

**ПОГЛОЩЕНИЕ ИНТЕНСИВНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ И ШУМОВЫХ ВОЛН
В РЕЛАКСИРУЮЩИХ СРЕДАХ**

© 2014 г. О. В. Руденко^{1, 2, 3, 4, 5}, С. Н. Гурбатов¹, И. Ю. Демин¹

¹Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

E-mail: demin@rf.unn.ru, gurbatov@rf.unn.ru

²Физический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

E-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru

³Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН

⁴Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН

⁵Blekinge Institute of Technology, Karlskrona, Sweden

Поступила в редакцию 21.04.2014 г.

Выписано интегро-дифференциальное уравнение, содержащее члены, ответственные за нелинейное поглощение, вязко-теплопроводную диссипацию и релаксационные процессы в среде. Получено общее интегральное выражение для расчета потерь энергии волны с произвольными характеристиками – интенсивностью, профилем (частотным спектром) и ядром, описывающим внутреннюю динамику среды. Показано, что для слабых волн общий интеграл приводит к известным результатам линейного приближения. Построены профили стационарных решений как для экспоненциального релаксационного ядра, так и для других форм ядер. Рассчитаны потери энергии на фронте слабых ударных волн. Получены общие интегральные формулы для потерь энергии интенсивного шума, определяемых формой ядра, структурой корреляционной функции шума и средним от квадрата производной реализации случайного процесса.

Ключевые слова: нелинейность, интенсивный шум, интегро-дифференциальные уравнения, релаксация, ядро, поглощение, ударная волна.

DOI: 10.7868/S0320791914050116

ВВЕДЕНИЕ

Поглощение регулярных и шумовых волн большой интенсивности может происходить за счет нескольких физических механизмов. Это, прежде всего, обычные вязкость и теплопроводность среды; неравновесные релаксационные процессы, связанные с ее внутренней динамикой; нелинейные потери энергии на ударных фронтах, зависящие от интенсивности волны. Поглощение необходимо правильно описывать как для расчета поля и спектра волнового процесса, так и для оценки воздействия волны на среду, в частности, с целью ее нагревания, создания радиационных сил и акустических течений.

Основные механизмы поглощения описываются следующей моделью для плоских волн (см. обзорную статью [1] и приведенный в ней список литературы):

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} p \frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \int_0^\infty [K_1(\xi) + K_2(\xi)] p(t - \xi) d\xi \quad (1)$$

Ядро под интегралом (1) разделено здесь на два слагаемых:

$$K_1(\xi) = \frac{b}{c_0^3 \rho_0} \delta(\xi), \quad K_2(\xi) = \frac{m_0}{2c_0} K\left(\frac{\xi}{t_0}\right) \quad (2)$$

Первое, содержащее дельта-функцию, описывает “мгновенную” реакцию среды на акустическое воздействие, второе – запаздывающую реакцию, связанную с внутренней динамикой релаксационного типа. Подставляя (2) в (1), приходим к уравнению, которое будет служить основной моделью для рассматриваемых ниже процессов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{c_0^3 \rho_0} p \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{b}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} = \\ = \frac{m_0}{2c_0} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \int_0^\infty K\left(\frac{\xi}{t_0}\right) p(t - \xi) d\xi \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь p – акустическое давление, ε , b – нелинейный и диссипативный параметры среды, z – координата вдоль оси пучка, $\tau = t - z/c_0$ – время в системе координат, сопровождающей волну со скоростью звука c_0 . Параметры m_0 , t_0 – это “сила” и характерное время для релаксационного процесса, описываемого ядром K . Заметим, что модель (3) конкретизирует интегро-дифференци-

альные уравнения, предложенные для акустических задач в начале 1970-х годов [2, 3]. Интерес к таким моделям с точки зрения математической физики заметно вырос в последние годы (см., например, [4] и комментарии в работе [1]). Решен ряд статистических задач, в которых рассмотрены поля интенсивного шума [5, 6]. Эти задачи важны, например, для приложений к расчету полей в мягких биологических тканях [7, 8].

ПОГЛОЩЕНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ ВОЛН

Чтобы рассчитать изменение энергии бегущей волны, умножим уравнение (3) на $2p$ и проинтегрируем его в бесконечных пределах по переменной τ . Если сигнал периодический, достаточно провести усреднение по периоду. В результате получим

$$\frac{\partial \overline{p^2}}{\partial z} - \frac{1}{c_0^3 \rho_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{2\varepsilon}{3} p^3 + bp \frac{\partial p}{\partial \tau} \right) = -\frac{b}{c_0^3 \rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{m_0}{c_0} \int_0^\infty K \left(\frac{\xi}{t_0} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \overline{p(\tau) p(\tau - \xi)} d\xi \quad (4)$$

Здесь черта сверху означает одну из двух указанных процедур: интегрирование либо усреднение. Второй член в левой части уравнения есть интеграл от производной. Поэтому он равен нулю, причем как для периодического сигнала, так и для импульса, исчезающего на бесконечности.

Обозначим $\overline{p^2} = E$; эта величина пропорциональна плотности энергии или интенсивности волны. Следовательно, изменение энергии с расстоянием z описывается формулой

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{b}{c_0^3 \rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{m_0}{c_0} \int_0^\infty K \left(\frac{\xi}{t_0} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \overline{p(\tau) p(\tau - \xi)} d\xi \quad (5)$$

Как показано в работе [1], выражение под интегралом равно

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \overline{p(\tau) p(\tau - \xi)} &= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\xi^{n-2}}{(n-2)!} \overline{p \frac{\partial^n p}{\partial \tau^n}} = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\xi^{2m-2}}{(2m-2)!} \left(\frac{\partial^m p}{\partial \tau^m} \right)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Поэтому

