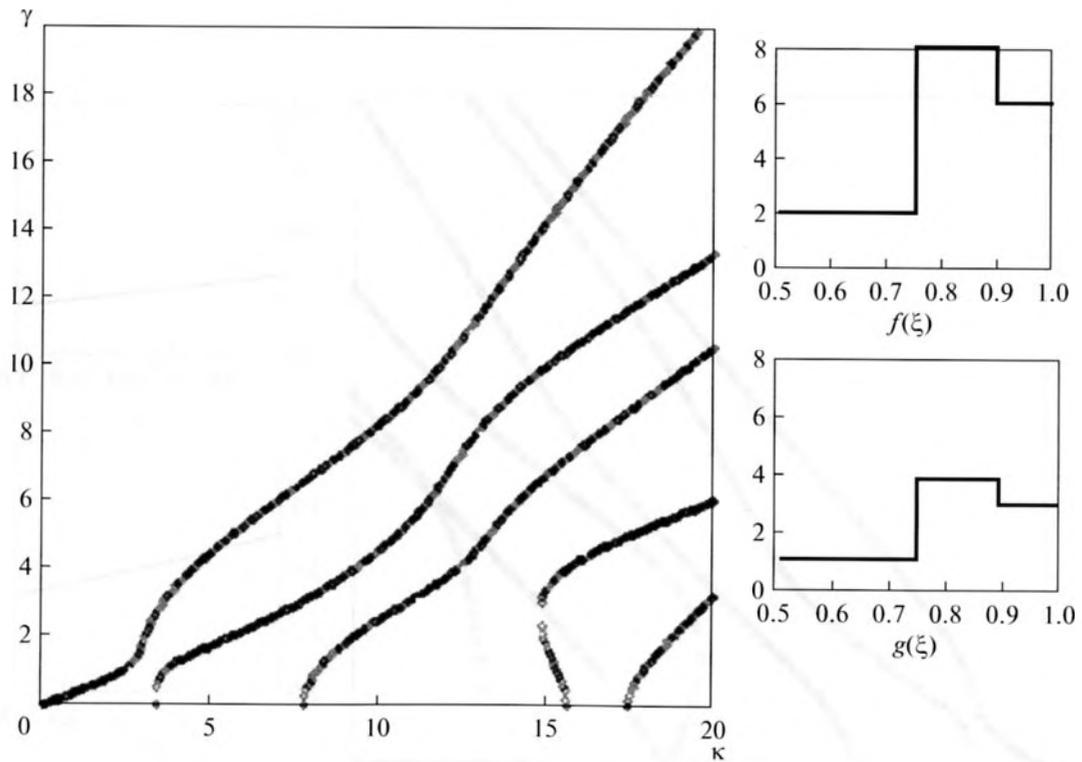


Рис. 4.  $f(\xi) = \begin{cases} 2, & \xi < 0.75 \\ 8, & 0.75 \leq \xi < 0.9 \\ 6, & \xi \geq 0.9 \end{cases}$ ,  $g(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi < 0.75 \\ 4, & 0.75 \leq \xi < 0.9 \\ 3, & \xi \geq 0.9 \end{cases}$ ,  $\xi_0 = 0.5$ .

выявить общие закономерности строения дисперсионных множеств, во многом совпадающие со структурой дисперсионных множеств плоских волноводов [16].

Работа выполнена при частичной поддержке Программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН № 1 “Фундаментальные проблемы математического моделирования”, № 114072870112 “Математическое моделирование неоднородных и многофазных структур” и в рамках проекта Министерства образования и науки РФ № 9.665.2014/К.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pochhammer L.* Über die fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner schwingungen in einem unbegrenzten isotropen kreiscylinder // *J. Reine Angew. Math.* 1876. V. 81. P. 324–336.
2. *Chree C.* Longitudinal vibrations of a circular bar // *J. Quart. Pure Appl. Math.* 1886. V. 21. P. 287–298.
3. *Вовк А.Е., Гудков В.В.* Нормальные продольные волны в упругом цилиндрическом волноводе // *Акуст. журн.* 1967. Т. 13. № 3. С. 345–351.
4. *Тютюкин В.В.* Нормальные волны кругового типа в полем упругом цилиндре // *Акуст. журн.* 2004. Т. 50. № 6. С. 855–864.
5. *Микер Т., Мейтцлер А.* Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинах // *Физическая акустика: Принципы и методы. Часть 1А.* М.: Мир, 1966. С. 140–203.
6. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. К.: Наук. думка, 1981. 284 с.
7. *Панфилов И.А., Устинов Ю.А.* Колебания и волны в цилиндре с винтовой анизотропией // *Акуст. журн.* 2010. Т. 56. № 6. С. 759–766.
8. *Романов А.Г., Толоконников Л.А.* Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // *ПММ.* 2011. Т. 75. № 5. С. 850–857.
9. *Сыресин Д.Е., Жарников Т.В., Петров К.Б.* Метод расчета дисперсионных кривых, волновых полей и упругих параметров среды в скважинах с радиально-неоднородной зоной нарушения // *Труды МФТИ.* 2012. Т. 4. № 4. С. 167–179.
10. *Syresin D.E., Zharnikov T.V., Tyutekin V.V.* Dispersion properties of helical waves in radially inhomogeneous elastic media // *J. Acoust. Soc. Am.* 2012. V. 131. № 6. P. 4263–271.
11. *Yu J.G., Lefebvre J.E.* Guided waves in multilayered hollow cylinders: the improved Legendre polynomial method // *Composite Structures.* 2013. V. 95. P. 419–429.
12. *Baron C.* Propagation of elastic waves in an anisotropic functionally graded hollow cylinder in vacuum // *Ultrasonics.* 2011. V. 51. № 2. P. 123–130.
13. *Elmaimouni L., Lefebvre J.E., Zhang V., Gryba T.* Guided waves in radially graded cylinders: a polynomial approach // *NDT & E International.* 2005. V. 38. № 5. P. 344–353.
14. *Shariyat M.* Nonlinear transient stress and wave propagation analyses of the FGM thick cylinders, employing a unified generalized thermoelasticity theory // *Internat. J. Mechanical Sciences.* 2012. V. 65. № 1. P. 24–37.
15. *Hasheminejad S.M., Ahamdi-Savadkoobi A.* Vibroacoustic behavior of a hollow FGM cylinder excited by on-surface mechanical drives // *Composite Structures.* 2010. V. 92. № 1. P. 86–96.
16. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
17. *Гетман И.П., Устинов Ю.А.* Математическая теория нерегулярных твердых волноводов. Ростов-на-Дону: РУ, 1993. 144 с.
18. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
19. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 350 с.