

ОБРАБОТКА АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ.  
КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 534.87

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ УГЛОВЫХ КООРДИНАТ  
ИСТОЧНИКОВ СИГНАЛОВ И ТОЧНОСТЬ ИХ ИЗМЕРЕНИЯ  
ПРИ ОПТИМАЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

© 2015 г. Е. Н. Калёнов

Камчатский гидрофизический институт  
684090 Вилучинск, ул. Академическая 3  
E-mail: info@kgfi.ru

Поступила в редакцию 12.05.2014 г.

Исследована потенциальная точность измерения угловых координат источника сигнала при наличии мешающих источников и точность измерения этих координат методом, основанным на формировании пространственного спектра сигнала с использованием оптимальной пространственной фильтрации. Для линейной эквидистантной антенной решетки получены аналитические выражения, определяющие зависимость рассматриваемых точностей измерения угловых координат от параметров антенны, углового расстояния до мешающего источника и спектральных плотностей мощности сигнала, шума и мешающего источника.

*Ключевые слова:* пространственный спектр сигнала, оптимальная пространственная фильтрация, потенциальная точность пеленгования, локальная помеха.

DOI: 10.7868/S0320791915010050

В статье рассматривается потенциальная точность измерения угловых координат точечного источника сигнала при наличии точечных мешающих источников и точность измерения этих координат методом, основанным на измерении углового положения локальных максимумов пространственного спектра сигнала (ПСС), формируемого с использованием оптимальной (по максимуму отношения сигнал/шум + локальные помехи) пространственной фильтрации (ОПФ). Анализ этих характеристик осуществляется с использованием полученных в статье аналитических выражений, в то время как ранее с помощью численных расчетов и математического моделирования такой анализ осуществлялся только для конкретной помехо-сигнальной обстановки.

ОПФ при работе в поле локальных помех возможно осуществить с помощью когерентной компенсации этих помех, алгоритмов адаптации с обратной связью и алгоритмов адаптации без обратной связи. Эффективность классического алгоритма формирования ПСС с ОПФ, основанного на обращении выборочной оценки корреляционной матрицы входных сигналов (алгоритм сверхразрешения Кейпона [1]), сильно зависит от дестабилизирующих факторов (точности задания направления на сигнал, флуктуаций волновых фронтов сигнала и помех, конечности времени усреднения и т.д.), и кроме того, оценка угловых координат ПСС с ОПФ является смещенной (при формировании в характеристике направ-

ленности (ХН) антенны зон подавления в направлении на локальные помехи максимум ХН смещается от направления на сигнал), поэтому также разработано большое количество других методов формирования ПСС (других алгоритмов сверхразрешения), более устойчивых к дестабилизирующим факторам и формирующим несмещенную оценку пространственного спектра. В работах [2–4] исследуются модифицированные алгоритмы Кейпона, устойчивые к ошибкам задания направления на сигнал, в работе [5] рассмотрены алгоритмы, эффективно работающие при наличии флуктуаций волновых фронтов сигнала и помех, в работах [6, 7] исследуются методы разрешения сигналов, основанные на решении систем уравнений.

При оценке эффективности этих алгоритмов адаптации требуется знать исследуемую в статье потенциально достижимую точность измерения угловых координат в поле локальных помех (ЛП). Также в статье осуществляется анализ потенциальных характеристик и широко используемого метода измерения угловых координат на основе формирования ПСС с ОПФ.

Потенциальная точность пеленгования точечного одиночного источника сигнала при работе на фоне не коррелированного по пространству гауссова шума рассмотрена для линейной эквидистантной антенной решетки (АР) в работе [8]. Потенциальная точность пеленгования пространственно-флуктуирующе-

го сигнала при работе на фоне не коррелированного по пространству гауссова шума рассмотрена для линейной эквидистантной АР в работе [9]. В общем случае для гауссовой стати-

стики входных сигналов потенциальная точность измерения угловых координат источника сигнала определяется из следующего выражения [10]:

$$\sigma_L^2(\hat{\alpha}_0) = \left\{ T_0 \int_0^{f_{\max}} \text{tr} \left[ \left[ \mathbf{Q}_L^{-1}(f) - \frac{\mathbf{Q}_L^{-1}(f) \mathbf{S}_0(f) \mathbf{V}_0^*(f) \mathbf{V}_0^T(f) \mathbf{Q}_L^{-1}(f)}{1 + \mathbf{S}_0(f) \mathbf{V}_0^T(f) \mathbf{Q}_L^{-1}(f) \mathbf{V}_0^*(f)} \right] \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \mathbf{S}_0(f) \mathbf{V}_\alpha^*(f) \mathbf{V}_\alpha^T(f) \right]_{\alpha=\alpha_0} \right]^2 df \right\}^{-1}, \quad (1)$$

где  $\sigma_L^2\{\hat{\alpha}_0\}$  – дисперсия эффективной оценки  $\hat{\alpha}_0$  пеленга точечного источника сигнала при работе в общем случае в условиях воздействия распределенного шума и  $L$  других точечных источников ( $L$  локальных помех);  $S_0(f)$  – спектральная плотность мощности полезного сигнала на элементах АР;  $\mathbf{Q}_L(f)$  – матрица размерностью  $M \times M$  взаимных спектральных плотностей мощности (ВСПМ) шума и  $L$  локальных помех на элементах АР ( $M$  – число элементов АР);  $\mathbf{V}_0(f)$  – вектор размерностью  $M$ , характеризующий на частоте  $f$  амплитудно-фазовое распределение по элементам антенны полезного сигнала, приходящего с направления  $\alpha_0$ ;  $\mathbf{V}_\alpha(f)$  – фазирующий вектор размерностью  $M$  для текущего направления наблюдения  $\alpha$  на частоте  $f$ ;  $T_0$  – длительность входной реализации сигнала;  $f_{\max}$  – максимальная рабочая частота пеленгатора;  $\text{tr}[\cdot]$  – обозначение следа матрицы  $[\cdot]$ ;  $-1$ ,  $*$ ,  $T$  – знаки обращения матрицы, комплексного сопряжения и транспонирования соответственно.