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{b}{c_0^3 \rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{m_0}{c_0} \sum_{m=1}^{\infty} A_m(z) \int_0^\infty \xi^{2m-2} K \left(\frac{\xi}{t_0} \right) d\xi \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_m(z) &= \frac{(-1)^m}{(2m-2)!} \left(\frac{\partial^m p}{\partial \tau^m} \right)^2, \quad A_1 = -\left(\frac{\partial p}{\partial \tau} \right)^2, \\ A_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} \right)^2, \quad A_3 = -\frac{1}{24} \left(\frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3} \right)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Зная решение $p(z, \tau)$, по формулам (5) или (7) можно рассчитать убыль энергии с расстоянием для заданного ядра K . В частности, для экспоненциального ядра $K = \exp(-\xi/t_0)$ и монохроматической волны $p = A(z) \sin(\omega\tau)$ получим очевидный результат

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial z} &= -\frac{b}{c_0^3 \rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{m_0}{c_0 t_0} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m t_0^{2m} \left(\frac{\partial^m p}{\partial \tau^m} \right)^2 = -\alpha E, \\ \alpha &= \frac{b\omega^2}{c_0^3 \rho_0} + \frac{m_0}{c_0 t_0} \frac{\omega^2 t_0^2}{1 + \omega^2 t_0^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Видно, что в линейном приближении волна затухает по экспоненциальному закону, причем коэффициент затухания α равен сумме коэффициентов, описывающих вязко-теплопроводные и релаксационные потери. Чтобы учесть также и нелинейные потери, нужно подставить в формулы (5) или (7) решение $p(z, \tau)$ нелинейной задачи.

Отметим, что тривиальным для уравнения (3) является закон сохранения количества движения (линейного момента) в процессе распространения волны: $\overline{p} = \text{const}$, который выводится аналогично интегралу (5).

Перейдем теперь к анализу нелинейных задач. Запишем уравнение (3) в безразмерном виде, чтобы упростить запись последующих формул, которые в исходных обозначениях были бы весьма громоздкими:

$$\frac{\partial V}{\partial Z} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = D \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \int_0^\infty K(s) V(\theta - s) ds. \quad (10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\varepsilon P_0 z}{c_0^3 \rho_0 t_0}, \quad \theta = \frac{\tau}{t_0}, \quad V = \frac{p}{P_0}, \\ \Gamma &= \frac{b}{2\varepsilon t_0 P_0}, \quad D = \frac{m_0 c_0^2 \rho_0}{2\varepsilon P_0}. \end{aligned} \quad (11)$$

Формула (5) в новых обозначениях примет следующий вид:

$$\frac{\partial \overline{V^2}}{\partial Z} = -2\Gamma \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right)^2 + 2D \int_0^\infty K(s) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \overline{V(\theta) V(\theta - s)} ds. \quad (12)$$

Решения нелинейных задач, описывающих форму ударного фронта, известны как для дельта-образного ядра (случай $\Gamma \neq 0, D = 0$):

$$V = A(Z) \text{th} \left(A(Z) \frac{\theta}{2\Gamma} \right), \quad (13)$$

так и для экспоненциального ядра (при значениях $\Gamma = 0, D \geq 1$):

