

## ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СКОРОСТИ ЗВУКА И ПОГЛОЩЕНИЯ В МЯГКИХ БИОТКАНЯХ ПО МОДЕЛЬНЫМ ДАННЫМ УЛЬТРАЗВУКОВОГО ТОМОГРАФИРОВАНИЯ

© 2014 г. В. А. Буров, Д. И. Зотов, О. Д. Румянцева

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Физический факультет, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы

Тел.: (495) 939-3081; факс: (495) 932-8820

E-mail: burov@phys.msu.ru

Поступила в редакцию 20.01.2014 г.

Для восстановления пространственных распределений акустических характеристик мягких биологических тканей — скорости звука и коэффициента поглощения — используется двухшаговый алгоритм. Знание этих распределений актуально для целей ранней диагностики доброкачественных и злокачественных новообразований в биотканях, прежде всего, — в молочной железе. На первом шаге оцениваются крупномасштабные распределения, которые на втором шаге уточняются с высоким разрешением. Представляются результаты восстановления на основе модельных исходных данных. Иллюстрируется принципиальная необходимость предварительного восстановления крупномасштабных распределений и последующего учета их на втором шаге. Привлечение для обработки технологии CUDA позволяет получать итоговые изображения форматом  $1024 \times 1024$  отсчетов всего за несколько минут.

*Ключевые слова:* акустическая томография, пространственные распределения скорости звука и коэффициента поглощения, крупномасштабные неоднородности, тонкая структура.

DOI: 10.7868/S0320791914040029

### ВВЕДЕНИЕ

Работа направлена на развитие методов ультразвуковой томографии, предназначенных для восстановления пространственных распределений акустических характеристик мягких биологических тканей — скорости звука и коэффициента поглощения в них. Знание этих характеристик актуально для целей ранней диагностики доброкачественных и злокачественных новообразований в биотканях и, прежде всего, — в молочной железе. Для получения экспериментальных данных от исследуемого объекта, т.е. рассеивателя (биоткани, в медицинских приложениях), используется двумерная круговая томографическая схема, в которой приемопередатчики преобразователи располагаются на окружности, охватывающей томографируемый объект со всех сторон.

Поскольку в общем случае объект сильно искажает зондирующее его поле, то при обработке экспериментальных данных необходимо принимать во внимание процессы многократного рассеяния волн внутри рассеивателя. Как следствие, алгоритмы, основанные на лучевом [1], первом борновском [2–8] или рытовском [2–6] приближениях, имеют весьма ограниченную область применимости в прикладных системах. Нелинейность зависимости экспериментальных данных (рассеянного поля) от характеристик рассеивателя, т.е.

нелинейность соотношений, описывающих процессы многократного рассеяния, означает необходимость использования более сложных процедур обработки данных. Наибольшей относительной простотой обладает рассматриваемый ниже двухшаговый алгоритм, позволяющий в ряде случаев получить приемлемые результаты после двух этапов, существенно различных по своему характеру. Строго говоря, двухшаговый алгоритм не является итерационным, так как он с самого начала предполагает выполнение всего одного цикла, в то время как итерационные процедуры предполагают неопределенное количество циклов постепенного приближения к решению. Своим возникновением двухшаговый подход обязан специфике задач медицинской томографии, при которой неоднородности в фазовой скорости звука и большие размеры областей с такими неоднородностями вызывают сильное искажение волновых фронтов в ткани. Это, в свою очередь, приводит к невозможности прямого применения линеаризованного борновского приближения. Тем не менее, двухшаговый подход, используя пространственные особенности проблемы и за счет этого как бы предельно упрощая многократное повторение итерационного цикла, с одной стороны, содержит много общего с “классическими” итерационными методами, а с другой стороны, ис-

пользует на своем втором шаге линеаризованное приближение, однако на неоднородном фоне.

Предположим, что рассматривается достаточно типичная ситуация, когда нужно восстановить рассеиватель, состоящий из мелких характерных деталей объекта (тонкой структуры), которые присутствуют на фоне крупномасштабных неизвестных неоднородностей фазовой скорости и коэффициента поглощения. Мелкие детали имеют линейный размер от нескольких десятых долей длины волны, лежащей в миллиметровом диапазоне, до нескольких длин волн; размер крупномасштабных неоднородностей составляет несколько длин волн и более. Полная оценка всего рассеивателя, содержащего как крупные фрагменты, так и мелкие детали с “борновским” контрастом, может быть осуществлена на основе идеи использования борновского алгоритма, но с учетом неоднородности фона [9, 10], предварительно оцениваемого на основе экспериментальных данных. В [11] работоспособность двухшагового алгоритма была подтверждена численным моделированием. Обсуждаемые ниже численные примеры по восстановлению крупномасштабных неоднородностей и тонкой структуры объекта служат дальнейшей иллюстрацией возможностей двухшагового алгоритма. Используемая двумерная томографическая схема соответствует конструкции опытного образца линейного ультразвукового медицинского томографа [12], действующего по принципу линейного (т.е. без изменения частоты) рассеяния волн. Квазиточечные преобразователи расположены на антенном кольце радиуса  $R_0$ ; томографируемый объект находится внутри этого кольца. Каждый из преобразователей может выступать в роли как излучателя, так и приемника.

### ДВУХШАГОВЫЙ АЛГОРИТМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СКОРОСТИ ЗВУКА И ПОГЛОЩЕНИЯ

На первом шаге предполагается восстановление распределения по объекту крупномасштабных неоднородностей – областей со значительными отклонениями по скорости звука  $c(\mathbf{r})$  или амплитудному коэффициенту поглощения  $\alpha(\mathbf{r}, \omega)$  от постоянных значений  $c_0$  и  $\alpha_0$ , которые предварительно определяются в фоновой среде без объекта, например, по методике [13]. Для восстановления используется процедура, которая далее условно будет называться “квази рентгеновским” алгоритмом [11, 14, 15], поскольку восстановление осуществляется в приближении *прямолинейного* распространения акустических сигналов через объект, т.е. эффекты рефракции не учитываются. Ниже кратко упоминаются только основные моменты этой процедуры.

Экспериментальные данные  $\mathcal{D}_{RS}$  измеряются для различных пар “излучатель (индекс  $S$ )–при-

емник (индекс  $R$ )”; геометрические положения излучателя и приемника в полярной системе координат с началом в центре антенного кольца задаются радиус-векторами  $\mathbf{r}_S = \{R_0, \varphi_S^0\}$  и  $\mathbf{r}_R = \{R_0, \varphi_R^0\}$  соответственно. Восстановление крупномасштабных распределений медленности  $1/c_0(\mathbf{r})$  и амплитудного коэффициента поглощения  $\alpha_0(\mathbf{r}, \omega)$  происходит по одному и тому же алгоритму времяпролетного типа на основе экспериментальных данных  $\mathcal{D}_{RS}$ . Для оценки пространственного распределения медленности полагается  $\mathcal{D}_{RS} \equiv t_{RS} - t_{RS}^0$ , где  $t_{RS}$  и  $t_{RS}^0$  – времена распространения сигналов от излучателя  $S$  до приемника  $R$  в присутствии объекта и без него соответственно. При этом в каждой фиксированной точке  $\mathbf{r}$  восстанавливается функция  $\mathfrak{Z}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c_0(\mathbf{r})} - \frac{1}{c_0}$ .

Для оценки пространственного распределения поглощения полагается  $\mathcal{D}_{RS} \equiv -\ln(A_{RS}/A_{RS}^0)$ , где  $A_{RS}$ ,  $A_{RS}^0$  – эффективные амплитуды сигналов, приходящих на приемник  $R$  от излучателя  $S$ , в присутствии объекта и без него. Значения  $\mathcal{D}_{RS}$  характеризуют степень дополнительного затухания волны относительно ослабления за счет расходимости волнового фронта; в этом случае  $\mathfrak{Z}(\mathbf{r}) = \alpha_0(\mathbf{r}, \omega) - \alpha_0(\omega)$ . Если сигнал при обработке не раскладывается на монохроматические составляющие, то вместо частотно-зависимых коэффициентов поглощения  $\alpha_0(\mathbf{r}, \omega)$  и  $\alpha_0(\omega)$  будут фигурировать их значения, усредненные по  $\omega$  в рабочем частотном диапазоне с шириной  $\Delta\omega$ , т.е.  $\overline{\alpha_0(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}$  и  $\overline{\alpha_0}^{\Delta\omega}$ ; тогда  $\mathfrak{Z}(\mathbf{r}) = \overline{\alpha_0(\mathbf{r})}^{\Delta\omega} - \overline{\alpha_0}^{\Delta\omega}$ .

Восстановление распределения  $\mathfrak{Z}(\mathbf{r})$  в каждой фиксированной точке  $\mathbf{r} = \{x, y\}$  (в декартовых координатах) по известным значениям  $\mathcal{D}_{RS} \equiv \mathcal{D}(\varphi_S^0, \varphi_R^0)$  осуществляется из соотношения

$$\mathfrak{Z}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} g(\mathbf{r}, \varphi_S^0) \frac{1}{H^2(\mathbf{r}, \varphi_S^0)} d\varphi_S^0, \tag{1}$$

где

$$g(\mathbf{r}, \varphi_S^0) = \lim_{\delta_1, \delta_2 \rightarrow +0} \left[ -\frac{R_0}{2} \left( \int_0^{\varphi_R^{\text{excl}} - 2\delta_1} + \int_{\varphi_R^{\text{excl}} + 2\delta_2}^{2\pi} \right) \times \right. \\ \times \frac{\left| \sin\left(\frac{\varphi_R^0 - \varphi_S^0}{2}\right) \right|}{\cos^2\left(\frac{\varphi_R^0 - \varphi_S^0}{2} - \gamma\right)} \mathcal{D}(\varphi_S^0, \varphi_R^0) d\varphi_R^0 + \\ \left. + R_0 \left( \frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} \right) (\cos \gamma) \mathcal{D}(\varphi_S^0, \varphi_R^{\text{excl}}) \right]; \tag{2}$$

$$H^2(\mathbf{r}, \varphi_S^0) = R_0^2 + x^2 + y^2 - 2R_0(x \cos \varphi_S^0 + y \sin \varphi_S^0), \quad \mathbf{r} = \{x, y\};$$

$$\gamma = \gamma(\mathbf{r}, \varphi_S^0) = \arctg \left[ \frac{x \sin \varphi_S^0 - y \cos \varphi_S^0}{R_0 - (x \cos \varphi_S^0 + y \sin \varphi_S^0)} \right],$$

$$\gamma \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]; \varphi_R^{\text{excl}} = (\varphi_S^0 + 2\gamma + \pi)_{\text{mod } 2\pi}, \varphi_R^{\text{excl}} \in [0, 2\pi).$$

Смысл величин, входящих в (1), (2), заключается в следующем. Величина  $H$  – расстояние между излучателем  $S$  и точкой  $\mathbf{r}$ ;  $\gamma$  – угол между направлениями из точки  $S$  на начало координат  $O$  и на точку  $\mathbf{r}$ . Особый угол  $\varphi_R^{\text{excl}}$  соответствует такому положению приемника  $R^{\text{excl}}$ , при котором хорда, соединяющая точки  $S$  и  $R^{\text{excl}}$ , проходит через точку  $\mathbf{r}$ . При расчете функции  $g(\mathbf{r}, \varphi_S^0)$ , согласно (2), выделяется малая окрестность (не обязательно симметричная)  $[\varphi_R^{\text{excl}} - 2\delta_1; \varphi_R^{\text{excl}} + 2\delta_2]$  особого угла, поскольку подынтегральное выражение в точке  $\varphi_R^0 = \varphi_R^{\text{excl}}$  имеет особенность. Однако результат вычислений функции  $g(\mathbf{r}, \varphi_S^0)$  не зависит от выбираемых малых значений  $\delta_1 > 0$  и  $\delta_2 > 0$ .