Для общего случая матрица ВСПМ шума и помех на элементах АР равняется

$$\mathbf{Q}_L(f) = N(f)\mathbf{Q}(f) + \sum_{l=1}^L S_l(f)\mathbf{V}_l^*(f)\mathbf{V}_l^T(f), \quad (2)$$

где  $N(f)$  и  $S_l(f)$ ,  $l = \overline{1, L}$  – спектральные плотности мощности шума и  $l$  локальной помехи на элементах АР соответственно;  $\mathbf{V}_l(f)$ ,  $l = \overline{1, L}$  – вектор размерностью  $M$ , характеризующий на частоте  $f$  амплитудно-фазовое распределение по элементам антенны  $l$  локальной помехи, приходящей с направления  $\alpha_l$ ;  $\mathbf{Q}(f)$  – нормированная матрица размерностью  $M \times M$  ВСПМ шума на элементах АР на частоте  $f$ .

Выражение (1) с учетом формулы (2) преобразуется к следующему виду:

$$\sigma_L^2(\hat{\alpha}_0) = \left\{ T_0 \int_0^{f_{\max}} S_0^2(f) \left\{ \text{tr} \left[ \left[ \mathbf{Q}_L^{-1}(f) \right]^2 (j2\pi f)^2 \Delta_0^2 \right] - \frac{N(f)S_0(f)}{N(f) + S_0(f)G_{0L}(f)} \left[ 1 + \frac{N(f)}{N(f) + S_0(f)G_{0L}(f)} \right] \right\} \right\}^{-1} \times \quad (3)$$

$$\times \mathbf{V}_0^T(f) \left[ \mathbf{Q}_L^{-1}(f) \right]^3 (j2\pi f)^2 \Delta_0^2 \mathbf{V}_0^*(f) \right\}^{-1},$$

где  $\Delta_0$  – матрица весовых коэффициентов размерностью  $M \times M$  с элементами  $\delta_{0mn}$ , равными

$$\delta_{0mn} = \frac{\partial}{\partial \alpha} (\tau_m - \tau_n) \Big|_{\alpha=\alpha_0}, \quad m, n = \overline{0, M-1}, \quad (4)$$

$\tau_m, \tau_n$  – задержки сигнала на  $m$  и  $n$  элементах антенны для направления наблюдения  $\alpha$  соответственно;  $G_{0L}(f)$  – коэффициент усиления антенны, оптимизированной для направления наблюдения  $\alpha_0$  к работе в поле шума и  $L$  локальных помех, равный

$$G_{0L}(f) = \mathbf{V}_0^T(f)\mathbf{Q}_L^{-1}(f)\mathbf{V}_0^*(f) = G_0(f) - \sum_{l=1}^L W_{l0}(f)\mathfrak{R}_{l0}(f), \quad (5)$$

$G_0(f) = \mathbf{V}_0^T(f)\mathbf{Q}^{-1}(f)\mathbf{V}_0^*(f)$  – коэффициент усиления антенны, оптимизированной для направления наблюдения  $\alpha_0$  к работе в шумовом поле;

$\mathfrak{R}_{l0}(f) = \mathbf{V}_0^T(f)\mathbf{Q}^{-1}(f)\mathbf{V}_l^*(f)$  – значение в направлении  $\alpha_0$  ненормированной ХН антенны, оптимизированной к работе в шумовом поле и компенсированной в направлении  $\alpha_l$  на локальную помеху

( $\mathfrak{R}_{l0}(f) = \mathfrak{R}_l(f, \alpha_0)$ );  $W_{l0}(f)$ ,  $l = \overline{1, L}$  – комплексные частотные характеристики фильтров в каналах компенсации локальных помех, которые для направления наблюдения  $\alpha_0$  рассчитываются из следующего матричного уравнения:

$$\mathbf{W}_0(f) = \begin{bmatrix} N(f) + S_1(f)G_1(f) & S_1(f)\mathfrak{R}_{12}^*(f) & S_1(f)\mathfrak{R}_{13}^*(f) & \dots & S_1(f)\mathfrak{R}_{1L}^*(f) \\ S_2(f)\mathfrak{R}_{12}(f) & N(f) + S_2(f)G_2(f) & S_2(f)\mathfrak{R}_{23}^*(f) & \dots & S_2(f)\mathfrak{R}_{2L}^*(f) \\ S_3(f)\mathfrak{R}_{13}(f) & S_3(f)\mathfrak{R}_{23}(f) & N(f) + S_3(f)G_3(f) & \dots & S_3(f)\mathfrak{R}_{3L}^*(f) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_L(f)\mathfrak{R}_{1L}(f) & S_L(f)\mathfrak{R}_{2L}(f) & S_L(f)\mathfrak{R}_{3L}(f) & \dots & N(f) + S_L(f)G_L(f) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_1(f)\mathfrak{R}_{10}^*(f) \\ S_2(f)\mathfrak{R}_{20}^*(f) \\ S_3(f)\mathfrak{R}_{30}^*(f) \\ \dots \\ \dots \\ S_L(f)\mathfrak{R}_{L0}^*(f) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где  $G_l(f) = \mathbf{V}_l^T(f)\mathbf{Q}^{-1}(f)\mathbf{V}_l^*(f)$ ,  $l = \overline{1, L}$  – коэффициент усиления антенны, оптимизированной к работе в шумовом поле для направления наблюдения  $\alpha_l$  на  $l$  локальную помеху.