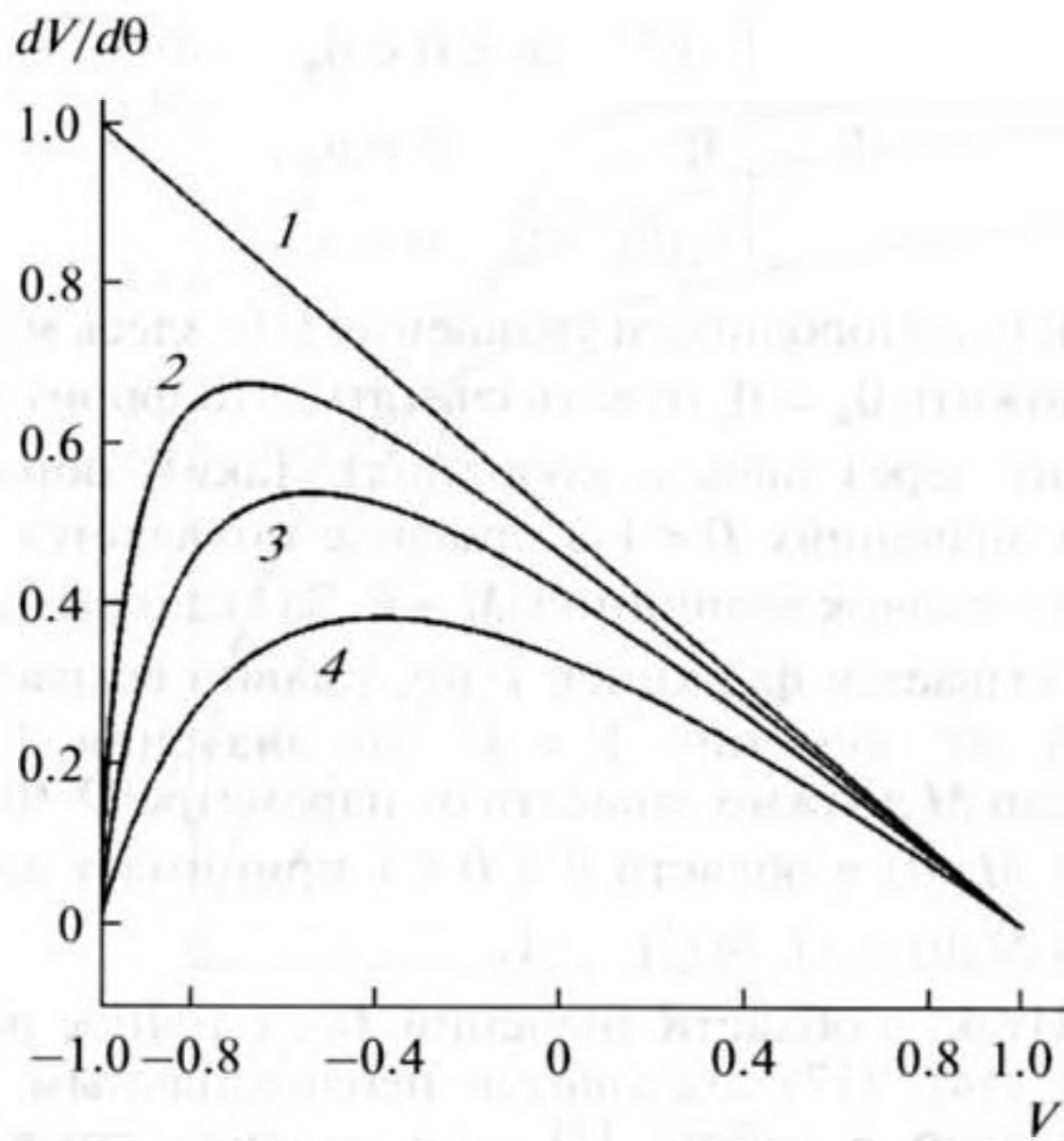


Рис. 1. Фазовая плоскость (14) для стационарной волны в релаксирующей среде для значений $D = 1; 1.08; 1.2; 1.5$ (кривые 1–4 соответственно).

$$\theta = \ln \left[1 + \frac{V}{A(Z)} \right]^{(D/A-1)} \left[1 - \frac{V}{A(Z)} \right]^{-(D/A-1)}, \quad (14)$$

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{A^2(Z) - V^2}{D + V}.$$

Заметим, что модель внутренней динамики, приводящая к экспоненциальной релаксации, была сформулирована Мандельштамом и Леонтовичем (см., например, [9]). Для решения нелинейных задач она впервые использована авторами работ [10, 11].

В формулах (13), (14) функция $A(Z)$ описывает изменение с расстоянием “амплитуды” (скачка на фронте) ударной волны. Эта функция зависит от формы профиля волны непосредственно перед фронтом и сразу за ним.

Для постоянного значения $A = 1$ фазовая плоскость $\dot{V}(V)$ изображена на рис. 1. Видно, что при $D \gg 1$ переход $V(\theta)$ от значения $V = -1$ до $V = +1$ должен быть симметричным относительно нулевого значения. При стремлении $D \rightarrow 1$ крутизна функции $V(\theta)$ растет в отрицательной области. Наконец, при $D = 1$ формируется крутой фронт – скачок от $V = -1$ до некоторого положительного значения. Максимум производной достигается в точке V_{\max} и равен \dot{V}_{\max} , где $V_{\max} = -D + \sqrt{D^2 - 1}$, $\dot{V}_{\max} = D - \sqrt{D^2 - 1}$.

Форма стационарной волны $V(\theta)$ и ее производной $\dot{V}(\theta)$, определяющей скорость диссипа-

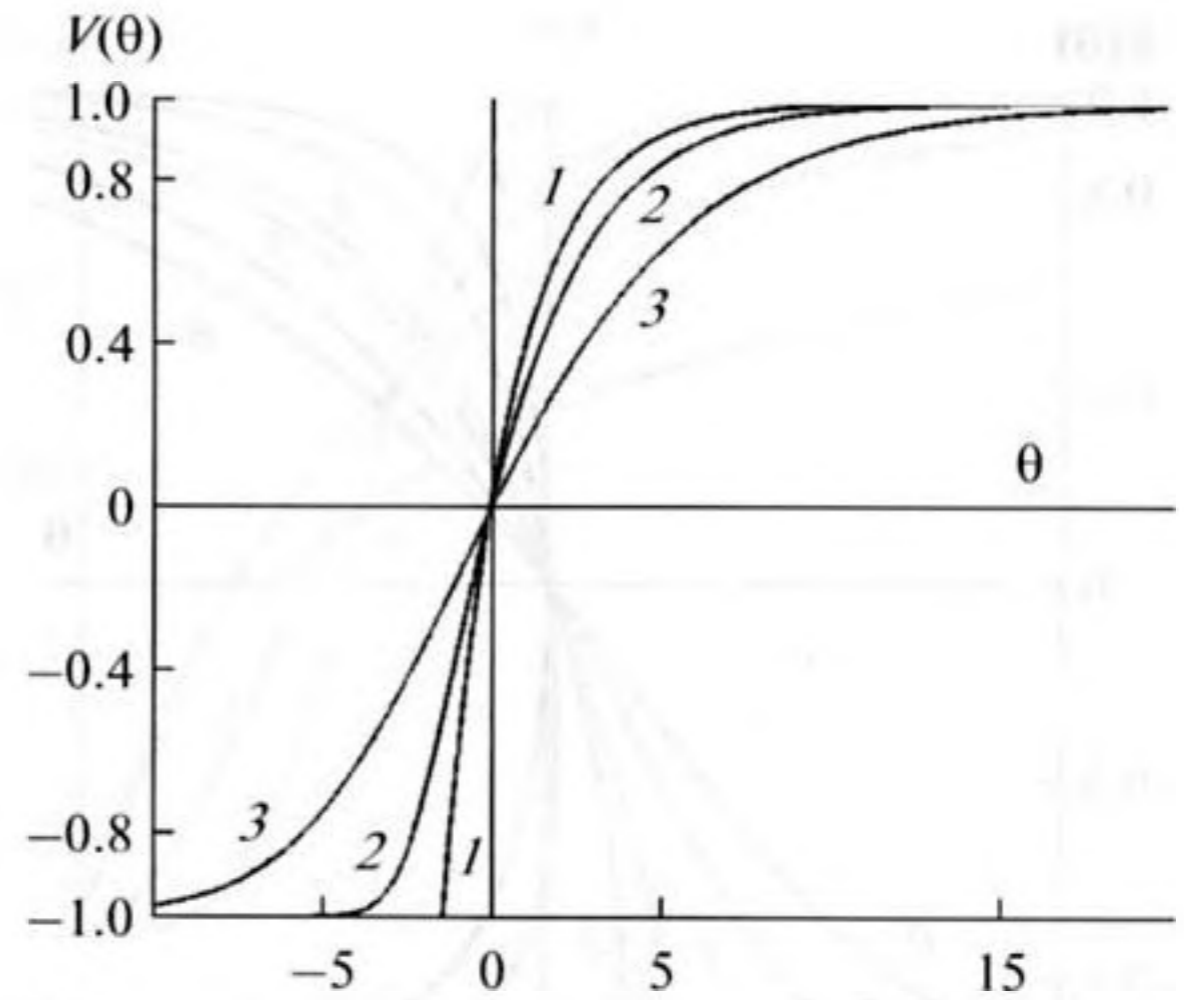


Рис. 2. Форма стационарной волны в релаксирующей среде для значений $D = 1; 1.5; 3$ (кривые 1–3 соответственно).