Смысл процедуры *второго шага* описан в [11, 16]. В основе лежит известный принцип восстановления слабых рассеивателей (т.е. рассеивателей, слабо искажающих падающее на них поле), однако на уже известном неоднородном фоне. Такой фон задается найденными из первого шага крупномасштабными распределениями  $c_0(\mathbf{r})$  и  $\overline{\alpha_0(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}$ . Ниже будут отмечены основные моменты этой процедуры и особенности ее технической реализации в упомянутом опытном образце ультразвукового томографа.

В двумерном случае падающее на рассеиватель поле  $u_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_S, t)$  представляет собой цилиндрическую волну с амплитудным спектром  $A(\omega)$ . Это падающее поле при  $|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}| > 1.5\lambda_{\text{max}}$  ( $\lambda_{\text{max}}$  – максимальная рабочая длина волны) имеет вид

$$u_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_S, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{|\mathbf{r}_S|}}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_S|}} \times \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \exp\left(-i\omega t + i\frac{\omega}{c_0}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_S|\right) d\omega, \quad \mathbf{r} \in \mathfrak{R}.$$

Тонкая структура рассеивателя, присутствующая на неоднородном фоне, описывается функцией  $V(\mathbf{r})$ :

$$V(\mathbf{r}) = \left( \frac{c_0^2}{c_0^2(\mathbf{r})} - \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{r})} \right) \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega, t_0) d\omega + c_0^2 \sqrt{\rho(\mathbf{r})} \times \\ \times \nabla^2 \left( \frac{1}{\sqrt{\rho(\mathbf{r})}} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\omega, t_0)}{\omega^2} d\omega - 2c_0^2 i \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\alpha(\mathbf{r}, |\omega|)}{c(\mathbf{r})} - \frac{\alpha_0(\mathbf{r}, |\omega|)}{c_0(\mathbf{r})} \right) \frac{B(\omega, t_0)}{\omega} d\omega, \quad (3)$$

где в двумерном случае

$$B(\omega, t_0) = \frac{A(\omega)(1 + i \text{sign} \omega)}{2\pi \sqrt{|\omega|}} \exp(-i\omega t_0). \quad (4)$$

Способ выбора постоянного значения  $t_0$  оговаривается ниже, после выражений (8), (9). Выражение (3) можно переписать как

$$V(\mathbf{r}) \approx \left( \frac{c_0^2}{c_0^2(\mathbf{r})} - \frac{c_0^2}{c^2(\mathbf{r})} \right) M_c + c_0^2 \sqrt{\rho(\mathbf{r})} \nabla^2 \left( \frac{1}{\sqrt{\rho(\mathbf{r})}} \right) M_p + \\ + c_0^2 \left( \frac{\overline{\alpha(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}}{c(\mathbf{r})} - \frac{\overline{\alpha_0(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}}{c_0(\mathbf{r})} \right) M_\alpha. \quad (5)$$

Здесь  $M_c$ ,  $M_p$ ,  $M_\alpha$  – размерные числовые комплексные коэффициенты, зависящие только от частотного спектра зондирующих сигналов:

$$M_c = \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega, t_0) d\omega; \quad M_p = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\omega, t_0)}{\omega^2} d\omega; \\ M_\alpha = -2i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\omega, t_0)}{\omega} d\omega, \quad (6)$$

причем данное выражение для  $M_\alpha$  приведено в приближении

$$-2c_0^2 i \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\alpha(\mathbf{r}, |\omega|)}{c(\mathbf{r})} - \frac{\alpha_0(\mathbf{r}, |\omega|)}{c_0(\mathbf{r})} \right) \frac{B(\omega, t_0)}{\omega} d\omega \approx \\ \approx c_0^2 \left( \frac{\overline{\alpha(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}}{c(\mathbf{r})} - \frac{\overline{\alpha_0(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}}{c_0(\mathbf{r})} \right) M_\alpha.$$

Более точно коэффициент  $M_\alpha$  можно вычислить, если представить коэффициент поглощения в

виде  $\alpha(\mathbf{r}, \omega) = \left( \frac{|\omega|}{\omega_0} \right)^\zeta \alpha(\mathbf{r}, \omega_0) = \left( \frac{|\omega|}{\omega_0} \right)^{\zeta_0 + \Delta\zeta} \alpha(\mathbf{r}, \omega_0)$ , где  $\zeta$  – истинный показатель степени частотной зависимости коэффициента поглощения;  $\zeta_0$  – априори задаваемый показатель степени частотной зависимости коэффициента поглощения, наиболее близкий к ожидаемому значению;  $\Delta\zeta \equiv \zeta - \zeta_0$ ;  $\omega_0 > 0$  – характерное (например, среднее) значение частоты в рабочем диапазоне. Тогда

$$-2c_0^2 i \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\alpha(\mathbf{r}, |\omega|)}{c(\mathbf{r})} - \frac{\alpha_0(\mathbf{r}, |\omega|)}{c_0(\mathbf{r})} \right) \frac{B(\omega, t_0)}{\omega} d\omega =$$

$$= c_0^2 \left( \frac{\alpha(\mathbf{r}, \omega_0)}{c(\mathbf{r})} - \frac{\alpha_0(\mathbf{r}, \omega_0)}{c_0(\mathbf{r})} \right) M_\alpha,$$

где  $M_\alpha = -2i \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{|\omega|}{\omega_0} \right)^\zeta \frac{B(\omega, t_0)}{\omega} d\omega \approx -2i \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{|\omega|}{\omega_0} \right)^{\zeta_0} \times \frac{B(\omega, t_0)}{\omega} d\omega$ . Однако на практике показатель степени  $\zeta$ , как правило, неизвестен, и кроме того, значение  $\zeta$  зависит от точки  $\mathbf{r}$  внутри томографируемого объекта. Поэтому определение распределения  $\zeta(\mathbf{r})$  или  $\Delta\zeta(\mathbf{r}) \equiv \zeta(\mathbf{r}) - \zeta_0$  представляет собой отдельную задачу, отчасти обсуждаемую в [17].

В выражениях (4)–(6) рассматриваются частоты  $\omega$  только одного знака в силу использования комплексного аналитического представления обрабатываемых сигналов. При восстановлении функции рассеивателя  $V(\mathbf{r})$  в пределах размера ячейки разрешения (менее длины волны) в плоскости томографирования цилиндрические поля, излучаемые и принимаемые квазиточечными преобразователями, могут быть заменены эффективными плоскими волнами, поскольку преобразователи расположены на существенном (более 20 длин волн) удалении от томографируемого объекта. Оценка  $\hat{V}(\mathbf{r})$  функции  $V(\mathbf{r})$  строится на основе рассеянных полей  $u_{sc}^{bg}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t)$ , которые надо сформировать с учетом неоднородного фона:  $u_{sc}^{bg}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t) \equiv u(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t) - u_0^{bg}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t)$ . Здесь  $u(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t)$  – полное поле, экспериментально измеряемое в присутствии объекта приемником  $R$  при излучателе  $S$ ;  $u_0^{bg}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t)$  – падающее поле на неоднородном фоне. Поле  $u_0^{bg}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t)$  нуждается в предварительной оценке (методика оценки предполагается более подробно обсудить в отдельной публикации в связи с обработкой экспериментальных данных). Тогда

$$\hat{V}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi c}} \int_0^{2\pi} d\varphi_S(\mathbf{r}) \int_0^{2\pi} d\varphi_R(\mathbf{r}) |\sin\{\varphi_S(\mathbf{r}) - \varphi_R(\mathbf{r})\}| \times$$

$$\times \sqrt{|\mathbf{r}_R - \mathbf{r}|} \frac{\sqrt{|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|}}{\sqrt{|\mathbf{r}_S|}} Z(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}) u_{sc}^{bg}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t_{RS}(\mathbf{r}));$$

здесь использованы следующие обозначения:

$$t_{RS}(\mathbf{r}) = t_0 + \int_{\mathbf{r}_S \rightarrow \mathbf{r}} \frac{1}{c_0(\mathbf{r}') } dl_{r'} + \int_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_R} \frac{1}{c_0(\mathbf{r}') } dl_{r'}; \quad (8)$$

$$Z(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}) = \exp \left[ \int_{\mathbf{r}_S \rightarrow \mathbf{r}} \overline{\alpha_0(\mathbf{r}') }^{\Delta\omega} dl_{r'} + \int_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_R} \overline{\alpha_0(\mathbf{r}') }^{\Delta\omega} dl_{r'} \right]. \quad (9)$$