При наличии одной локальной помехи дисперсия эффективной оценки пеленга  $\sigma_1^2(f, \hat{\alpha}_0)$  на фиксированной частоте  $f$  при  $T_0\Delta f = 1$  в соответствии с выражением (3) равна

$$\begin{aligned} \sigma_1^2(f, \hat{\alpha}_0) = & \left\{ \frac{S_0^2(f)}{N^2(f)} (j2\pi f)^2 \left\{ \text{tr} \left[ \left[ \mathbf{Q}^{-1}(f) \right]^2 \Delta_0^2 \right] - \right. \right. \\ & - \frac{S_1(f)}{N(f) + S_1(f)G_1(f)} \left[ 1 + \frac{N(f)}{N(f) + S_1(f)G_1(f)} \right] \times \\ & \times \mathbf{V}_1^T(f) \left[ \mathbf{Q}^{-1}(f) \right]^3 \Delta_0^2 \mathbf{V}_1^*(f) - \frac{S_0(f)}{N(f) + S_0(f)G_{01}(f)} \times \\ & \times \left[ 1 + \frac{N(f)}{N(f) + S_0(f)G_{01}(f)} \right] \times \\ & \times \left. \left. \left\{ \mathbf{V}_0^T(f) \left[ \mathbf{Q}^{-1}(f) \right]^3 \Delta_0^2 \mathbf{V}_0^*(f) - \right. \right. \right. \\ & - \left[ \frac{3S_1(f)\mathfrak{R}_{10}(f)}{N(f) + S_1(f)G_1(f)} - \frac{3S_1^2(f)G_1(f)\mathfrak{R}_{10}(f)}{[N(f) + S_1(f)G_1(f)]^2} + \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{S_1^3(f)\mathfrak{R}_{10}(f)G_1^2(f)}{[N(f) + S_1(f)G_1(f)]^3} \right\} \mathbf{V}_1^T(f) \left[ \mathbf{Q}^{-1}(f) \right]^3 \Delta_0^2 \mathbf{V}_0^*(f) \right\} \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (7)$$

где коэффициент усиления АР  $G_{01}(f)$  с учетом выражений (5) и (6) равняется

$$G_{01}(f) = G_0(f) - \frac{S_1(f)\mathfrak{R}_{10}(f)\mathfrak{R}_{10}^*(f)}{N(f) + S_1(f)G_1(f)}. \quad (8)$$

Рассмотрим линейную эквидистантную АР и не коррелированный по пространству шум. Для этих условий получим:  $\mathbf{Q}(f) = \mathbf{E}$ ,  $G_0(f) = G_1(f) = M$ ,  $\mathfrak{R}_1(f, \alpha) = R_1(f, \alpha)$ , где  $R_1(f, \alpha)$  – ХН линейной эквидистантной АР при равновесном суммировании ее элементов (оптимизирована к работе в поле не коррелированного по пространству шума):

$$R_1(f, \alpha) = \mathbf{V}_\alpha^T(f)\mathbf{V}_1^*(f) = \frac{\sin[M\pi f d(\sin\alpha - \sin\alpha_1)/c]}{\sin[\pi f d(\sin\alpha - \sin\alpha_1)/c]} \times \exp[-jM\pi f d(\sin\alpha - \sin\alpha_1)/c],$$

где  $d$  – расстояние между соседними элементами АР и  $c$  – скорость звука в воде.

Элементы  $\delta_{0mn}$  матрицы весовых коэффициентов  $\Delta_0$  для линейной эквидистантной АР с учетом выражения (4) равняются

$$\delta_{0mn} = (m - n) \frac{d}{c} \cos\alpha_0, \quad m, n = \overline{0, M-1},$$

и, соответственно, матрица  $\Delta_0$  имеет вид

$$\Delta_0 = \frac{d}{c} \cos\alpha_0 \begin{bmatrix} 0 & -1 & \dots & 1 - M \\ 1 & 0 & \dots & 2 - M \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M - 1 & M - 2 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что

$$\text{tr}(\Delta_0^2) = -\left(\frac{d}{c} \cos\alpha_0\right)^2 \frac{M^2(M^2 - 1)}{6}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0^T(f)\Delta_0^2\mathbf{V}_0^*(f) = \mathbf{V}_1^T(f)\Delta_0^2\mathbf{V}_1^*(f) = \\ = -\left(\frac{d}{c} \cos\alpha_0\right)^2 \frac{M^2(M^2 - 1)}{6} \frac{M}{2}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\mathbf{V}_1^T(f)\Delta_0^2\mathbf{V}_0^*(f) = -\left(\frac{d}{c} \cos\alpha_0\right)^2 \frac{M^2(M^2 - 1)}{6} \frac{R_{01}(f)}{2},$$

формула (7) для рассматриваемого случая (линейная эквидистантная АР, не коррелированный по пространству шум и один мешающий источник) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \sigma_1^2(f, \hat{\alpha}_0) = & \left\{ \frac{S_0^2(f)M^2}{N^2(f)} \left( \pi f \frac{d}{c} \cos\alpha_0 \right)^2 \frac{M^2 - 1}{3} \times \right. \\ & \times \left. \left[ 1 + \frac{N^2(f)}{[N(f) + S_1(f)M]^2} - \right. \right. \end{aligned} \quad (11)$$

$$\left. \left. - \left[ 1 + \frac{N(f)}{N(f) + S_0(f)G_{01}(f)} \right] \frac{S_0(f)\tilde{G}_{01}(f)}{N(f) + S_0(f)G_{01}(f)} \right] \right\}^{-1},$$

где коэффициенты усиления АР  $G_{01}(f)$  и  $\tilde{G}_{01}(f)$  с учетом выражений (8) и (11) равняются

$$G_{01}(f) = M - \frac{S_1(f)R_{10}(f)R_{10}^*(f)}{N(f)+S_1(f)M},$$

$$\tilde{G}_{01}(f) = M - \frac{S_1(f)R_{10}(f)R_{10}^*(f)}{N(f)+S_1(f)M} [1 + \beta(f)], \quad (12)$$

$$\beta(f) = \frac{N(f)}{N(f)+S_1(f)M} + \frac{N^2(f)}{[N(f)+S_1(f)M]^2}. \quad (13)$$