ции энергии, изображены на рис. 2 и 3. Подчеркнем еще раз, что здесь рассмотрен случай $D \geq 1$, когда форма волны, описываемая формулой (14), представляется однозначной функцией времени.

Простые формулы получаются при больших значениях числа D (это случай, когда релаксационные процессы доминируют над нелинейными). При этом решение (14) для $A = 1$ принимает вид

$$\frac{\theta}{D} = \ln \frac{1+V}{1-V}, \quad V = \text{th} \left(\frac{\theta}{2D} \right). \quad (15)$$

Это решение имеет вид симметричной “ступеньки”, как и стационарная волна для обычного

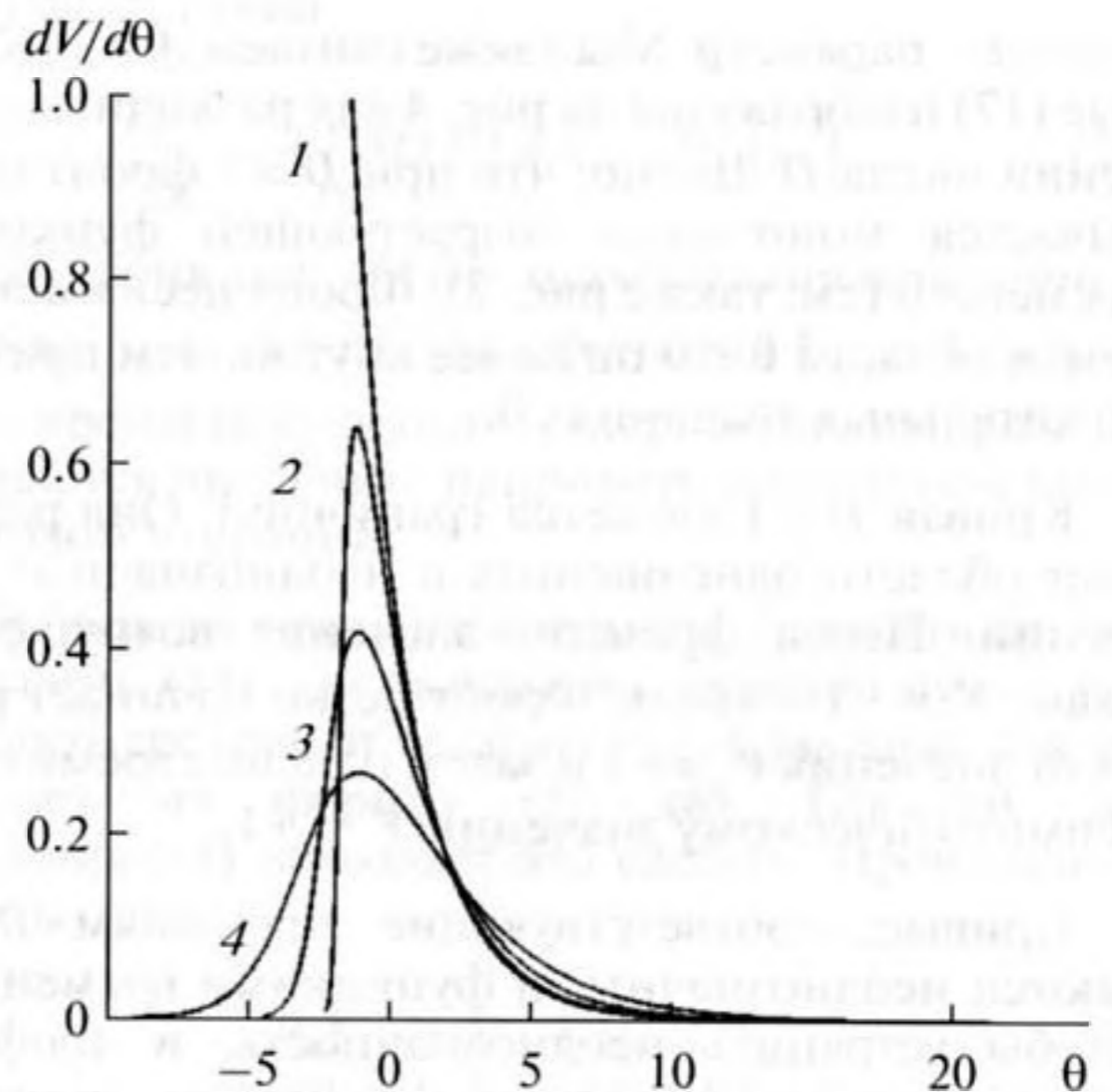


Рис. 3. Форма импульса ускорения на фронте ударной волны в релаксирующей среде для значений $D = 1; 1.1; 1.4; 2$ (кривые 1–4 соответственно).