Углы  $\varphi_S(\mathbf{r})$  и  $\varphi_R(\mathbf{r})$  задают положение точечных излучателей и приемников (соответственно) в полярной системе координат с центром в текущей точке изображения  $\mathbf{r}$ ;  $\bar{c}$  – среднее по  $\mathbf{r}$  значение фона  $c_0(\mathbf{r})$  в области томографирования. Интегрирование  $\int_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}} (\bullet) dl_{r'}$  в (8), (9) осуществляется вдоль оси  $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}$  лучевой трубки, соединяющей соответствующие точки с радиус-векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  в неоднородной фоновой среде;  $dl_{r'}$  – длина элемента траектории в окрестности точки  $\mathbf{r}'$ . Тем самым, значение  $\{\varphi_S(\mathbf{r}) - \varphi_R(\mathbf{r})\}$  в (7) равно угловому расстоянию между направлениями из точки  $\mathbf{r}$  на излучатель и на приемник. Фигурирующий в (7) момент времени  $t_{RS}(\mathbf{r})$  зависит, согласно (8), от времени распространения сигнала от излучателя  $S$  до точки  $\mathbf{r}$  и от точки  $\mathbf{r}$  до приемника  $R$ . Постоянное значение  $t_0$  выбирается таким образом, чтобы при фиксированных  $\mathbf{r}_R$  и  $\mathbf{r}_S$  обеспечить сфазированные значения  $u_{sc}^{bg}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t_{RS}(\mathbf{r}))$ , близкие по абсолютной величине к максимальным. Тем самым, значение  $t_0$  ориентировочно можно выбрать из условия  $\left| \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega, t_0) d\omega \right| \approx \max_t \left| \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega, t) d\omega \right|$ , близкого к моменту времени, в который достигается максимум исходного сигнала в точке  $\mathbf{z}$ , совпадающей с точкой излучения:  $|u_0(\mathbf{z} = \mathbf{r}_S, \mathbf{r}_S, t = t_0)| \approx \max_t |u_0(\mathbf{z} = \mathbf{r}_S, \mathbf{r}_S, t)|$ . Выбор (8) нужного момента  $t_{RS}(\mathbf{r})$  означает фазировку рассеянного сигнала  $u_{sc}^{bg}$  в точку  $\mathbf{r}$  с учетом неоднородности фоновых значений  $c_0(\mathbf{r})$ . Функциональный весовой множитель  $Z(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r})$ , присутствующий в (7) и приведенный в (9), компенсирует ослабление амплитуды сигнала за счет поглощения в неоднородной фоновой среде.

Значение  $u_{sc}^{bg}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t_{RS}(\mathbf{r}))$  при фиксированных  $\mathbf{r}_R$  и  $\mathbf{r}_S$  получается интерполяцией значений  $u_{sc}^{bg}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t_j)$ , известных для дискретных моментов времени  $\{t_j\}$ , с помощью интерполяционных выражений, приведенных в [16]. Так,

$$u_{sc}^{bg}(t) \equiv u_{sc}^{env}(t) \exp(-i\omega_0 t),$$

где

$$u_{sc}^{env}(t) = |u_{sc}^{env}(t)| \exp[i \arg u_{sc}^{env}(t)],$$

$$\arg u_{sc}^{bg}(t) = \arg u_{sc}^{env}(t) - \omega_0 t.$$

Здесь  $u_{sc}^{env}(t)$  – комплексная огибающая сигнала  $u_{sc}^{bg}(t)$  при несущей частоте  $\omega_0$  (фиксированные аргументы  $\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S$  опускаются). Функции аргумента и модуля интерполируются на момент времени  $t_{RS}(\mathbf{r})$ :

$$\arg u_{sc}^{bg}(t_{RS}) \approx \arg u_{sc}^{env}(t_j) - \omega_0 t_{RS} + \beta \frac{t_{RS} - t_j}{\tau};$$

$$\begin{aligned} |u_{sc}^{bg}(t_{RS})| &= |u_{sc}^{env}(t_{RS})| \approx \\ &\approx |u_{sc}^{env}(t_j)| \frac{t_{j+1} - t_{RS}}{\tau} + |u_{sc}^{env}(t_{j+1})| \frac{t_{RS} - t_j}{\tau}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \arg u_{sc}^{env}(t_j), \arg u_{sc}^{env}(t_{j+1}) &\in [-\pi, \pi); \\ t_j \leq t_{RS} \leq t_{j+1}; t_{j+1} - t_j &\equiv \tau; \end{aligned}$$

$$a = \left| \arg u_{sc}^{env}(t_{j+1}) - \arg u_{sc}^{env}(t_j) \right|_{\text{mod } 2\pi}, \beta = \min(a; 2\pi - a);$$

$$\Phi_j = \arg u_{sc}^{env}(t_j) - \omega_0 t_{RS}, \Phi_{j+1} = \arg u_{sc}^{env}(t_{j+1}) - \omega_0 t_{RS},$$

$$\tilde{\beta} = \{\beta, \Phi_{j+1} \geq \Phi_j; -\beta, \Phi_{j+1} \leq \Phi_j\} \text{ при } \beta = a;$$

$$\tilde{\beta} = \{\beta, \Phi_{j+1} \leq \Phi_j; -\beta, \Phi_{j+1} \geq \Phi_j\} \text{ при } \beta = 2\pi - a.$$

В итоге,  $u_{sc}^{bg}(t_{RS}) = |u_{sc}^{bg}(t_{RS})| \exp[i \arg u_{sc}^{bg}(t_{RS})]$ .

Геометрическое положение излучателей и приемников в полярной системе координат с центром в начале координат  $O$  характеризуется радиус-векторами  $\mathbf{r}_S = \{|\mathbf{r}_S|, \varphi_S^0\}$ ,  $\mathbf{r}_R = \{|\mathbf{r}_R|, \varphi_R^0\}$  соответственно. Присутствующие в (7) дифференциалы  $d\varphi_S(\mathbf{r})$  и  $d\varphi_R(\mathbf{r})$ , а также геометрические коэффициенты, зависящие от углов  $\varphi_S(\mathbf{r})$  и  $\varphi_R(\mathbf{r})$ , выражаются через  $\varphi_S^0$ ,  $\varphi_R^0$ . Для дальнейших вычислений целесообразно привести вид, который приобретает выражение (7) в случае равномерного расположения  $N_0$  приемоизлучающих преобразователей на окружности радиуса  $|\mathbf{r}_S| = |\mathbf{r}_R| \equiv R_0$  с угловым шагом  $\Delta\varphi_S^0 = \Delta\varphi_R^0 \equiv \Delta\varphi_0$ , где  $\Delta\varphi_0 = 2\pi/N_0$ . При численной реализации выражения (7), в соответствии с дискретными значениями угловых позиций приемоизлучающих преобразователей, простая замена интеграла на сумму подынтегральных дискретизованных выражений не всегда приводит к адекватному результату; поэтому надо считать интеграл по элементарным ячейкам интегрирования. Тогда (7) приближенно можно записать как

$$\hat{V}(\mathbf{r}) \approx -\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi c}R_0} \sum_{S=1}^{N_0} \sum_{R=1}^{N_0} \sqrt{|\mathbf{r}_R - \mathbf{r}|} \sqrt{|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|} \times \quad (10)$$

$$\times Z(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}) \mathcal{M}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}) u_{sc}^{bg}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t_{RS}(\mathbf{r})),$$

где  $\mathcal{M}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}) \equiv \int_{\varphi_S(\mathbf{r}) - \Delta\varphi_S(\mathbf{r})/2}^{\varphi_S(\mathbf{r}) + \Delta\varphi_S(\mathbf{r})/2} d\varphi_S(\mathbf{r}) \int_{\varphi_R(\mathbf{r}) - \Delta\varphi_R(\mathbf{r})/2}^{\varphi_R(\mathbf{r}) + \Delta\varphi_R(\mathbf{r})/2} d\varphi_R(\mathbf{r}) \times$   
 $\times |\sin\{\varphi_S(\mathbf{r}) - \varphi_R(\mathbf{r})\}|$ ;  $\Delta\varphi_S(\mathbf{r})$  и  $\Delta\varphi_R(\mathbf{r})$  – угловые рас-

стояния между соседними положениями излучателей и приемников (соответственно) в системе координат с центром в точке  $\mathbf{r}$ . Значения  $\Delta\varphi_S(\mathbf{r})$ ,  $\Delta\varphi_R(\mathbf{r})$  выражаются через  $\Delta\varphi_0$ :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_S(\mathbf{r}) &= \frac{|\mathbf{r}_S|}{|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|} \left| \cos\{\varphi_S^0 - \varphi_S(\mathbf{r})\} \right| \Delta\varphi_0; \\ \Delta\varphi_R(\mathbf{r}) &= \frac{|\mathbf{r}_R|}{|\mathbf{r}_R - \mathbf{r}|} \left| \cos\{\varphi_R^0 - \varphi_R(\mathbf{r})\} \right| \Delta\varphi_0. \end{aligned} \quad (11)$$

В декартовой системе координат  $\mathbf{r} = \{x, y\}$ , и тогда

$$|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}| = \sqrt{(|\mathbf{r}_S| \cos \varphi_S^0 - x)^2 + (|\mathbf{r}_S| \sin \varphi_S^0 - y)^2}; \quad (12)$$

$$|\mathbf{r}_R - \mathbf{r}| = \sqrt{(|\mathbf{r}_R| \cos \varphi_R^0 - x)^2 + (|\mathbf{r}_R| \sin \varphi_R^0 - y)^2};$$

$$\left| \cos\{\varphi_S^0 - \varphi_S(\mathbf{r})\} \right| = \frac{R_0 - (x \cos \varphi_S^0 + y \sin \varphi_S^0)}{|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|};$$

$$\left| \cos\{\varphi_R^0 - \varphi_R(\mathbf{r})\} \right| = \frac{R_0 - (x \cos \varphi_R^0 + y \sin \varphi_R^0)}{|\mathbf{r}_R - \mathbf{r}|}.$$

