

ОБРАБОТКА АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ.
КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 534.143;550.34.01

ДИСПЕРСИОННЫЕ ЗАВИСИМОСТИ УПРУГИХ ВОЛН
В ПОКРЫТОМ ЛЬДОМ МЕЛКОМ МОРЕ

© 2014 г. Д. А. Преснов*, Р. А. Жостков*, В. А. Гусев**, А. С. Шуруп*, **

*Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН

123995 Москва, ул. Большая Грузинская 10, стр. 1

Тел.: (495) 254-8752; Факс: (499) 254-9080 E-mail: sobis@ifz.ru

**Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Физический факультет, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы

Тел.: (495) 939-3081; Факс: (495) 932-8820

E-mail: shurup@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 29.01.2014 г.

В работе исследованы дисперсионные зависимости акустических волн, распространяющихся в условиях, близких к условиям мелкого моря, покрытого льдом. Получено дисперсионное уравнение для слоистой среды, состоящей из упругого слоя (лед), жидкого слоя (морская толща) и упругого однородного полупространства (дно). Обсуждены возможности оценки некоторых параметров рассматриваемой слоистой структуры на основе анализа дисперсионных кривых. Результаты численных расчетов сопоставлены с данными натурального эксперимента по регистрации сейсмоакустических сигналов в условиях ледовой обстановки.

Ключевые слова: мелкое море, лед, шельф, томография океана, слоистая среда, поверхностные волны, дисперсионное уравнение, оценка акустических характеристик льда, воды и дна.

DOI: 10.7868/S0320791914040157

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена исследованию процессов распространения упругих волн в условиях, близких к условиям мелкого моря, покрытого льдом. Актуальность и практическая значимость этой задачи существенно возросла в последнее время в связи с активными работами по поиску и разработке месторождений углеводородов на шельфе северных морей РФ. Описание волновых полей в таких условиях, как правило, сводится к рассмотрению многослойных сред, что является сложной теоретической задачей [1–3], требующей существенных усилий для получения аналитического решения. Зачастую вместо этого прибегают к прямому численному моделированию [4]. Например, в работе [5] представлены результаты численного эксперимента по распространению акустических полей в гидроакустическом канале при наличии ледового покрова и упругого слоистого полупространства. Результаты численного моделирования позволили авторам проанализировать особенности формирования пространственно-временной структуры сейсмоакустических полей, возбуждаемых источниками различного типа. Продемонстрирована также возможность оценки некоторых параметров выбранной модели слоистой среды. Несмотря на удобство прямого численного моделирования для анализа акустических полей при конкретном распределении параметров задачи, его применение для исследования общих особенностей волнового распространения в сло-

истых средах заданного класса требует рассмотрения большого количества частных задач, что не всегда удобно при практическом применении. Для исследования общих закономерностей распространения упругих волн в слоистых средах может быть использован подход, основанный на аналитическом анализе дисперсионных зависимостей для этих волн. В этом случае, правда, приходится упрощать рассматриваемую модель среды в силу сложности аналитического решения задачи. Тем не менее, получаемые упрощенные дисперсионные уравнения позволяют решить ряд важных практических задач. Так, например, сопоставление дисперсионных характеристик изгибных волн льда, полученных экспериментально и рассчитанных на основе упрощенных моделей среды, позволяет оценить параметры ледового покрова [6, 7], что может быть использовано для решения задачи мониторинга состояния льда. В настоящее время это крайне актуально в связи с заметным сокращением поверхности ледового покрова Арктики; скорость такого сокращения сейчас достигает 10% за десять лет [8].

В настоящей работе получено дисперсионное уравнение для упругих волн, распространяющихся в слоистой среде, состоящей из слоя льда конечной толщины, жидкого слоя и однородного упругого полупространства. Итоговое дисперсионное уравнение удается свести к вполне компактному виду, удобному для анализа и численного моделирования. Исследование полученного

дисперсионного уравнения для различных параметров рассматриваемой задачи позволяет наметить возможные пути оценки акустических характеристик среды на основе экспериментально измеряемых дисперсионных зависимостей. В конце работы приводится предварительный анализ дисперсионных свойств упругих волн, зарегистрированных в натурном эксперименте в условиях ледовой обстановки на Ладожском озере.

ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ “УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО–ЖИДКИЙ СЛОЙ–УПРУГИЙ СЛОЙ”

Вводится цилиндрическая система координат $\{r, \theta, z\}$ (рис. 1), где ось Oz направлена вверх и перпендикулярна границам раздела сред слоистого полупространства. Ориентируясь на используемые источники акустических волн, ниже рассматривается задача с радиальной симметрией, для которой свойства среды и упругих полей не зависят от азимутального угла θ . Предполагается, что слоистое полупространство состоит из упругого слоя толщины h_1 (лед), жидкого слоя толщиной $\Delta h = h_2 - h_1$ и безграничного упругого полупространства в области $z < -h_2$ (рис. 1).

Плотности сред обозначаются соответственно через ρ , ρ_0 и ρ' . Поверхность слоистого полупространства считается свободной от напряжений. Вектор смещения точек среды \mathbf{u} представляется в виде разложения по потенциалам продольных φ и поперечных ψ смещений: $\mathbf{u} = \nabla\varphi + \text{rot}\psi$. Из симметрии рассматриваемой задачи следует, что смещения в твердой среде будут иметь только r - и z -компоненты, а векторный потенциал имеет только одну отличную от нуля компоненту – азимутальную: $\psi = \{0, \psi, 0\}$. Скалярные функции $\varphi = \varphi(r, z)$ и $\psi = \psi(r, z)$ не зависят от угла θ . Из уравнений теории упругости, записанных в цилиндрических координатах, можно получить волновые уравнения для потенциалов φ , ψ в упругом слое, в жидкости φ_0 и в твердом полупространстве φ' , ψ' :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_l^2 \Delta \varphi &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c_t^2 \left(\Delta \psi - \frac{\psi}{r^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \varphi_0 &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} - c_i^2 \Delta \varphi' &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi'}{\partial t^2} - c_i^2 \left(\Delta \psi' - \frac{\psi'}{r^2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $c_l^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$, $c_t^2 = \mu/\rho$ – скорости распространения продольных и поперечных волн в

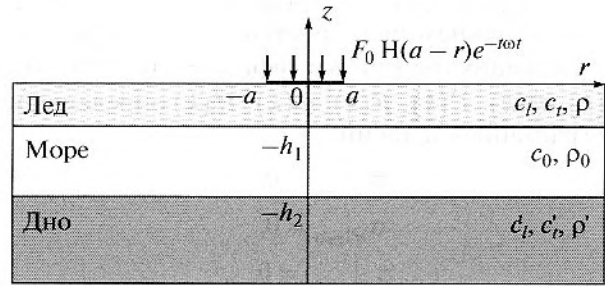


Рис. 1. Геометрия рассматриваемой модели слоистой среды, состоящей из упругого слоя (лед), слоя жидкости (морская толща) и упругого полупространства (дно).

упругом слое, $c_0^2 = \lambda_0/\rho_0$ – скорость звука в жидкости, $c_i^2 = (\lambda' + 2\mu')/\rho'$ и $c_i'^2 = \mu'/\rho'$ – скорости продольных и поперечных волн в упругом полупространстве; λ , μ , λ_0 , λ' , μ' – соответствующие

константы Ламэ, $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа. Следует отметить, что в уравнениях (1) не учтено влияние силы тяжести, так как ее действие становится существенным на частотах < 0.1 Гц [9], которые лежат за пределами рассматриваемого в настоящей работе частотного диапазона.

Решения уравнений (1) находятся с помощью интегрального преобразования Фурье–Бесселя:

$$\begin{aligned} \varphi(r, z, t) &= \int_0^{\infty} \left[A(k) e^{i\alpha_l z} + B(k) e^{-i\alpha_l z} \right] k J_0(kr) e^{-i\omega t} dk, \\ \psi(r, z, t) &= \int_0^{\infty} \left[C(k) e^{i\alpha_t z} + D(k) e^{-i\alpha_t z} \right] k J_1(kr) e^{-i\omega t} dk, \\ \varphi_0(r, z, t) &= \int_0^{\infty} \left[E(k) e^{i\alpha_0 z} + F(k) e^{-i\alpha_0 z} \right] k J_0(kr) e^{-i\omega t} dk, \\ \varphi_0'(r, z, t) &= \int_0^{\infty} \left[E(k) e^{i\alpha_0 z} + F(k) e^{-i\alpha_0 z} \right] k J_0(kr) e^{-i\omega t} dk, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \varphi'(r, z, t) &= \int_0^{\infty} G(k) e^{-i\alpha_i z} k J_0(kr) e^{-i\omega t} dk, \\ \psi'(r, z, t) &= \int_0^{\infty} H(k) e^{-i\alpha_i z} k J_1(kr) e^{-i\omega t} dk, \end{aligned}$$

где $\alpha_l^2 = \omega^2/c_l^2 - k^2$, $\alpha_t^2 = \omega^2/c_t^2 - k^2$, $\alpha_0^2 = \omega^2/c_0^2 - k^2$, $\alpha_i^2 = \omega^2/c_i^2 - k^2$, $\alpha_i'^2 = \omega^2/c_i'^2 - k^2$, $J_0(kr)$ и $J_1(kr)$ – функции Бесселя нулевого и первого порядков соответственно; k – волновое число, ω – циклическая частота, t – время, i – мнимая единица. В двух последних соотношениях отсутствуют члены, соответствующие волнам, распространяю-

щимся вверх, что удовлетворяет условию отсутствия в нижнем полупространстве источников и отражающих границ. Коэффициенты $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$, $D(k)$, $E(k)$, $F(k)$, $G(k)$, $H(k)$ определяются из граничных условий:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}|_{z=0} &= 0, \\ \sigma_{zr}|_{z=0} &= 0, \\ \sigma_{zr}|_{z=-h_1} &= 0, \\ (\sigma_{zz} - \sigma_{0zz})|_{z=-h_1} &= 0, \\ (u_z - u_{0z})|_{z=-h_1} &= 0, \\ \sigma'_{zr}|_{z=-h_2} &= 0, \\ (\sigma_{0zz} - \sigma'_{zz})|_{z=-h_2} &= 0, \\ (u_{0z} - u'_z)|_{z=-h_2} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где σ_{ik} , σ_{0ik} и σ'_{ik} — компоненты тензора напряжений в упругом слое, жидком слое и упругом полупространстве соответственно. Подстановка решений (2) в граничные условия (3) с учетом известного соотношения между тензором напряжений и смещениями [10] позволяет получить для перечисленных выше коэффициентов систему алгебраических уравнений. Условие разрешимости этой системы (равенство нулю ее детерминанта) дает дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} d(k, \omega) = & \omega^4 \frac{\rho_0 \rho_0'}{\mu^2} \alpha_i \left[\omega^4 \frac{\rho_0 \rho_0'}{\mu'^2} \alpha_i' \sin \alpha_0 \Delta h + \right. \\ & + i \alpha_0 \left((k^2 - \alpha_i'^2)^2 + 4 \alpha_i' \alpha_i' k^2 \right) \cos \alpha_0 \Delta h \left. \right] \times \\ & \times \left[(k^2 - \alpha_i^2)^2 \cos \alpha_i h_1 \sin \alpha_i h_1 + \right. \\ & \left. + 4 \alpha_i \alpha_i k^2 \sin \alpha_i h_1 \cos \alpha_i h_1 \right] + \\ & + \alpha_0 \left[\omega^4 \frac{\rho_0 \rho_0'}{\mu'^2} \alpha_i' \cos \alpha_0 \Delta h - \right. \\ & \left. - i \alpha_0 \left((k^2 - \alpha_i'^2)^2 + 4 \alpha_i' \alpha_i' k^2 \right) \sin \alpha_0 \Delta h \right] \times \\ & \times \left[8 \alpha_i \alpha_i k^2 (k^2 - \alpha_i^2)^2 (1 - \cos \alpha_i h_1 \cos \alpha_i h_1) + \right. \\ & \left. + \left((k^2 - \alpha_i^2)^4 + 16 k^4 \alpha_i^2 \alpha_i'^2 \right) \sin \alpha_i h_1 \sin \alpha_i h_1 \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Решения уравнения (4) можно представить в виде дисперсионной кривой — зависимости скоростей распространения соответствующих мод от частоты волны.