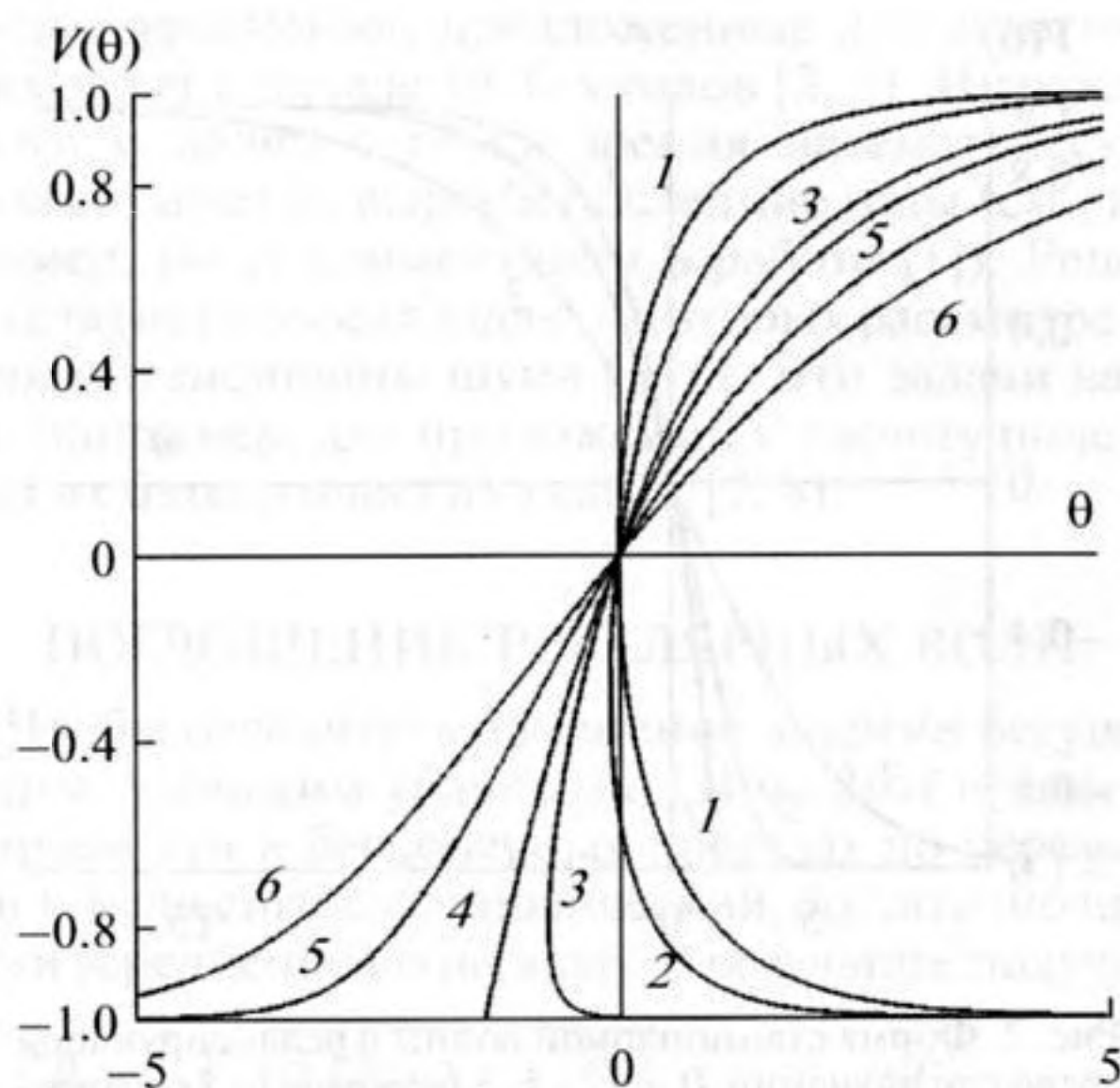


Рис. 4. Форма стационарной волны в релаксирующей среде для значений $D = 0.01; 0.3; 0.8; 1; 1.5; 2$ (кривые 1–6 соответственно).

уравнения Бюргера. Для предельного числа $D = 1$ получаем аналитическое представление кривой 1 на рис. 2:

$$V = \begin{cases} -1, & \theta < -2\ln 2, \\ 1 - \exp(-\theta/2), & \theta \geq -2\ln 2. \end{cases} \quad (16)$$

Неоднозначный профиль стационарной волны удобно строить, записав решение (14) в параметрической форме:

$$V = \text{th}(t), \quad \theta = 2Dt + \ln \text{ch}^2(t). \quad (17)$$

Здесь t — параметр. Мы также считаем $A = 1$. Кривые (17) изображены на рис. 4 для различных значений числа D . Видно, что при $D > 1$ фронт описывается монотонно возрастающей функцией времени θ (см. также рис. 2). Фронт несимметричен: в области $\theta < 0$ он более крутой, чем при положительных значениях θ .

Кривая $D = 1$ является граничной. Она разделяет области однозначных и неоднозначных решений. Перед фронтом значение возмущения равно $V = -1 = \text{const}$. Фронт резко начинает расти от значения $V = -1$ и затем плавно стремится к асимптотическому значению $V = +1$.

Кривые, соответствующие значениям $D < 1$, даются неоднозначными функциями времени θ . Чтобы устранить неоднозначность, в профиле нужно построить ударный фронт. Как видно из поведения кривых на рис. 4, после построения разрыва профиль стационарной волны описывается следующей функцией:

$$V = \begin{cases} -1, & -\infty < \theta < \theta_* \\ M, & \theta = \theta_*, \\ V_+(\theta), & \theta_* < \theta < \infty. \end{cases} \quad (18)$$

В силу однородности уравнения (10) здесь можно положить $\theta_* = 0$, то есть считать, что фронт проходит через начало координат. Таким образом, при значениях $D < 1$ в профиле появляется разрыв — скачок величиной $|M + 1|$. За скачком фронт описывается функцией $V_+(\theta)$, плавно возрастающей от значения $V = M$ до значения $V = 1$. Число M должно зависеть от параметра D . Функция $M(D)$ в области $0 \leq D \leq 1$ принимает значения $M(0) = +1$, $M(1) = -1$.

Итак, в области значений $D < 1$ точное решение (14), (17) становится неоднозначным. Как показано в работе [1], для анализа структуры фронта при малых числах $D \ll 1$, когда нелинейные искажения выражены сильно, можно использовать метод итераций. Этот метод применим для любой формы релаксационного ядра.