Интеграл  $\mathcal{M}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r})$  в (10) вычисляется аналитически:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}) &= \left\{ \vartheta(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}) + \frac{\Delta\varphi_S(\mathbf{r})}{2} + \frac{\Delta\varphi_R(\mathbf{r})}{2} \right\} - \\ &- \sin \left\{ \vartheta(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}) + \frac{\Delta\varphi_S(\mathbf{r})}{2} + \frac{\Delta\varphi_R(\mathbf{r})}{2} \right\} + \\ &+ \left\{ \vartheta(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}) - \frac{\Delta\varphi_S(\mathbf{r})}{2} - \frac{\Delta\varphi_R(\mathbf{r})}{2} \right\} - \\ &- \sin \left\{ \vartheta(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}) - \frac{\Delta\varphi_S(\mathbf{r})}{2} - \frac{\Delta\varphi_R(\mathbf{r})}{2} \right\} + \\ &+ \left\{ -\vartheta(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}) + \frac{\Delta\varphi_S(\mathbf{r})}{2} - \frac{\Delta\varphi_R(\mathbf{r})}{2} \right\} + \\ &+ \sin \left\{ \vartheta(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}) + \frac{\Delta\varphi_S(\mathbf{r})}{2} - \frac{\Delta\varphi_R(\mathbf{r})}{2} \right\} + \\ &+ \left\{ -\vartheta(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}) - \frac{\Delta\varphi_S(\mathbf{r})}{2} + \frac{\Delta\varphi_R(\mathbf{r})}{2} \right\} + \\ &+ \sin \left\{ \vartheta(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}) - \frac{\Delta\varphi_S(\mathbf{r})}{2} + \frac{\Delta\varphi_R(\mathbf{r})}{2} \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \vartheta(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}) &\equiv \text{sign}\{\varphi_S(\mathbf{r}) - \varphi_R(\mathbf{r})\} \min\{|\varphi_S(\mathbf{r}) - \varphi_R(\mathbf{r})|_{\text{mod } \pi}; \pi - |\varphi_S(\mathbf{r}) - \varphi_R(\mathbf{r})|_{\text{mod } \pi}\} = \\ &= \arctg \left[ \frac{\sin(\varphi_S^0 - \varphi_R^0) + \frac{(-x \sin \varphi_S^0 + y \cos \varphi_S^0)}{R_0} + \frac{(x \sin \varphi_R^0 - y \cos \varphi_R^0)}{R_0}}{\cos(\varphi_S^0 - \varphi_R^0) + \frac{x^2 + y^2}{R_0^2} - \frac{(x \cos \varphi_R^0 + y \sin \varphi_R^0)}{R_0} - \frac{(x \cos \varphi_S^0 + y \sin \varphi_S^0)}{R_0}} \right]; \end{aligned}$$

$\vartheta(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Выражение для  $\vartheta(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r})$  через функцию  $\text{arctg}$  получено с учетом соотношений

$$\cos \varphi_R(\mathbf{r}) = \frac{R_0 \cos \varphi_R^0 - x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_R|}; \quad \sin \varphi_R(\mathbf{r}) = \frac{R_0 \sin \varphi_R^0 - y}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_R|};$$

$$\cos \varphi_S(\mathbf{r}) = \frac{R_0 \cos \varphi_S^0 - x}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_S|}; \quad \sin \varphi_S(\mathbf{r}) = \frac{R_0 \sin \varphi_S^0 - y}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_S|}.$$

Итак, функция  $V(\mathbf{r})$ , описывающая тонкую структуру рассеивателя, которая присутствует на неоднородном крупномасштабном фоне, восстанавливается посредством соотношения (7). Данное соотношение, будучи адаптировано для вычислительных целей, принимает вид (10). Восстановление основано на фазировании рассеянного сигнала в текущую точку изображения  $\mathbf{r}$  путем использования фазирующего момента времени  $t_{RS}(\mathbf{r})$ , определенного в (8), а также амплитудно-геометрических коэффициентов  $Z(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r})$  и  $M(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, \mathbf{r})$ , определенных в (9) и (11)–(13). Далее из полученной оценки  $\hat{V}(\mathbf{r})$  можно выделить искомые диагностические характеристики – фазовую скорость  $c(\mathbf{r})$ , средний в рабочей полосе частот коэффициент поглощения  $\overline{\alpha(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}$  и, в общем случае, плотность среды  $\rho(\mathbf{r})$ . Такое выделение основано на связи (5), (6) функции рассеивателя с искомыми характеристиками. При наличии полных данных рассеяния (облучение и прием сигналов осуществляются со всех сторон) для выделения  $c(\mathbf{r})$  и  $\overline{\alpha(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}$  из  $\hat{V}(\mathbf{r})$  без учета неоднородного распределения плотности  $\rho(\mathbf{r})$  достаточно данных рассеяния для одного частотного спектра. Тогда оценка  $\hat{V}(\mathbf{r})$  приближенно трактуется как обусловленная только неоднородностями скорости звука и поглощения:

$$\hat{V}(\mathbf{r}) \approx c_0^2 \left( \frac{1}{c_0^2(\mathbf{r})} - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \right) M_c + c_0^2 \left( \frac{\overline{\alpha(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}}{c(\mathbf{r})} - \frac{\alpha_0(\mathbf{r})^{\Delta\omega}}{c_0(\mathbf{r})} \right) M_\alpha. \tag{14}$$

Из (14) для каждой фиксированной точки  $\mathbf{r}$  получается линейная система из двух уравнений:

$$\begin{cases} \text{Re } \hat{V}(\mathbf{r}) \approx c_0^2 \left( \frac{1}{c_0^2(\mathbf{r})} - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \right) \text{Re } M_c + c_0^2 \left( \frac{\overline{\alpha(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}}{c(\mathbf{r})} - \frac{\alpha_0(\mathbf{r})^{\Delta\omega}}{c_0(\mathbf{r})} \right) \text{Re } M_\alpha; \\ \text{Im } \hat{V}(\mathbf{r}) \approx c_0^2 \left( \frac{1}{c_0^2(\mathbf{r})} - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \right) \text{Im } M_c + c_0^2 \left( \frac{\overline{\alpha(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}}{c(\mathbf{r})} - \frac{\alpha_0(\mathbf{r})^{\Delta\omega}}{c_0(\mathbf{r})} \right) \text{Im } M_\alpha, \end{cases}$$

имеющая решение

$$\begin{aligned} c_0^2 \left( \frac{1}{c_0^2(\mathbf{r})} - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \right) &\approx \\ &\approx \frac{(\text{Im } M_\alpha) \text{Re } \hat{V}(\mathbf{r}) - (\text{Re } M_\alpha) \text{Im } \hat{V}(\mathbf{r})}{(\text{Re } M_c)(\text{Im } M_\alpha) - (\text{Im } M_c)(\text{Re } M_\alpha)}; \\ c_0^2 \left( \frac{\overline{\alpha(\mathbf{r})}^{\Delta\omega}}{c(\mathbf{r})} - \frac{\alpha_0(\mathbf{r})^{\Delta\omega}}{c_0(\mathbf{r})} \right) &\approx \\ &\approx \frac{-(\text{Im } M_c) \text{Re } \hat{V}(\mathbf{r}) + (\text{Re } M_c) \text{Im } \hat{V}(\mathbf{r})}{(\text{Re } M_c)(\text{Im } M_\alpha) - (\text{Im } M_c)(\text{Re } M_\alpha)}. \end{aligned}$$

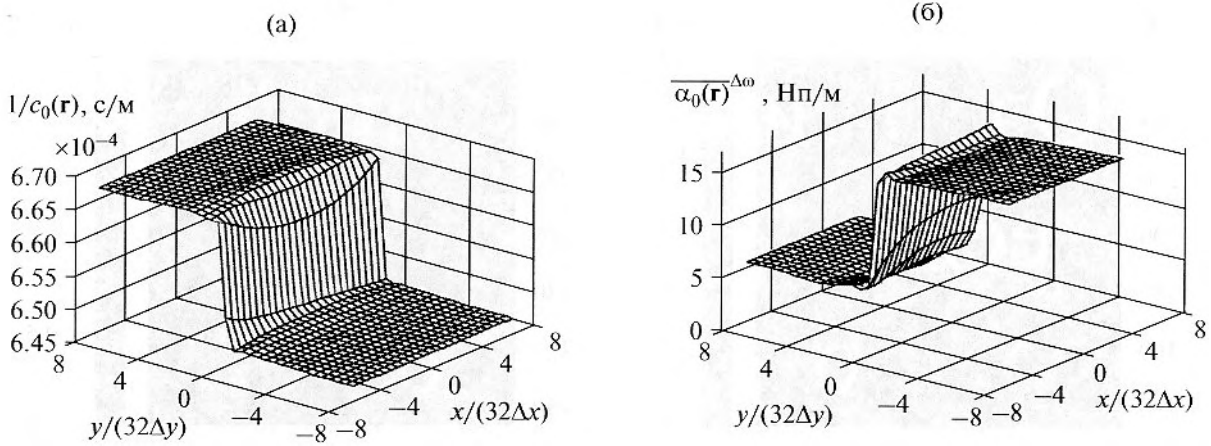
Согласно (4), (6):

$$\begin{aligned} M_c &= \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega, t_0) d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\omega)(1 + i \text{sign } \omega)}{2\pi\sqrt{|\omega|}} \exp(-i\omega t_0) d\omega; \\ M_\alpha &= -2i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\omega, t_0)}{\omega} d\omega = \\ &= -2i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\omega)(1 + i \text{sign } \omega)}{2\pi\omega\sqrt{|\omega|}} \exp(-i\omega t_0) d\omega. \end{aligned}$$

В [18] для восстановления распределения акустических рассеивателей тоже используется двухшаговый алгоритм, но на первом шаге обрабатываются данные, получаемые рассеянием преимущественно назад (в определенном секторе углов), а не вперед, как то имеет место в рассматриваемом случае неоднородного фона, представленного крупномасштабными неоднородностями.

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Поскольку в итоге исследования предназначаются для работы с экспериментальным образцом ультразвукового томографа [12], то характерные параметры при численном моделировании (размеры области томографирования, радиус окружности расположения преобразователей, рабочие частоты, формат изображений, шаги дискрети-



**Рис. 1.** Пространственные распределения крупномасштабных контрастных неоднородностей медленности (а) и амплитудного коэффициента поглощения (б), восстановленные на первом шаге двухшагового алгоритма. Истинная крупномасштабная неоднородность “ступенчатой” формы имеет скорость звука 1500 м/с (медленность  $6.67 \times 10^{-4}$  с/м) и поглощение 0.5 дБ/см (5.76 Нп/м) в верхней части области томографирования; соответствующие значения в нижней части 1545 м/с (медленность  $6.47 \times 10^{-4}$  с/м) и 1.5 дБ/см (17.27 Нп/м);  $\Delta x = \Delta y = 0.25$  мм.