Из выражения (11) следует, что при значении  $R_{10}(f) = 0$  дисперсия оценки пеленга сигнала в оптимальном пеленгаторе (по критерию минимума среднеквадратичной ошибки (СКО)) достигает своего максимума  $\sigma_{1\max}^2(f, \hat{\alpha}_0)$ , равного

$$\sigma_{1\max}^2(f, \hat{\alpha}_0) = \left\{ \frac{S_0^2(f)M^2}{N^2(f)} \left( \pi f \frac{d}{c} \cos \alpha_0 \right)^2 \times \right. \quad (14)$$

$$\left. \times \frac{M^2 - 1}{3} \left[ \frac{N^2(f)}{[N(f) + S_0(f)M]^2} + \frac{N^2(f)}{[N(f) + S_1(f)M]^2} \right] \right\}^{-1}.$$

При наличии мощной локальной помехи ( $S_1(f)M \gg N(f)$ ) формула (14) преобразуется к следующему выражению:

$$\sigma_{1\max}^2(f, \hat{\alpha}_0) = \left\{ \frac{S_0^2(f)M^2}{[N(f) + S_0(f)M]^2} \left( \pi f \frac{d}{c} \cos \alpha_0 \right)^2 \frac{M^2 - 1}{3} \right\}^{-1},$$

и, следовательно, в этом случае при нахождении мешающего источника вне основного лепестка ХН ( $R_{10}(f) \approx 0$ ) точность пеленгования при увеличении мощности полезного сигнала ограничена и стремится к пределу

$$\left[ \left( \pi f \frac{d}{c} \cos \alpha_0 \right)^2 \frac{M^2 - 1}{3} \right]^{-1}.$$

Точность пеленгования сигнала при наличии мешающего источника целесообразно сопоставить с точностью пеленгования одиночного сигнала. Потенциальная точность пеленгования  $\sigma_0^2(f, \hat{\alpha}_0)$  при работе в условиях воздействия коррелированного по пространству шума с учетом формулы (7) равняется

$$\sigma_0^2(f, \hat{\alpha}_0) = \left\{ \frac{S_0^2(f)}{N^2(f)} (2j\pi f)^2 \times \right. \quad (15)$$

$$\left. \times \left\{ \text{tr} \left[ \left[ \mathbf{Q}^{-1}(f) \right]^2 \Delta_0^2 \right] - \frac{S_0(f)}{N(f) + S_0(f)G_0(f)} \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \left[ 1 + \frac{N(f)}{N(f) + S_0(f)G_0(f)} \right] \mathbf{V}_0^T(f) \left[ \mathbf{Q}^{-1}(f) \right]^3 \Delta_0^2 \mathbf{V}_0^*(f) \right\} \right\}^{-1}.$$

Для линейной эквидистантной АР и не коррелированного по пространству шума формула (15) с

учетом выражений (9) и (10) преобразуется к следующему виду:

$$\sigma_0^2(f, \hat{\alpha}_0) = \left\{ \frac{S_0^2(f)M^2}{N^2(f)} \left( \pi f \frac{d}{c} \cos \alpha_0 \right)^2 \times \right. \quad (16)$$

$$\left. \times \frac{M^2 - 1}{3} \left[ 1 + \frac{N^2(f)}{[N(f) + S_0(f)M]^2} \right] \right\}^{-1}.$$

Таким образом, при возникновении локальной помехи максимальное увеличение дисперсии оценки пеленга сигнала составляет  $k_{\max}^2(f, \alpha_0)$  раз по сравнению с дисперсией оценки пеленга одиночного сигнала

$$k_{\max}^2(f, \hat{\alpha}_0) = \frac{\sigma_{1\max}^2(f, \hat{\alpha}_0)}{\sigma_0^2(f, \hat{\alpha}_0)} =$$

$$= \frac{1 + \frac{N^2(f)}{[N(f) + S_0(f)M]^2}}{\frac{N^2(f)}{[N(f) + S_0(f)M]^2} + \frac{N^2(f)}{[N(f) + S_1(f)M]^2}}.$$

При наличии мощной локальной помехи отношение  $k_{\max}^2(f, \hat{\alpha}_0) \approx 1 + [1 + S_0(f)M/N(f)]^2$  и, следовательно, в этом случае величина проигрыша в точности пеленгования из-за наличия локальной помехи зависит только от мощности полезного сигнала.

В случае измерения угловых координат источника сигнала по локальным максимумам ПСС с ОПФ оценка этих координат при наличии других источников является смещенной. Для оценки этого смещения рассмотрим алгоритм обработки сигнала в оптимальном пеленгаторе, в котором смещение убирается с помощью двух цепей компенсации [11]:

$$y_{0Li} = \frac{1}{T_0} \sum_{k=1}^{f_{\max} T_0} h_{0Lk}^2 \left[ \mathbf{Z}_{ik}^T \mathbf{Q}_{Lk}^{-1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \mathbf{V}_{\alpha k}^* \mathbf{V}_{\alpha k}^T \right) \right]_{\alpha=\alpha_0} \mathbf{Q}_{Lk}^{-1} \mathbf{Z}_{ik}^* -$$

$$- h_{0Lk}^2 \mathbf{Z}_{ik}^T \mathbf{Q}_{Lk}^{-1} \mathbf{V}_{0k}^* \mathbf{V}_{0k}^T \mathbf{Q}_{Lk}^{-1} \mathbf{Z}_{ik}^* \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \mathbf{V}_{\alpha k}^T \mathbf{Q}_{Lk}^{-1} \mathbf{V}_{\alpha k}^* \right) \Big|_{\alpha=\alpha_0} -$$

$$- T_0 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \mathbf{V}_{\alpha k}^T \mathbf{Q}_{Lk}^{-1} \mathbf{V}_{\alpha k}^* \right) \Big|_{\alpha=\alpha_0}, \quad (16)$$