Запишем уравнение для стационарной волны, получающееся из (10) после приравнивания нулю производной по Z :

$$1 - V^2 = 2D \int_0^\infty K(s) \frac{dV(\theta - s)}{d\theta} ds. \quad (19)$$

В нулевом приближении по малым D из уравнения (19) находим $V^{(0)} = \text{sign}(\theta)$. Уравнение первого приближения будет таким:

$$1 - V^{(1)2} = 4D \int_0^\infty K(s) \delta(\theta - s) ds = \begin{cases} 0, & -\infty < \theta < 0, \\ 4DK(\theta), & 0 < \theta < \infty, \end{cases} \quad (20)$$

откуда следует

$$V^{(1)} = \begin{cases} -1, & -\infty < \theta < 0, \\ \sqrt{1 - 4DK(\theta)}, & 0 < \theta < \infty. \end{cases} \quad (21)$$

Видно, что при увеличении θ в точке $\theta = 0$ происходит скачок от значения $V = -1$ до значения $M = \sqrt{1 - 4D}$, после чего $V \rightarrow +1$. Таким образом, в первом приближении происходит уменьшение перепада на ударном фронте от значения 2 до значения $1 + M \approx 2(1 - D)$. Цепочку итераций можно продолжить, уточняя величину скачка (или значение константы $M(D)$) на фронте ударной волны, а также закон, по которому происходит релаксация среды после ударного воздействия на нее. Результаты расчета формы фронта в области $\theta > 0$ для различных ядер и различных чисел D изображены на рис. 5а, 5б. В области $\theta < 0$ для всех

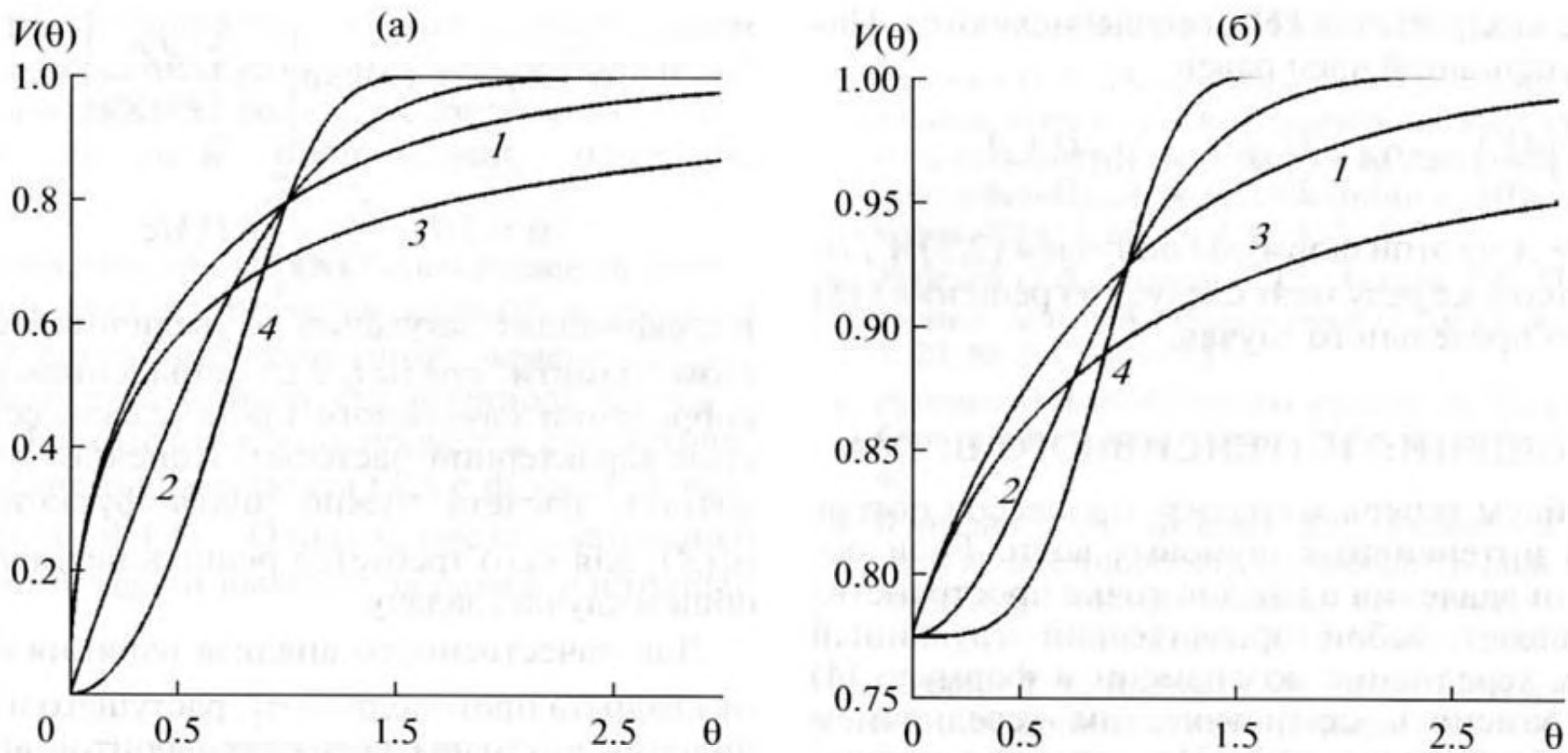


Рис. 5. (а) Формы фронта при $D = 0.25$ для различных ядер: $K(\theta) = \exp(-\theta)$ (кривая 1), $K(\theta) = \exp(-\theta^2)$ (кривая 2), $K(\theta) = 1/(1 + \theta)$ (кривая 3), $K(\theta) = \exp(-\theta^4)$ (кривая 4); (б) формы фронта при $D = 0.1$ для различных ядер: $K(\theta) = \exp(-\theta)$ (кривая 1), $K(\theta) = \exp(-\theta^2)$ (кривая 2), $K(\theta) = 1/(1 + \theta)$ (кривая 3), $K(\theta) = \exp(-\theta^4)$ (кривая 4).