зации изображений и т.п.) задавались близкими к реальным. Так, радиус окружности с центром в начале координат, на которой размещаются приемопередатчики, составлял  $R_0 = 0.1515$  м. Томографируемое двумерное сечение объекта полностью находилось внутри круга радиуса  $R_{\text{grid}} = 0.128$  м с тем же центром. Эквивалентное количество приемопередатчиков составляло  $N_0 = 256$ . Зондирующие сигналы со спектром гауссообразной формы

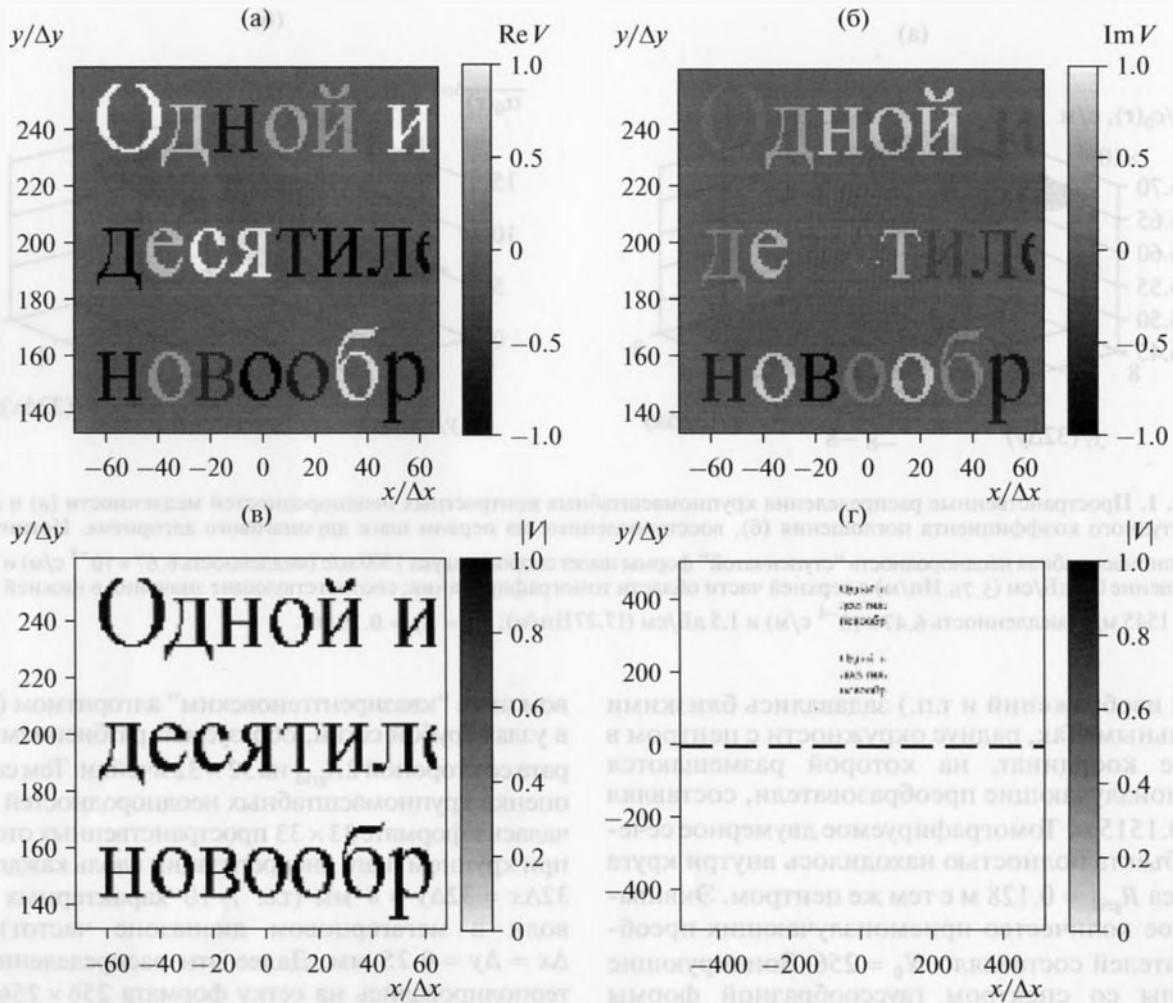
$\sim \exp\left[-\left(\frac{f-f_0}{\Delta f/2}\right)^2\right]$  имели несущую частоту

$f_0 = 1.65$  МГц и полуширину  $\Delta f/2 = 150$  кГц по уровню  $1/e$ ; значения частоты  $f$  учитывались в полосе 1200 кГц. Крупномасштабный фон задавался в виде “ступенчатого” изменения сразу двух акустических параметров – скорости звука и поглощения. Так, в верхней половине томографируемой области значение скорости звука составляло  $c_1 = 1500$  м/с, а значение поглощения 0.5 дБ/см соответствовало амплитудному коэффициенту поглощения  $\alpha_1 = 5.76$  Нп/м; в нижней половине  $c_2 = 1545$  м/с и 1.5 дБ/см, т.е.  $\alpha_2 = 17.27$  Нп/м (рис. 1). Соответствующие половины круговой области томографирования разделены хордой, проходящей через центр круга и наклоненной к оси  $Ox$  на угол  $\pi/256$ . Тонкая структура имитировалась в виде букв текста, располагающихся на таком крупномасштабном фоне (рис. 2).

Восстановление акустических параметров рассеивателя и на первом, и на втором шагах осуществлялось внутри круга радиуса  $R_{\text{grid}} = 0.128$  м. Крупномасштабный фон восстанавливался на пер-

вом шаге “квази рентгеновским” алгоритмом (1), (2) в узлах грубой сетки, образуемой разбиением квадрата со стороной  $2R_{\text{grid}}$  на  $32 \times 32$  ячейки. Тем самым, оценка крупномасштабных неоднородностей получалась в формате  $33 \times 33$  пространственных отсчетов при крупном шаге дискретизации вдоль каждой оси  $32\Delta x = 32\Delta y = 8$  мм (т.е. 7–10 характерных длин волн в мегагерцовом диапазоне частот), где  $\Delta x = \Delta y = 0.25$  мм. Далее эти распределения интерполировались на сетку формата  $256 \times 256$  пространственных отсчетов при шаге дискретизации  $4\Delta x = 4\Delta y = 1$  мм (т.е. около одной длины волны), и такие проинтерполированные распределения играли роль неоднородного фона на втором шаге процедуры восстановления. Тем самым, сетка из  $256 \times 256$  отсчетов предназначалась для выполнения трассировки (8), (9) по неоднородному фону на втором шаге процедуры восстановления, о чем подробнее будет сказано ниже. Восстановленные значения медленности и поглощения (рис. 1) хорошо согласуются с исходной моделью. Область “ступенчатого” изменения параметров в результате восстановления оказывается “сглаженной” в соответствии с разрешающей способностью первого шага.

Одновременно крупномасштабные распределения интерполировались на сетку формата  $1024 \times 1024$  пространственных отсчетов при соответствующем самом мелком шаге дискретизации  $\Delta x = \Delta y = 0.25$  мм (т.е. около 0.25–0.3 длины волны). В этой же самой сетке происходит восстановление тонкой структуры рассеивателя, т.е. получается оценка функции  $\hat{V}(\mathbf{r})$  на втором шаге процедуры восстановления. Тогда итоговые зна-



**Рис. 2.** Модель тонкой структуры – мелкомасштабных деталей исследуемого объекта в виде текста, присутствующих на крупномасштабном сильно неоднородном фоне; один пространственный отсчет составляет  $\Delta x = \Delta y = 0.25$  мм. Изображение фрагмента действительной (а) и мнимой (б) частей модельной функции  $V$ , описывающей тонкую структуру распределений скорости звука и поглощения, а также модуль этой функции (в). Общий вид всей области томографирования с тонкой структурой в виде двух одинаковых фрагментов текста (г); граница изменения параметров крупномасштабного фона изображена пунктирной линией.

чения распределений фазовой скорости и поглощения в формате  $1024 \times 1024$  отсчетов с шагом  $\Delta x = \Delta y = 0.25$  мм являются результатом объединения крупномасштабных (фоновых) значений, полученных на первом шаге, и поправок к ним, полученных на втором шаге. Выбранный конечный шаг пространственной дискретизации, с одной стороны, не превышает разрешающую способность получаемого изображения и, с другой стороны, удобен для врача-диагноста при определении конкретных координат подозрительного участка.

Для программной реализации двухшагового алгоритма использовались в качестве математических сопроцессоров две видеокарты NVidia GeForce GTX 590 и GTX 560, обладающие в сумме примерно 1400 параллельно работающими яд-

рами. Привлечение технологии CUDA позволило восстанавливать итоговые изображения упомянутого формата  $1024 \times 1024$  отсчетов за несколько минут [13]. Для сравнения, используемые ранее аналогичные расчеты на двухядерной ЭВМ с помощью программы на языке C++ с привнесением элементов программирования на Ассемблере занимали около 18 часов.

Мелкомасштабная структура, которую надо восстановить на втором шаге используемого двухшагового алгоритма, моделировалась для наглядности с помощью различных букв, образующих фрагмент текста (рис. 2). Функция  $V(\mathbf{r})$ , описывающая эту мелкомасштабную структуру, которая присутствует на неоднородном крупномасштабном фоне, задавалась в виде совокупности точечных рассеивателей с фазой  $\theta_k$ , изменяю-



шейся случайным образом в интервале  $[0, 2\pi)$ :  $V(\mathbf{r}) = \sum_k \exp(i\theta_k) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)$ . Элементарные рассеиватели, формирующие фиксированную букву, имели одну и ту же фазу. За счет этого каждая буква в модельном изображении действительной части  $\text{Re}V(\mathbf{r})$  (рис. 2а) и мнимой части  $\text{Im}V(\mathbf{r})$  (рис. 2б) имела свое индивидуальное значение яркости, хотя абсолютное значение  $|V|$  было одинаковым для всех букв (рис. 2в). Комплексная функция  $V(\mathbf{r})$  описывает мелкомасштабные неоднородности как скорости звука, так и поглощения. Рассеиватели располагались равномерно на расстоянии друг от друга в один отсчет, равный  $\Delta x = 0.25$  мм, что при длине волны  $\lambda_0 \approx 0.9$  мм на несущей частоте 1.65 МГц составляло  $\approx \lambda_0/3.6$ . Каждая строчная буква занимала по высоте и по ширине в среднем около 18 дискретных отсчетов ( $\approx 5\lambda_0$ ); при этом ширина линий, формирующих букву, составляла от 1 до 3 отсчетов, т.е.  $\approx (0.28-0.8)\lambda_0$ . Высота единственной заглавной буквы “О” – 24 отсчета ( $\approx 6.7\lambda_0$ ).

При численном моделировании проверялось, насколько хорошо используемая модель рассеивателя в виде совокупности точечных рассеивателей имитирует тонкую структуру рассеивателей, являющихся в действительности пространственно-распределенными. Для этого плотность точечных рассеивателей была увеличена в девять раз, т.е. расстояние между соседними точечными рассеивателями было сокращено в три раза и стало составлять  $\approx \lambda_0/11$  при неизменной высоте и ширине букв (в абсолютных единицах длины). Результат восстановления такого рассеивателя оказался близким к описываемым ниже результатам до увеличения плотности точечных рассеивателей модели.