где  $y_{0Li}$  – производная по углу  $\alpha$  от натурального логарифма функции правдоподобия при значении  $\alpha = \alpha_0$  для  $i$ -й реализации многомерного входного сигнала длительностью  $T_0$ ;  $\mathbf{Z}_{ik}$  – вектор размерностью  $M$  комплексных амплитуд  $k$ -й частотной составляющей при разложении в ряд Фурье  $i$ -й реализации многомерного входного сигнала длительностью  $T_0$ ; частотная характеристика  $h_{0Lk}$  скалярного фильтра в выражении (16) равняется

$$h_{0Lk} = \frac{S_{0k}^{1/2}}{\left(1 + S_{0k} \mathbf{V}_{0k}^T \mathbf{Q}_{Lk}^{-1} \mathbf{V}_{0k}^*\right)^{1/2}}.$$

Остальные обозначения в выражении (16) совпадают с обозначениями выражения (1).

Из выражения (16) следует, что оптимальный пеленгатор осуществляет не только оптимальную пространственную фильтрацию, но содержит также две цепи компенсации (второй и третий члены выражения (16)). Первая цепь компенсации управляется входным сигналом и уменьшает дисперсию и смещение оценки пеленга на источник сигнала. Сигнал второй цепи компенсации определяется статистическими характеристиками поля помех и уменьшает только смещение оценки пеленга на источник сигнала.

Воздействие первой цепи компенсации в части уменьшения дисперсии оценки угловых координат обусловлено тем, что из-за наличия этой цепи коэффициент усиления АР в направлении на сигнал  $\tilde{G}_{01}(f)$  рассчитывается с учетом множителя  $\beta(f) > 0$  (см. выражения (12) и (13)).

При измерении угловых координат по локальным максимумам ПСС, сформированного с использованием ОПФ, цепи компенсации не используются, в связи с чем дисперсия  $\sigma_{1OPF}^2(f, \hat{\alpha}_0)$  оценки угловых координат этим методом определяется выражением (11), но при  $\beta(f) = 0$  и, соответственно, при  $\tilde{G}_{01}(f) = G_{01}(f)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{1OPF}^2(f, \hat{\alpha}_0) = & \left\{ \frac{S_0^2(f) M^2}{N^2(f)} \left( \pi f \frac{d}{c} \cos \alpha_0 \right)^2 \times \right. \\ & \times \frac{M^2 - 1}{3} \left\{ \frac{N^2(f)}{[N(f) + S_0(f) G_{01}(f)]^2} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{N^2(f)}{[N(f) + S_1(f) M]^2} \right\} \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

На рис. 1 для линейной эквидистантной АР,  $M = 32$ ,  $d = c/2f_0$ ,  $\alpha_0 = 0^0$  и  $S_0(f_0)M = N(f_0)$ , представлены для двух значений помехи  $S_1(f_0) = S_0(f_0)$  и  $S_1(f_0) = N(f_0)$  графики зависимости от углового расстояния между сигналом и помехой дисперсии оценки угловых координат сигнала при потенциальной точности измерений  $10 \lg [\sigma_1^2(f_0, \hat{\alpha}_0) / \sigma_0^2(f_0, \hat{\alpha}_0)]$  дБ и при использовании ПСС с ОПФ  $10 \lg [\sigma_{1OPF}^2(f_0, \hat{\alpha}_0) / \sigma_0^2(f_0, \hat{\alpha}_0)]$  дБ. При потенциальной точности измерений дисперсия отображается на рис. 1 сплошной линией при равенстве мощностей помехи и сигнала и штриховой – при равенстве мощностей помехи и шума. Для случая использования ПСС с ОПФ дисперсия отображается пунктирной линией. Угловое расстояние  $\alpha_{01}$  между сигналом и помехой

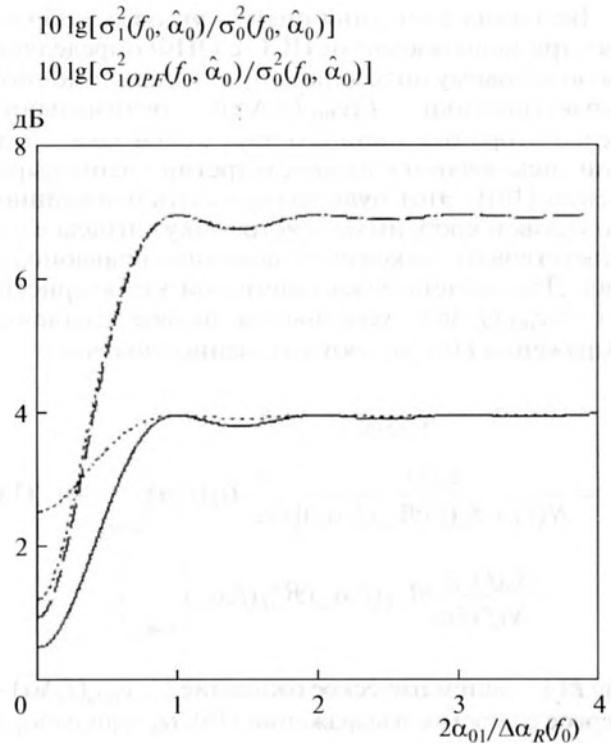


Рис. 1. Графики зависимости дисперсии оценки угловых координат сигнала при потенциальной точности измерений и при использовании ПСС с ОПФ от углового расстояния между источником сигнала и мешающим источником. При потенциальной точности измерений дисперсия отображается сплошной линией при равенстве мощностей помехи и сигнала и штриховой линией – при равенстве мощностей помехи и шума. Дисперсия в случае использования ПСС с ОПФ отображается пунктирной линией.