кривых значение возмущения постоянно и равно $V = -1$.

Такие же итерации можно проделать при учете вязко-теплопроводных потерь:

$$1 - V^{(n)2} - 2\Gamma \frac{dV^{(n)}}{d\theta} = 2D \int_0^\infty K(s) \frac{dV^{(n-1)}}{d\theta} (\theta - s) ds. \quad (22)$$

В нулевом приближении по малым D из уравнения (22) находим $V^{(0)} = \text{th}(\theta/2\Gamma)$ — это формула (13) при постоянной “амплитуде” скачка $A(Z) = 1$.

Вернемся к анализу процесса убывания энергии волны, принимая теперь во внимание ее нелинейные искажения. Подставляя формулу (13) в интегральное соотношение (12), для сильно выраженной нелинейности (крутого ударного фронта) найдем

$$\frac{\partial V^2}{\partial Z} = -\frac{4}{3} A^3(Z) - 4DA^2(Z) f\left(\frac{A(Z)}{2\Gamma}\right). \quad (23)$$

Функция $f(y)$ зависит от вида ядра. Она имеет простой вид $f = \text{cth}(y) - y \text{sh}^{-2}(y)$ для ядра $K(s) = H(1 - s)$. Здесь H — единичная функция Хевисайда. Такое ядро равно единице при $0 < s < 1$ и нулю при $s > 1$. В этом случае среда “все помнит” до момента времени $t < t_0$, а затем, в момент $t = t_0$, мгновенно свою “память” теряет.

Первый член в формуле (23) пропорционален кубу амплитуды и при $\Gamma \ll 1$ не зависит от диссипативных параметров среды. Он описывает чисто нелинейное поглощение. Во втором члене при

$\Gamma \rightarrow 0$ имеем $f \rightarrow 1$, то есть зависимость от диссипативных параметров также исчезает и остается поправка только на релаксационное поглощение. Поправка является малой, поскольку симметричный скачок (13) реализуется в среде с релаксацией лишь в предельном случае $D \rightarrow 0$.

С учетом того факта, что при малых значениях D “амплитуда” разрыва равна $|M + 1|$ (см. (18), (21)), видим, что скорость уменьшения энергии на стационарном фронте ударной волны (23) будет равна

$$\frac{\partial V^2}{\partial Z} = -\frac{1}{6} |M(D) + 1|^3 - D\hat{L}(V_*). \quad (24)$$

Здесь функция $M(D)$, определяющая величину скачка, а также гладкая функция V_* , описывающая профиль за фронтом ударной волны, рассчитываются численно, например, описанным выше методом итераций.

В области применимости $D \geq 1$ стационарного решения (14) для расчета поглощения нужно вычислить средние от квадратов производных, как это следует из формул (7), (8). Простой вид решения (14) позволяет это сделать. Производные равны

$$\frac{d^2 V}{d\theta^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{D^2 - A^2}{(D + V)^2},$$

$$\frac{d^n V}{d\theta^n} = \frac{1}{2} (-1)^n (n - 1)! \frac{D^2 - A^2}{(D + V)^n}, \quad n \geq 3.$$

Средние квадраты также легко вычисляются. Например, основной член равен

$$\overline{\left(\frac{dV}{d\theta}\right)^2} = DA - \frac{1}{2}(D^2 - A^2) \ln \frac{D+A}{D-A}.$$

При $D \gg A$ из этой формулы получаем $(2/3)A^3/D$. Точно такой же результат следует из решения (15) для этого предельного случая.

ПОГЛОЩЕНИЕ ИНТЕНСИВНОГО ШУМА

Перейдем теперь к анализу процессов потерь энергии интенсивных шумовых волн. Если осцилляции давления в каждой точке пространства представляют собой эргодический случайный процесс, усреднение во времени в формуле (4) можно заменить статистическим усреднением по ансамблю реализаций. При этом соотношение (12) примет вид

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial Z} = -2\Gamma \sigma_1^2 + 2D \int_0^\infty K(s) \frac{\partial^2}{\partial s^2} R\left(Z, \frac{t_0}{t_c} s\right) ds. \quad (25)$$

Здесь t_c — время корреляции, R — корреляционная функция,

$$\sigma^2 = \langle V^2 \rangle = R(Z, 0), \quad \sigma_1^2 = \left\langle \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2 \right\rangle, \quad (26)$$

$$R\left(Z, \frac{t_0}{t_c} s\right) = \langle V(Z, \theta) V(Z, \theta - s) \rangle.$$

Угловыми скобками обозначена операция статистического усреднения.

Положим приближенно для малых значений st_0/t_c :

$$R\left(Z, \frac{t_0}{t_c} s\right) \approx \sigma^2(Z) \left[1 - s^2 \frac{t_0^2}{2t_c^2 F^2(Z)}\right]. \quad (27)$$

Здесь $F(Z)$ — безразмерная функция, описывающая изменение времени корреляции с ростом пройденного волной расстояния. Подставляя выражение (27) в формулу (25), найдем

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial Z} = -2\Gamma \sigma_1^2 - 2D \frac{t_0^2}{t_c^2 F^2(Z)} \int_0^\infty K(\xi) d\xi \sigma^2. \quad (28)$$

Отсюда следует, что средняя интенсивность σ^2 , пропорциональная плотности энергии волны в данном сечении Z нелинейной среды, убывает по закону, который зависит как от изменения с расстоянием средней крутизны профиля волны, так и от вида ядра для данного релаксационного процесса. Среднее от квадрата производной σ_1^2 растет из-за образования ударных фронтов, что приводит к усилению нелинейного затухания (первое слагаемое в правой части формулы (28)). Если рост средней крутизны невелик и преобладают процессы релаксации, из формулы (28) получим

$$\sigma^2(Z) = \sigma^2(0) \exp\left[-\alpha \int_0^Z \frac{dZ'}{F^2(Z')}\right], \quad (29)$$

$$\alpha = 2D \frac{t_0^2}{t_c^2 F^2(Z)} \int_0^\infty K(\xi) d\xi$$

Коэффициент затухания α увеличивается с ростом “памяти” среды t_0 и с уменьшением времени корреляции случайного процесса (то есть с ростом характерной частоты). Конечно, для более точного расчета нужно знать функции $F(Z)$, $\sigma_1^2(Z)$, для чего требуется решить нелинейную (в общем случае) задачу.