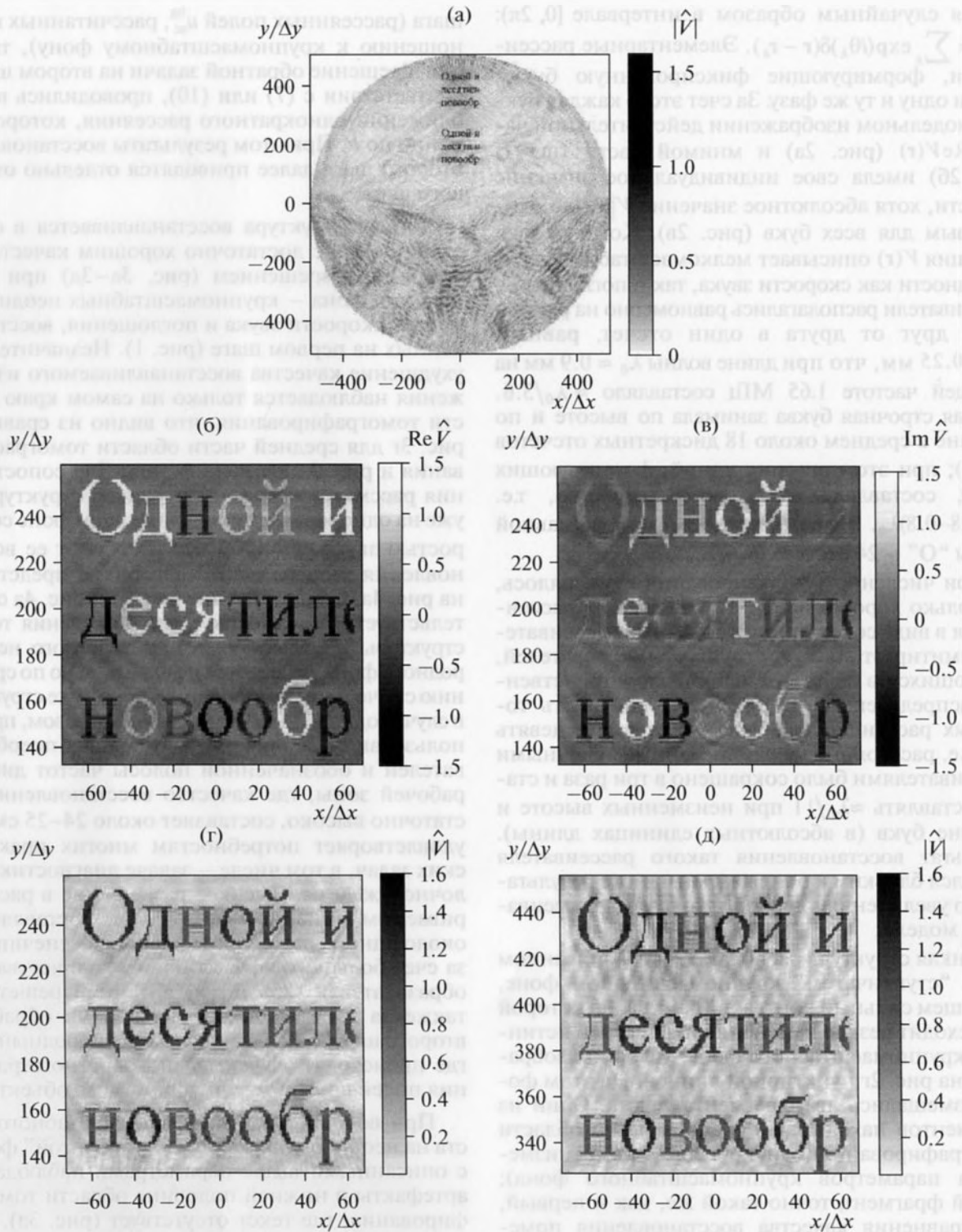
Тонкая структура располагалась на описанном выше “ступенчатом” крупномасштабном фоне, имеющем сильный контраст. Граница, на которой происходит резкое изменение параметров истинного крупномасштабного фона, условно изображена на рис. 2г пунктирной линией. На этом фоне размещались два фрагмента текста. Один из фрагментов находился в средней части области томографирования (однако выше границы изменения параметров крупномасштабного фона); другой фрагмент, точно такой же, как и первый, для сравнения качества восстановления помещался на периферии этой области, над первым фрагментом. Представление о местах расположения обоих фрагментов дает рис. 2г.

При численном моделировании второго шага абсолютное значение внутри букв условно полагалось равным 1, т.е.  $|V| = 1$ . Абсолютное значение  $|V|$  не играет роли в модельной задаче, поскольку моделирование данных рассеяния для второго

шага (рассеянных полей  $u_{sc}^{bg}$ , рассчитанных по отношению к крупномасштабному фону), так же как и решение обратной задачи на втором шаге, в соответствии с (7) или (10), проводились в приближении однократного рассеяния, которое линейно по  $V$ . При этом результаты восстановления второго шага далее приводятся отдельно от первого шага.

Тонкая структура восстанавливается в отсутствие помех с достаточно хорошим качеством и высоким разрешением (рис. 3а–3д) при учете влияния фона – крупномасштабных неоднородностей скорости звука и поглощения, восстановленных на первом шаге (рис. 1). Незначительное ухудшение качества восстанавливаемого изображения наблюдается только на самом краю области томографирования, что видно из сравнения рис. 3г для средней части области томографирования и рис. 3д для периферии. Для сопоставления рассматривалась та же тонкая структура, но уже на однородном непоглощающем фоне со скоростью звука  $c_0 = 1500$  м/с. Результат ее восстановления вторым шагом алгоритма представлен на рис. 4а. Сопоставление рис. 3г и рис. 4а свидетельствует, что качество воспроизведения тонкой структуры в случае сильно контрастного неоднородного фона ухудшается незначительно по сравнению с качеством воспроизведения той же структуры в случае однородного фона. Таким образом, при использовании 256 приемопередаточных преобразователей и обозначенной полосы частот диаметр рабочей зоны, где качество восстановления достаточно высоко, составляет около 24–25 см. Это удовлетворяет потребностям многих практических задач, в том числе – задаче диагностики молочной железы. Высокое разрешение в рассматриваемом линейном томографе, составляющее около одной трети длины волны, обеспечивается за счет большого эффективного количества преобразователей (256 штук) антенной решетки, а также за счет волнового алгоритма обработки второго шага, учитывающего неоднородный фон, где происходят эффекты многократного рассеяния полей внутри томографируемого объекта.

При восстановлении мелкомасштабного текста на неоднородном фоне “ступенчатой” формы с описанными выше параметрами наблюдаются артефакты в нижней половине области томографирования, где текст отсутствует (рис. 3а). Анализ показал, что артефакты возникают только в случае, когда текст находится в той половине области томографирования, которая обладает существенно меньшим значением коэффициента поглощения фона. Эти артефакты представляют собой сильно расфокусированное зеркальное изображение текста относительно границы раздела верхней и нижней половин области томографирования, в которых фон имеет разные акустические характери-



**Рис. 3.** Модельная иллюстрация возможности восстановления двухшаговым алгоритмом тонкой структуры, изображенной на рис. 2;  $\Delta x = \Delta y = 0.25$  мм. Оценка тонкой структуры  $\hat{V}$ , полученная с учетом восстановленного на первом шаге и изображенного на рис. 1 крупномасштабного фона: общий вид  $|\hat{V}|$  (а); фрагмент в средней части области томографирования (б – действительная часть, в – мнимая часть, г – модуль) и фрагмента на периферии (д – модуль). Оценка фрагмента тонкой структуры  $|\hat{V}|$ , когда при восстановлении на втором шаге вместо оценки крупномасштабного фона используется однородный фон со скоростью и поглощением, равными средним значениям истинного фона (е) и равными значениям истинного фона в верхней части области томографирования (ж).

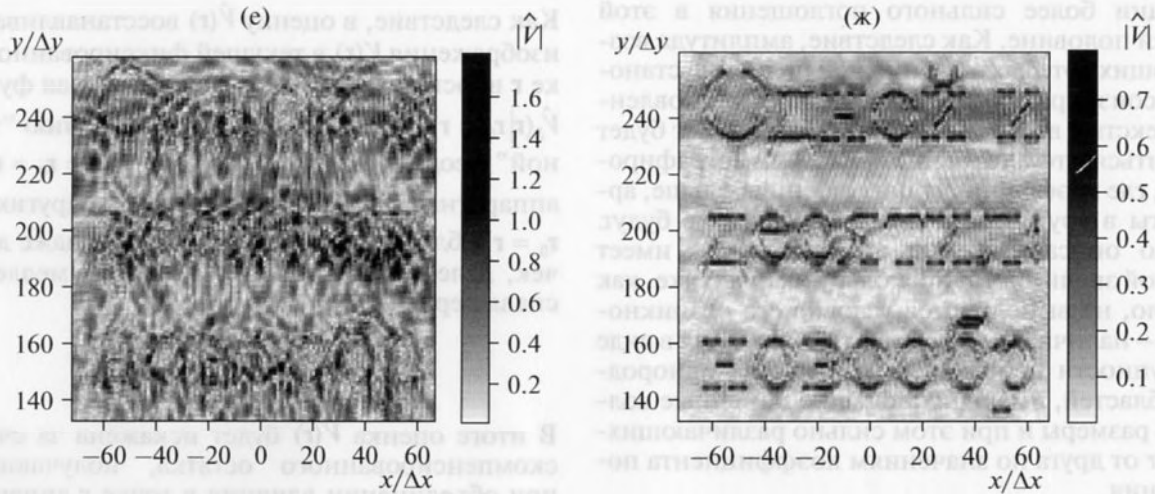


Рис. 3. Окончание.