нормируется на угол  $\Delta\alpha_R(f_0)/2$ , где угол  $\Delta\alpha_R(f_0)$  равен ширине основного лепестка ХН АР по ее первым нулям на частоте  $f_0$ .

Из представленных на рис. 1 графиков следует, что при нахождении мешающего источника вне основного лепестка ХН АР дисперсия оценки угловых координат при использовании ПСС с ОПФ практически совпадает с дисперсией оценки этих координат при потенциальной точности измерения, при этом от углового положения мешающего источника значение дисперсии практически не зависит. При нахождении помехи внутри основного лепестка ХН АР и сближении сигнала и помехи дисперсия оценки угловых координат сигнала при потенциальной точности измерения и дисперсия оценки этих координат при использовании ПСС с ОПФ начинают уменьшаться и приближаются к ошибке измерения угловых координат одиночного сигнала.

Величина смещения оценки угловых координат при использовании ПСС с ОПФ определяется по угловому положению нуля пеленгационной характеристики  $E\{y_{10Li}(f, \Delta\alpha)\}$  оптимального пеленгатора без учета его двух цепей компенсации (исключаются второй и третий члены выражения (16)). Этот нуль должен быть ближайшим по угловой координате к источнику сигнала и соответствовать максимуму функции правдоподобия. Для расчета пеленгационной характеристики  $E\{y_{10Li}(f, \Delta\alpha)\}$  усредняется первое слагаемое выражения (16), и, соответственно, получаем

$$E\{y_{10Li}(f, \Delta\alpha)\} = \frac{S_0(f)}{N(f) + S_0(f)\mathfrak{R}_{\delta L}(f, \alpha_0)} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} G_L(f, \alpha) \right]_{\alpha=\alpha_\delta} + \frac{S_0(f)}{N(f)} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \mathfrak{R}_{\alpha L}(f, \alpha_0) \mathfrak{R}_{\alpha L}^*(f, \alpha_0) \right]_{\alpha=\alpha_\delta}, \quad (18)$$

где  $E\{\cdot\}$  – математическое ожидание  $\{\cdot\}$ ;  $y_{10Li}(f, \Delta\alpha)$  – первое слагаемое в выражении (16);  $\alpha_\delta = \arcsin(\sin\alpha_0 + \sin\Delta\alpha)$  – угол компенсации АР для угла рассогласования  $\Delta\alpha$ ;  $\mathfrak{R}_{\delta L}(f, \alpha_0)$  – значение в направлении  $\alpha_0$  оптимальной ненормированной ХН АР, компенсированной в направлении  $\alpha_\delta$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{\delta L}(f, \alpha_0) &= \mathbf{V}_0^T(f) \mathbf{Q}_L^{-1}(f) \mathbf{V}_\delta^*(f) = \\ &= \mathfrak{R}_\delta(f, \alpha_0) - \sum_{l=1}^L W_l(f, \alpha_\delta) \mathfrak{R}_l(f, \alpha_0), \end{aligned}$$

$\mathfrak{R}_\delta(f, \alpha_0) = \mathbf{V}_0^T(f) \mathbf{Q}^{-1}(f) \mathbf{V}_\delta^*(f)$  и  $\mathfrak{R}_l(f, \alpha_0) = \mathbf{V}_0^T(f) \times \mathbf{Q}^{-1}(f) \mathbf{V}_l^*(f)$  – значения в направлении  $\alpha_0$  ненормированных ХН АР, оптимизированных к ра-

боте в шумовом поле и компенсированных в направлениях  $\alpha_\delta$  и  $\alpha_l$  соответственно,  $\mathbf{V}_\delta(f)$  – фазированный вектор размерностью  $M$  для направления наблюдения  $\alpha_\delta$ ;  $W_l(f, \alpha_\delta)$ ,  $l = \overline{1, L}$  – комплексные частотные характеристики фильтров в каналах компенсации локальных помех, которые рассчитываются из матричного уравнения (6) для направления наблюдения  $\alpha_\delta$ ;  $G_L(f, \alpha)$  – коэффициент усиления антенны, оптимизированной для текущего направления наблюдения  $\alpha$  к работе в поле шума и  $L$  локальных помех, равный

$$\begin{aligned} G_L(f, \alpha) &= \mathbf{V}_\alpha^T(f) \mathbf{Q}_L^{-1}(f) \mathbf{V}_\alpha^*(f) = \\ &= G_\alpha(f) - \sum_{l=1}^L W_l(f, \alpha) \mathfrak{R}_l(f, \alpha), \end{aligned}$$

где  $G_\alpha(f) = \mathbf{V}_\alpha^T(f) \mathbf{Q}^{-1}(f) \mathbf{V}_\alpha^*(f)$  – коэффициент усиления антенны, оптимизированной к работе в шумовом поле для направления наблюдения  $\alpha$ ;  $W_l(f, \alpha)$ ,  $l = \overline{1, L}$  – комплексные частотные характеристики фильтров в каналах компенсации локальных помех, рассчитываемые из матричного уравнения (6) для направления наблюдения  $\alpha$ ;  $\mathfrak{R}_{\alpha L}(f, \alpha_0)$  – значение в направлении  $\alpha_0$  оптимальной ненормированной ХН АР, компенсированной в направлении  $\alpha$ :