Для качественного анализа влияния среднего от квадрата производной σ_1^2 , растущего из-за увеличения крутизны передних фронтов вплоть до образования разрывов, рассмотрим простейшее нестационарное решение $V(Z, \theta)$ уравнения (10) при $D = \Gamma = 0$:

$$V = \Phi(t), \quad \theta = t - Z\Phi(t). \quad (30)$$

Используя (30), найдем

$$\overline{\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2} = \int \frac{\Phi'^2(t) dt}{1 - Z\Phi'(t)}. \quad (31)$$

Для квазигармонического исходного (при $Z = 0$) сигнала $\Phi = A \sin(\omega t_0 \theta)$ усреднение нужно проводить по периоду:

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2} &= \frac{A^2}{\pi} (\omega t_0)^2 \int_0^\pi \frac{\cos^2 \xi}{1 - \omega t_0 A Z \cos \xi} d\xi = \\ &= \frac{(\omega t_0)^2 A^2}{\sqrt{1 - (\omega t_0 A Z)^2}} \frac{(1 - \sqrt{1 - (\omega t_0 A Z)^2})}{(\omega t_0 A Z)^2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Видно, что среднее (за период) от квадрата производной растет от исходного (при $Z = 0$) значения $(\omega t_0 A)^2/2$ до бесконечности (при $(\omega t_0 A Z) \rightarrow 1$). Соответственно, усиливается и нелинейное затухание. Однако вязко-теплопроводная диссипация сглаживает ударный фронт, ширина которого оказывается конечной. В результате, как следует из (23), среднее от квадрата производной ограничивается на уровне $2A^3/3\Gamma$.

Нетрудно вывести функцию плотности вероятности для нелинейного процесса, описываемого решением (30). Предполагая, что исходный (при $Z = 0$) процесс, например, гауссов с дисперсией σ_{10} , в сечении среды $0 < Z < 1$ получим:

$$W(\dot{V}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{10}^2}} \frac{1}{(1 + Z\dot{V})^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{10}^2} \frac{\dot{V}^2}{(1 + Z\dot{V})^2}\right]. \quad (33)$$

Видно, что вероятность положительных значений производной растет с увеличением пройденного

волной расстояния, что связано с увеличением крутизны передних фронтов вплоть до появления разрывов в профиле волны. Вероятность отрицательных значений производной, напротив, уменьшается.

Заметим, что для корректного решения статистической задачи требуется считать амплитуду волны A случайной величиной, изменяющейся при переходе от одного квазипериода волны к другому. При этом нужно провести статистическое усреднение результата (32) с функцией распределения $W(A)$. Однако последовательный анализ этой задачи выходит за рамки настоящей заметки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучено поглощение регулярных и шумовых волн большой интенсивности при их распространении в среде, происходящее за счет трех физических механизмов. Это — обычные вязкость и теплопроводность среды, неравновесные релаксационные процессы, нелинейные потери энергии на ударных фронтах. Предложена конкретная математическая модель на основе нелинейного интегро-дифференциального уравнения. Путем его усреднения получены интегральные формулы для расчета потерь энергии.

Работа выполнена по гранту Правительства РФ для исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в учреждениях высшего образования (Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, договор № 11.G34.31.0066). Она частично поддержана также грантами Президиума РАН, РФФИ и Президентскими грантами Ведущих научных школ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руденко О.В. Нелинейные интегро-дифференциальные модели для интенсивных волн в средах типа биотканей и геоструктур со сложной внутренней динамикой релаксационного типа // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 4. С. 452–462.
2. Руденко О.В., Солуян С.И., Хохлов Р.В. Проблемы теории нелинейной акустики // Акуст. журн. 1974. Т. 20. № 3. С. 449–457.
3. Руденко О.В. К 40-летию уравнения Хохлова–Заболотской // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 4. С. 452–462.
4. Ibragimov N.H., Meleshko S.V., Rudenko O.V. Group analysis of evolutionary integro-differential equations describing nonlinear waves: the general model // J. Phys. A: Math. Theor. 2011. V. 44. 315201.
5. Gurbatov S.N., Rudenko O.V. Integro-differential equations in nonlinear wave physics. Part 1. Dynamics. Part 2. Statistics / Proc. 5th Int. Conf. "Frontiers of Nonlinear Physics", N. Novgorod, Russia, IAP RAS. 2013. P. 56–64.
6. Demin I.Yu., Gurbatov S.N., Pronchatov-Rubtsov N.V., Rudenko O.V., Krainov A. The numerical simulation of propagation of intensive acoustic noise // POMA. Proc. Meetings on Acoust. 2013. V. 19. 045075. doi: 10.1121/1.4800940
7. Руденко О.В., Гурбатов С.Н. Распространение шумовых сигналов в мягких биологических тканях // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 2. С. 275–277.
8. Руденко О.В., Гурбатов С.Н., Демин И.Ю. Нелинейные шумовые волны в мягких биологических тканях // Акуст. журн. 2013. V. 59. № 5. P. 630–635.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
10. Полякова А.Л., Солуян С.И., Хохлов Р.В. К вопросу о распространении конечных возмущений в релаксирующей среде // Акуст. журн. 1962. Т. 8. № 1. С. 107–112.
11. Солуян С.И., Хохлов Р.В. Акустические волны конечной амплитуды в среде с релаксацией // Акуст. журн. 1962. Т. 8. № 2. С. 220–227.