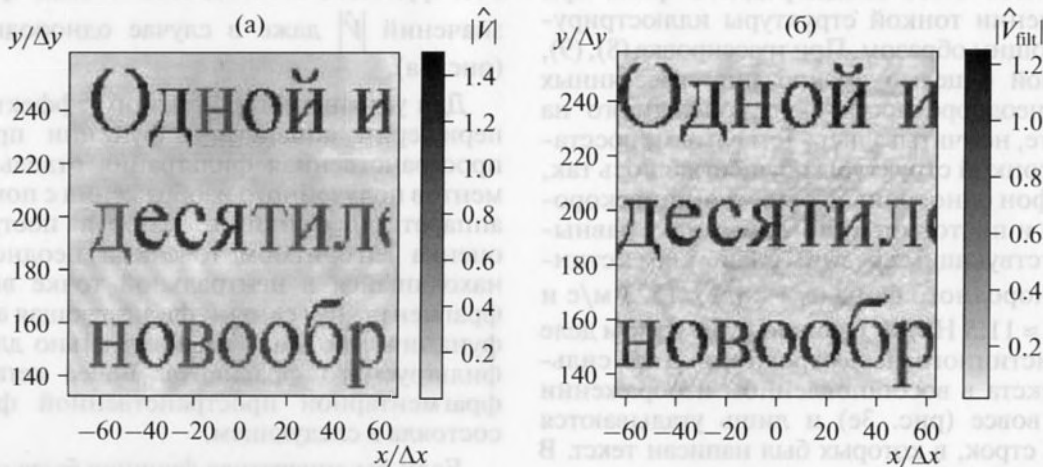


Рис. 4. Результат восстановления фрагмента тонкой структуры (изображенной на рис. 2) в виде  $|\hat{V}|$  в средней части области томографирования;  $\Delta x = \Delta y = 0.25$  мм. Оценка тонкой структуры, изначально расположенной на *однородном* фоне (а). Результат  $\hat{V}_{\text{filt}}$  фрагментарной пространственной фильтрации оценки тонкой структуры  $\hat{V}$ , изображенной на рис. 3б, 3в (б); тонкая структура располагалась на *неоднородном* фоне и ее оценка  $\hat{V}$  получалась с учетом восстановленного на первом шаге крупномасштабного фона (рис. 1).

стики. Происхождение артефактов связано с тем, что на этапе обработки, в соответствии с (7) или (10), при фиксированной паре “излучатель–приемник” рассеянный сигнал  $u_{\text{sc}}^{\text{bg}}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_S, t_{RS}(\mathbf{r}))$  в момент времени  $t_{RS}(\mathbf{r})$  приходит на приемник не только от точки  $\mathbf{r}$ , но также от всех других точек области рассеяния, время распространения до которых определяется тем же значением  $t_{RS}(\mathbf{r})$ . В случае однородной фоновой среды такие точки образуют эллипс, имеющий фокусы в точках излучения и приема [16]; в неоднородной фоновой среде эллипсы будут искажаться. При переборе пар “излучатель–приемник” данной точке  $\mathbf{r}$  соответствует совокупность фрагментов эллипсов в

виде дуг, сигналы от которых складываются когерентно при восстановлении изображения в точке  $\mathbf{r}$ . Одновременно с помощью функциональных множителей (9) происходит компенсация ослабления рассеянных сигналов, вызванная присутствием поглощения в фоновой среде. В рассматриваемой модели поглощение в нижней половине области томографирования (где нет в действительности текста) значительно сильнее, чем в верхней половине. По этой причине при восстановлении изображения в точках нижней половины области томографирования происходит значительное усиление вкладов от рассеянных сигналов (по сравнению с аналогичными вкладами от тех же сигналов в точки верхней половины) за счет ком-

пенсации более сильного поглощения в этой нижней половине. Как следствие, амплитуда возникающих артефактов в нижней половине становится соизмеримой с амплитудой восстановленного текста в верхней половине. Если текст будет находиться в той половине области томографирования, где коэффициент поглощения больше, артефакты в другой половине возникать не будут. Однако описанный вид артефактов не имеет большой значимости, поскольку на практике, как правило, не выполняется условие его возникновения – наличие крупномасштабного фона в виде совокупности небольшого количества однородных областей, имеющих большие линейные волновые размеры и при этом сильно различающихся друг от друга по значениям коэффициента поглощения.

Принципиальная необходимость восстановления крупномасштабной структуры фона и последующего учета этого неоднородного фона при восстановлении тонкой структуры иллюстрируется следующим образом. При трассировке (8), (9), выполняемой с целью фазирования рассеянных сигналов, неоднородности фона, оцененного на первом шаге, не учитывались. Тем самым, восстановление тонкой структуры осуществлялось так, как будто фон однородный, с постоянной скоростью звука и постоянным поглощением, равными соответствующим средним значениям истинного неоднородного фона  $(c_1 + c_2)/2 \approx 1523$  м/с и  $(\alpha_1 + \alpha_2)/2 \approx 11.5$  Нп/м. Поскольку на самом деле контраст истинного неоднородного фона сильный, то текста в восстановленном изображении не видно вовсе (рис. 3е) и лишь угадываются очертания строк, в которых был написан текст. В другом примере вместо оцененного неоднородного фона при трассировке использовался опять же однородный фон со скоростью звука  $c_1 = 1500$  м/с и поглощением  $\alpha_1 = 5.76$  Нп/м, равными значению истинного неоднородного фона в верхней половине области томографирования (в той, где находится текст). Тогда в восстановленном изображении проявляются отдельные фрагменты букв (рис. 3ж) за счет того, что в данном случае около половины трасс были сделаны по правильным значениям фоновой скорости звука и поглощения.

В отличие от исходной модели, имеющей одинаковое значение модуля всех букв  $|V| = 1$  (рис. 2в), модуль оценки изображения букв  $|\hat{V}|$ , полученной уже при учете неоднородностей фона, неодинаков и флуктуирует в заметном диапазоне значений (рис. 3г, 3д). Причина этого связана с тем, что аппаратная функция  $\hat{V}_\delta(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$  используемого двухшагового алгоритма имеет sinc-образный характер [11], и, тем самым, амплитуда периферии аппаратной функции убывает достаточно медленно.

Как следствие, в оценку  $\hat{V}(\mathbf{r})$  восстанавливаемого изображения  $V(\mathbf{r})$  в текущей фиксированной точке  $\mathbf{r}$  вносит вклад не только аппаратная функция  $\hat{V}_\delta(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0 = \mathbf{r})$ , соответствующая положению “точечной” неоднородности в той же точке  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}$ , но и аппаратные функции  $\hat{V}_\delta(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}')$  для других точек  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}'$  области рассеяния  $\mathfrak{R}$ , причем даже для точек, далеко отстоящих от  $\mathbf{r}$ , в силу медленного спада периферии:

$$\hat{V}(\mathbf{r}) = \int_{\mathfrak{R}} \hat{V}_\delta(\mathbf{r}|\mathbf{r}') V(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (15)$$

В итоге оценка  $\hat{V}(\mathbf{r})$  будет искажена за счет некомпенсированного остатка, получающегося при объединении влияния в точке  $\mathbf{r}$  аппаратных функций  $\hat{V}_\delta(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$  от разных точек  $\mathbf{r}'$  области рассеяния. Такой эффект влияния периферии аппаратной функции наблюдается в виде флуктуаций значений  $|\hat{V}|$  даже в случае однородного фона (рис. 4а).

Для устранения описанного эффекта влияния периферии аппаратной функции проводилась пространственная фильтрация отдельных фрагментов полученного изображения с помощью той аппаратной функции, которая построена как оценка алгоритмом точечной неоднородности, находящейся в центральной точке выбранного фрагмента. Тем самым, фильтрующая аппаратная функция строилась индивидуально для каждого фильтруемого фрагмента. Более детально суть фрагментарной пространственной фильтрации описана в следующем.

Если бы аппаратная функция была однородной во всей области рассеяния  $\mathfrak{R}$ , т.е.  $\hat{V}_\delta(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \hat{V}_\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  для всех  $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \mathfrak{R}$ , то операция (15) принимала бы вид пространственной свертки:

$$\hat{V}(\mathbf{r}) = \int_{\mathfrak{R}} \hat{V}_\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad \text{при } \mathbf{r} \in \mathfrak{R}. \quad (16)$$

В терминах пространственных спектров соответствующих функций выражение (16) записывается как

$$\hat{V}(\xi) = \hat{V}_\delta(\xi) \tilde{V}(\xi). \quad (17)$$

Однако на самом деле только центральная часть аппаратных функций, соответствующих разным положениям точечной неоднородности, практически одинакова в силу высокой угловой плотности входных данных, по которым строится томографическое изображение предлагаемым алгоритмом. Периферия же аппаратных функций может различаться, что нужно учитывать из-за недостаточно быстрого уменьшения амплитуды этой периферии. В связи с этим вся исследуемая область рассеяния  $\mathfrak{R}$  представляется в виде объ-

единения фрагментов, т.е. подобластей  $\mathfrak{R}^{(m)}$ ; под-область  $\mathfrak{R}^{(m)}$  имеет центр в точке  $\mathbf{r}_0^{(m)}$ . Внутри каждой подобласти  $\mathfrak{R}^{(m)}$  аппаратную функцию можно приближенно считать квазиоднородной:  $\hat{V}_\delta^{(m)}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \approx \hat{V}_\delta^{(m)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  при  $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \mathfrak{R}^{(m)}$ . Кроме того, поскольку характерный размер области локализации основной части аппаратной функции  $\hat{V}_\delta^{(m)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  существенно меньше линейного размера подобласти  $\mathfrak{R}^{(m)}$ , строгое соотношение (15) заменяется приближенным соотношением типа пространственной свертки:

$$\hat{V}(\mathbf{r}) \approx \int_{\mathfrak{R}^{(m)}} \hat{V}_\delta^{(m)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad \text{при } \mathbf{r} \in \tilde{\mathfrak{R}}^{(m)}. \quad (18)$$

Здесь  $\tilde{\mathfrak{R}}^{(m)}$  представляет собой центральную часть подобласти  $\mathfrak{R}^{(m)}$ :  $\tilde{\mathfrak{R}}^{(m)} \subset \mathfrak{R}^{(m)}$ . Соответственно, строгое выражение через пространственные спектры (17) также заменяется приближенным:

$$\hat{V}^{(m)}(\xi) \approx \hat{V}_\delta^{(m)}(\xi) \tilde{V}^{(m)}(\xi). \quad (19)$$

Фигурирующие в (19) функции  $\tilde{V}^{(m)}(\xi) = \int_{\tilde{\mathfrak{R}}^{(m)}} V(\mathbf{r}) \exp(-i\xi\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ ,  $\hat{V}^{(m)}(\xi) = \int_{\mathfrak{R}^{(m)}} \hat{V}(\mathbf{r}) \exp(-i\xi\mathbf{r}) d\mathbf{r}$  являются пространственными спектрами отдельного текущего фрагмента из изображения  $V(\mathbf{r})$  и его оценки  $\hat{V}(\mathbf{r})$ . С целью выделения такого фрагмента значения  $V(\mathbf{r})$  и  $\hat{V}(\mathbf{r})$  рассматриваются только для точек подобласти  $\mathbf{r} \in \mathfrak{R}^{(m)}$ , а для других точек  $\mathbf{r}$  — обнуляются.