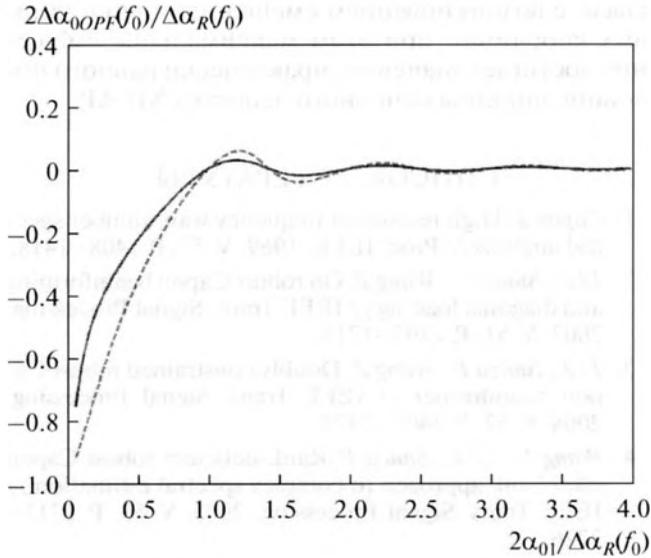
$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{\alpha L}(f, \alpha_0) &= \mathbf{V}_0^T(f) \mathbf{Q}_L^{-1}(f) \mathbf{V}_\alpha^*(f) = \\ &= \mathfrak{R}_\alpha(f, \alpha_0) - \sum_{l=1}^L W_l(f, \alpha) \mathfrak{R}_l(f, \alpha_0). \end{aligned}$$

Для случая одного мешающего источника пеленгационная характеристика  $E\{y_{10Li}(f, \Delta\alpha)\}$  в соответствии с выражением (18) преобразуется к следующему виду:

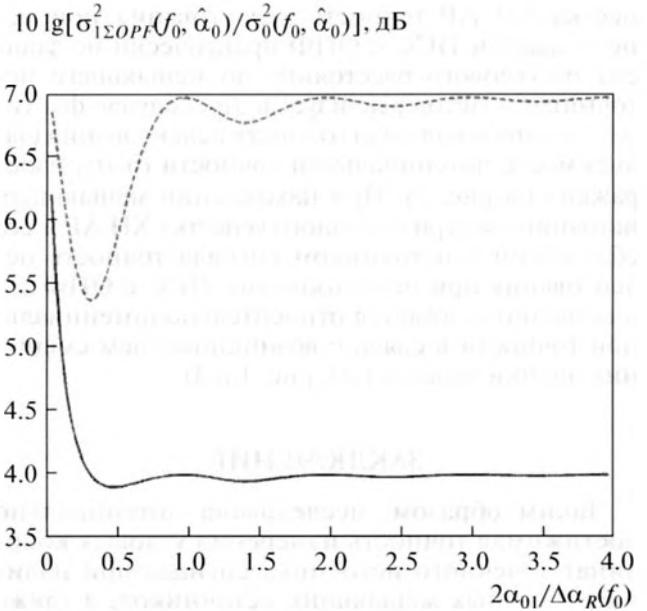
$$\begin{aligned} E\{y_{10Li}(f, \Delta\alpha)\} &= \frac{S_0(f)}{N(f) + S_0(f)} \left[ \mathfrak{R}_\delta(f, \alpha_0) - \frac{S_1(f) \mathfrak{R}_1^*(f, \alpha_\delta)}{N(f) + S_1(f) G_1(f)} \mathfrak{R}_1(f, \alpha_0) \right] \times \\ &\times \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} G_\alpha(f) \right\}_{\alpha=\alpha_\delta} - \frac{S_1(f)}{N(f) + S_1(f) G_1(f)} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \mathfrak{R}_1^*(f, \alpha) \mathfrak{R}_1(f, \alpha) \right]_{\alpha=\alpha_\delta} + \\ &+ \frac{S_0(f)}{N(f)} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \mathfrak{R}_\alpha^*(f, \alpha_0) - \frac{S_1(f) \mathfrak{R}_1^*(f, \alpha)}{N(f) + S_1(f) G_1(f)} \mathfrak{R}_1(f, \alpha_0) \right]_{\alpha=\alpha_\delta}^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Значение  $\Delta\alpha_{\text{ОПФ}}(f_0)$ , являющееся решением уравнения (19), определяет смещение оценки пеленга при использовании ПСС с ОПФ.

Рассмотрим линейную эквидистантную АР и не коррелированный по пространству шум. Смещение оценки пеленга  $\Delta\alpha_{\text{ОПФ}}(f_0)$  при ис-



**Рис. 2.** Графики зависимости смещения оценки угловых координат сигнала при использовании ПСС с ОПФ от углового расстояния между источником сигнала и мешающим источником. Смещение отображается сплошной линией при равенстве мощностей помехи и сигнала и штриховой линией – при равенстве мощностей помехи и шума.



**Рис. 3.** Графики зависимости квадрата суммарной СКО оценки угловых координат сигнала при использовании ПСС с ОПФ от углового расстояния между источником сигнала и мешающим источником. Квадрат суммарной СКО при равенстве мощностей помехи и сигнала отображается сплошной линией, при равенстве мощностей помехи и шума – штриховой линией.

пользовании ПСС с ОПФ с учетом выражения (19) является для этих условий решением следующего уравнения:

$$\left\{ \frac{S_1(f)}{[N(f) + S_1(f)M]} + \frac{S_0(f)S_1^2(f)R_1(f, \alpha_0)R_1^*(f, \alpha_0)}{N(f)[N(f) + S_1(f)M]^2} \right\} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \alpha} |R_1(f, \alpha)| R_1^*(f, \alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_\delta} +$$

$$+ \frac{S_0(f)}{N(f)} \frac{\partial}{\partial \alpha} R_0(f, \alpha) R_0^*(f, \alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_\delta} -$$

$$- \frac{2S_0(f)S_1(f)|R_1(f, \alpha_0)|}{N(f)N(f) + S_1(f)M} \times$$

$$\times \left[ |R_0(f, \alpha_\delta)| \frac{\partial}{\partial \alpha} |R_1(f, \alpha)| \Big|_{\alpha=\alpha_\delta} + \right.$$

$$\left. + |R_1(f, \alpha_\delta)| \frac{\partial}{\partial \alpha} |R_0(f, \alpha)| \Big|_{\alpha=\alpha_\delta} \right] = 0. \quad (20)$$

На рис. 2 для рассматриваемого примера представлены графики зависимости смещения оценки пеленга  $\Delta\alpha_{0OPF}(f_0)$  при использовании ПСС с ОПФ от углового расстояния  $\alpha_{01}$  между сигналом и помехой. График смещения оценки пеленга при равенстве мощностей помехи и сигнала отображается на рис. 2 сплошной линией, при равенстве мощностей помехи и шума – штриховой линией, при этом значения  $\Delta\alpha_{0OPF}(f_0)$  и  $\alpha_{01}$  нормируются на угол  $\Delta\alpha_R(f_0)/2$ .

Из представленных на рис. 2 графиков следует, что при нахождении мешающего источника вне основного лепестка ХН АР смещение оценки пеленга при использовании ПСС с ОПФ незначительно, и ошибка измерения угловых координат в этом случае практически совпадает с потенциальной точностью измерения этих координат. При нахождении помехи внутри основного лепестка ХН АР и сближении сигнала и помехи смещение оценки пеленга при использовании ПСС с ОПФ возрастает и приближается к половине ширины основного лепестка ХН АР по ее первым нулям (см. рис. 2).

На рис. 3 представлены для рассматриваемого примера графики зависимости квадрата суммарной среднеквадратичной ошибки (СКО) оценки пеленга при использовании ПСС с ОПФ  $\sigma_{1\Sigma OPF}^2(f_0, \hat{\alpha}_0)$  от углового расстояния  $\alpha_{01}$  между сигналом и помехой ( $\sigma_{1\Sigma OPF}^2(f_0, \hat{\alpha}_0) = \sigma_{1OPF}^2(f_0, \hat{\alpha}_0) + \Delta\alpha_{0OPF}^2(f_0)$ ). График квадрата суммарной СКО оценки пеленга при равенстве мощностей помехи и сигнала отображается на рис. 3 сплошной линией, при равенстве мощностей помехи и шума – штриховой линией, при этом значения  $\alpha_{01}$  нормируются на угол  $\Delta\alpha_R(f_0)/2$ , а  $\sigma_{1\Sigma OPF}^2(f_0, \hat{\alpha}_0)$  – на дисперсию оценки пеленга одиночного сигнала  $\sigma_0^2(f_0, \hat{\alpha}_0)$ .

Из графиков рис. 3 следует, что при нахождении мешающего источника вне основного ле-

пестка ХН АР точность пеленгования при использовании ПСС с ОПФ практически не зависит от углового расстояния до мешающего источника, и метод реализует в этом случае фактически потенциальную точность пеленгования (зависимость потенциальной точности от  $\alpha_{01}$  изображена на рис. 1). При нахождении мешающего источника внутри основного лепестка ХН АР и его сближении с источником сигнала точность пеленгования при использовании ПСС с ОПФ существенно снижается относительно потенциальной точности в связи с возникновением смещения оценки пеленга (см. рис. 1 и 3).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, исследована потенциально достижимая точность измерения угловых координат точечного источника сигнала при наличии точечных мешающих источников, а также точность их измерения методом, основанным на формировании пространственного спектра сигнала с использованием оптимальной пространственной фильтрации. Для случая использования линейной эквидистантной антенной решетки получены аналитические выражения, определяющие зависимость рассматриваемых точностей измерения угловых координат от параметров антенны, углового расстояния до мешающего источника и спектральных плотностей мощности сигнала, шума и мешающего источника (выражения (11), (17) и (20)).

Показано, что при нахождении мешающего источника вне основного лепестка ХН АР использование ПСС с ОПФ реализует фактически потенциальную точность измерения угловых координат источника сигнала, при этом от углового расстояния между сигналом и помехой точность измерений практически не зависит. При нахождении мешающего источника внутри основного лепестка ХН АР и сближении помехи и сигнала точность оценки угловых координат источника сигнала при использовании ПСС с ОПФ снижается по сравнению с потенциальной точностью в

связи с возникновением смещения оценки угловых координат, при этом максимальное смещение достигает значения, практически равного половине ширины основного лепестка ХН АР.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Capon J. High resolution frequency wavenumber spectral analysis // Proc. IEEE. 1969. V. 57. P. 1408–1418.
2. Li J., Stoica P., Wang Z. On robust Capon beamforming and diagonal loading // IEEE Trans. Signal Processing. 2003. V. 51. P. 1702–1715.
3. Li J., Stoica P., Wang Z. Doubly constrained robust Capon beamformer // IEEE Trans. Signal Processing. 2004. V. 52. P. 2407–2423.
4. Wang Y., Li J., Stoica P. Rank-deficient robust Capon filter bank approach to complex spectral estimation // IEEE Trans. Signal Processing. 2005. V. 53. P. 2713–2726.
5. Малышкин Г.С., Шафранюк А.В. Адаптивное разрешение широкополосных гидроакустических сигналов с частично нарушенной когерентной структурой // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 5. С. 613–629.
6. Алексеев В.И., Гутельсон В.С., Глебова Г.М., Калёнов Е.Н., Тихонравов Б.Н. Точность определения параметров источников случайных акустических сигналов методом прямого разрешения // Акуст. журн. 1981. Т. 27. № 1. С. 30–35.
7. Аникин И.Ю., Грузликов А.М., Сидельников Г.Б. Алгоритм сверхразрешения источников узкополосных сигналов на основе решения системы уравнений наблюдения // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 1. С. 81–89.
8. Гуткин Л.С. Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах. М.: Сов. радио, 1972. 448 с.
9. Глазов Г.Н., Глазов Г.Н., Красненко Н.П. Потенциальная точность пеленгования антенными решетками // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1974. Т. 17. № 10. С. 46–52.
10. Гусев В.Г. Системы пространственно-временной обработки гидроакустической информации. Л.: Судостроение, 1988. 264 с.
11. Bangs W.J., Schultheiss P.M. Space time processing for optimal parameter estimation // Signal Processing. London, 1973. P. 577–590.