В то же время, в (19) фигурирует пространственный спектр аппаратной функции:

$$\hat{V}_\delta^{(m)}(\xi) = \int \hat{V}_\delta^{(m)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0^{(m)}) \exp(-i\xi\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (20)$$

Последовательность вычислений пространственного спектра (20) следующая. Для пространственной фильтрации фиксированного фрагмента изображения, находящегося в подобласти  $\mathfrak{R}^{(m)}$ , предварительно рассчитывается аппаратная функция  $\hat{V}_\delta^{(m)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0^{(m)}) \approx \hat{V}_\delta(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^{(m)})$  — результат восстановления двухшаговым алгоритмом единственного точечного рассеивателя (неоднородности)  $V(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0^{(m)})$ , расположенного в центре  $\mathbf{r}_0^{(m)}$  данного фрагмента  $\mathfrak{R}^{(m)}$ . Важно, что этот точечный рассеиватель находится именно на том самом неоднородном фоне, который уже оценен на первом шаге процедуры восстановления. В практических условиях формирование данных рассеяния предполагает решение прямой задачи для каждого из положений точечного рассеивателя на неоднородном фоне, индивидуальном для каждого рассматриваемого томографируемого объекта. После нахождения  $\hat{V}_\delta^{(m)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0^{(m)})$  область локализации носителя этой аппаратной функции

ограничивается (т.е. обрезается) определенным радиусом с целью отсечения периферийной части, не удовлетворяющей условию квазиоднородности. Важно, что даже после такого ограничения область—носитель функции  $\hat{V}_\delta^{(m)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0^{(m)})$ , участвующая при вычислении пространственного спектра  $\hat{V}_\delta^{(m)}(\xi)$  в (20), обязана быть существенно больше подобласти  $\mathfrak{R}^{(m)}$  для адекватной реализации операции свертки (18).

Фильтрация оценки изображения состоит в поэлементном делении пространственного спектра фильтруемого фрагмента на пространственный спектр аппаратной функции согласно (19):  $\tilde{V}^{(m)}(\xi) \approx \hat{V}^{(m)}(\xi) / \hat{V}_\delta^{(m)}(\xi)$ . Эта операция может сопровождаться регуляризацией, сводящейся к тому, что в пространственном спектре  $\tilde{V}^{(m)}(\xi)$  обнуляются высокочастотные компоненты. Применение обратного пространственного фурье-преобразования к полученной приближенной оценке функции  $\tilde{V}^{(m)}(\xi)$  дает пространственно-профильтрованную версию рассматриваемого фрагмента изображения  $V_{\text{filt}}^{(m)}(\mathbf{r})$ . Поскольку соотношение (18) является более точным при рассмотрении точек  $\mathbf{r}$  только в центральной части фрагмента  $\mathfrak{R}^{(m)}$ , т.е. при  $\mathbf{r} \in \tilde{\mathfrak{R}}^{(m)}$ , итоговая оценка  $\hat{V}_{\text{filt}}(\mathbf{r})$  формируется вырезанием центральной части  $\tilde{\mathfrak{R}}^{(m)}$  из изображения  $V_{\text{filt}}^{(m)}(\mathbf{r})$ :  $\hat{V}_{\text{filt}}(\mathbf{r}) \approx V_{\text{filt}}^{(m)}(\mathbf{r})$  при  $\mathbf{r} \in \tilde{\mathfrak{R}}^{(m)}$ .

Для иллюстрации эффективности описанной фрагментарной пространственной фильтрации область, изображенная на рис. 3б—3г, разбивалась на  $3 \times 3$  блока одинаковых размеров. С целью фильтрации каждого такого блока из исходного изображения брался пространственный фрагмент с тем же центром, но на 20 отсчетов (вдоль каждой стороны) больший, чем заданный размер блока, и этот фрагмент фильтровался аппаратной функцией точечного рассеивателя, расположенного в центре данного фрагмента. После фильтрации фрагмента в итоговое изображение включалась только центральная часть фрагмента с размерами блока. В результате качество изображения улучшается. В частности, флуктуации модуля оценки  $|\hat{V}|$  в местах расположения букв существенно уменьшаются (рис. 4б в сравнении с рис. 3г). Полученный результат сопоставим по качеству с результатом применения аналогичной фрагментарной пространственной фильтрации к оценке текста, уже изначально располагающегося на *однородном* фоне и изображенного на рис. 4а, с помощью аппаратных функций однородного же фона.

Хорошая помехоустойчивость двухшагового алгоритма подтверждается результатами восстановления на основе реальных эксперименталь-

ных данных, полученных в опытном образце ультразвукового томографа с объектами-муляжами. Краткое упоминание этих результатов можно найти в [13], а более детально изложению предполагается посвятить последующую публикацию. Использование прямолинейного лучевого приближения не является обязательным. Уравнение эйконала [1] позволяет перейти к более адекватному описанию лучевых траекторий, но требует применения внутренних итераций для их нахождения. Трассировка и оценка времени распространения, необходимые для второго шага, также резко усложняются. С другой стороны, в качестве альтернативы двухшаговому алгоритму можно использовать функциональный алгоритм [19], исследованный с точки зрения его практической применимости в задачах акустической томографии в [20]. Все детали рассеивателя (как крупномасштабные, так и мелкомасштабные) восстанавливаются функциональным алгоритмом одновременно, что улучшает точность решения обратной томографической задачи по сравнению с двухшаговым приемом.

Авторы выражают искреннюю благодарность Ольге Ивановне Лапшенкиной за написание исходных программ, которые послужили основой для дальнейших исследований и сопутствующего развития результатов.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № НШ-283.2014.2, грантов РФФИ № 13-02-00632 и № 14-02-31596 мол\_а, а также при частичной поддержке Правительства РФ (грант № 2010-220-01-077, договор № 11.G 34.31.0005).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
2. *Kaveh M., Soumekh M., Mueller R.K.* A comparison of Born and Rytov approximations in acoustic tomography // *Acoust. Imaging*. New York, London: Plenum Press, 1982. V. 11. P. 325–335.
3. *Devaney A.J.* Reconstructive tomography with diffracting wavefields // *Inverse Problems*. 1986. V. 2. № 2. P. 161–183.
4. *Gelius L.-J., Johansen I., Sponheim N., Stamnes J.J.* A generalized diffraction tomography algorithm // *J. Acoust. Soc. Am.* 1991. V. 89. № 2. P. 523–528.
5. *Буров В.А., Горюнов А.А., Сасковец А.В., Тихонова Т.А.* Обратные задачи рассеяния в акустике (обзор) // *Акуст. журн.* 1986. Т. 32. № 4. С. 433–449.
6. *Горюнов А.А., Сасковец А.В.* Обратные задачи рассеяния в акустике. М.: МГУ, 1989. 152 с.
7. *Kak A.C., Slaney M., Larsen L.E.* Limitations of imaging with first-order diffraction tomography // *IEEE Trans. Microwave and Tech.* 1984. V. 32. № 8. P. 860–874.
8. *Буров В.А., Рычагов М.Н.* Дифракционная томография как обратная задача рассеяния. Интерполяционный подход. Линеаризованный вариант // *Акуст. журн.* 1992. Т. 38. № 4. С. 631–643.
9. *Devaney A.J., Oristaglio M.L.* Inversion procedure for inverse scattering with the distorted-wave Born approximation // *Phys. Rev. Lett.* 1983. V. 51. № 1. P. 237–240.
10. *André M.P., Janée H.S., Otto G.P., Martin P.J., Jones J.P.* Reduction of phase aberration in a diffraction tomography system for breast imaging // *Acoust. Imaging*. New York: Plenum Press, 1996. V. 22. P. 151–157.
11. *Буров В.А., Гришина И.М., Лапшенкина О.И., Морозов С.А., Румянцева О.Д., Сухов Е.Г.* Восстановление тонкой структуры акустического рассеивателя на фоне искажающего влияния его крупномасштабных составляющих // *Акуст. журн.* 2003. Т. 49. № 6. С. 738–750.
12. *Пархоменко П.П., Каравай М.Ф., Сухов Е.Г., Фалеев Б.А., Дмитриев О.В., Дроздов С.А., Комаров О.В., Бабин Л.В., Попов А.С., Буров В.А., Раттэль М.И., Бобов К.Н., Конюшкин А.Л., Румянцева О.Д.* Ультразвуковой томограф и кольцевая антенная решетка для ультразвукового томографа // Патент на изобретение № 2145797. Приоритет от 23.06.1999. Москва, 2000.
13. *Burov V.A., Zotov D.I., Karavay M.F., Rumyantseva O.D.* Ultrasound tomography of soft biological tissues containing strong inhomogeneities // *Phys. Wave Phenom.* 2013. V. 21. № 1. P. 74–80.
14. *Хорн Б.К.П.* Восстановление внутренней структуры объектов с помощью различных схем многолучевого просвечивания // *ТИИЭР*. 1978. Т. 66. № 5. С. 27–40.
15. *Хорн Б.К.П.* Методы восстановления внутренней структуры объектов при просвечивании расходящимся пучком // *ТИИЭР*. 1979. Т. 67. № 12. С. 40–48.
16. *Буров В.А., Румянцева О.Д.* Линеаризованная обратная задача рассеяния в монохроматическом и импульсном режимах // *Акуст. журн.* 1994. Т. 40. № 1. С. 41–49.
17. *Румянцева О.Д., Буров В.А., Конюшкин А.Л., Шаронов Н.А.* Повышение разрешения двумерного томографирования по поперечной координате и раздельное восстановление упругих и вязких характеристик рассеивателя // *Акуст. журн.* 2009. Т. 55. № 4–5. С. 606–622.
18. *Schmidt S., Roy O., Li C., Duric N., Huang Z.-F.* Modification of Kirchhoff migration with variable sound speed and attenuation for tomographic imaging of the breast // *Proceedings of SPIE (The International Society for Optical Engineering)*. Medical Imaging 2011: Ultrasonic Imaging, Tomography, and Therapy. Eds. D'hooge J., Doyley M.M., 2011. V. 7968. P. 796804. // *Med. Phys.* 2011. V. 38. № 2. P. 998–1007.
19. *Novikov R.G., Santacesaria M.* Monochromatic reconstruction algorithms for two-dimensional multi-channel inverse problems // *International Mathematics Research Notices*. 2012. doi: 10.1093/imrn/rns025
20. *Буров В.А., Шуруп А.С., Зотов Д.И., Румянцева О.Д.* Моделирование функционального решения задачи акустической томографии по данным от квазиточечных преобразователей // *Акуст. журн.* 2013. Т. 59. № 3. С. 391–407.