Представляет интерес сравнение асимптотик решения уравнения (4), получаемых в низкоча-

стотном и высокочастотном пределах, с известными решениями для поверхностных волн [11].

При малых частотах ($\omega \Delta h / c_i' \ll 1$, $\omega h_1 / c_i \ll 1$) асимптотическими решениями уравнения (4) являются: скорость волны Рэлея $c_R' \cong 0.9 c_i'$ [11], распространяющейся вдоль границы упругого полупространства, скорость изгибной волны $c_{и} \sim \omega^{1/2}$ [6, 7] и скорость $c_{пп} = 2c_i \sqrt{1 - c_i^2 / c_i'^2}$ волны, которая в дальнейшем будет называться “квазипродольной”, так как у этой продольной волны, как ее обычно называют [1, стр. 47], существуют отличные от нуля и поперечные смещения.

На больших частотах ($\omega \Delta h / c_i' \gg 1$, $\omega h_1 / c_i \gg 1$) дисперсионное уравнение (4) имеет три асимптотики, две из которых соответствуют скоростям c_s и c_s' волн Стоунли [11] на границах “лед—вода” и “дно—вода” соответственно; третья асимптотика соответствует скорости волны Рэлея, распространяющейся вдоль поверхности льда $c_R \cong 0.9 c_i$.

Следует отметить, что в работе [7] используется дисперсионное уравнение, полученное для системы “упругий слой—жидкий слой—абсолютно жесткое полупространство”. В этом случае, в отличие от (4), не учитывается сжимаемость донного грунта и такие его характеристики как скорости продольных и поперечных волн, а также плотность грунта.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСПЕРСИОННЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ДЛЯ СЛУЧАЯ МЕЛКОГО МОРЯ, ПОКРЫТОГО ЛЬДОМ

Расчет дисперсионных кривых проводился численно при различных значениях параметров среды c_t , c_t' , c_0 , c_i' , c_i , h_1 и h_2 , причем, как оказалось, вид полученных дисперсионных зависимостей весьма критичен к выбору этих значений. В настоящем разделе будет рассматриваться случай, когда скорости продольных и поперечных волн в упругом полупространстве c_i' и c_i превышают скорость звука в воде c_0 . Относительно соотношений между значениями c_t , c_t' и c_0 можно сказать, что дисперсионные зависимости качественно отличаются для следующих трех случаев: $c_t < c_t' < c_0$, $c_t < c_0 < c_t'$, $c_0 < c_t < c_t'$. Анализ литературы показал, что наиболее часто соотношение скоростей соответствует случаям $c_t < c_0 < c_t'$ и $c_0 < c_t < c_t'$, которые и будут рассматриваться далее. Случай $c_t < c_t' < c_0$ может быть проанализирован аналогично и для сокращения объема статьи не рассматривается.

На рис. 2 приведены дисперсионные кривые, рассчитанные для следующих значений параметров среды: $\rho_0 = 1000$ кг/м³, $\rho = 900$ кг/м³, $\rho' = 2000$ кг/м³, $c_0 = 1500$ м/с, $c_t' = 3500$ м/с, $c_t' = 1700$ м/с, $c_t = 3000$ м/с, $h_2 = 101$ м. Для случая $c_t < c_0 < c_t'$ были

использованы значения: $h_1 = 8$ м, $c_t = 1100$ м/с; для случая $c_0 < c_t < c_l$ полагалось $h_1 = 1$ м, $c_t = 1900$ м/с.

На рис. 2 можно выделить следующие семейства кривых:

I – низкоскоростная изгибная волна, которая существует на всех частотах и распространяется при любом соотношении фазовых скоростей продольных и поперечных волн в среде. Фазовая скорость этой волны критична к выбору толщины ледового слоя. В случае слоя льда, лежащего на жидком полупространстве, дисперсионное уравнение для изгибных волн хорошо известно [6, 9] и имеет следующий вид:

$$k^4 - \frac{h_1 \omega^2 \rho}{D} - \frac{\rho_0}{D} \left(g - \frac{\omega^2}{i \alpha_0} \right) = 0, \quad (5)$$

где $D = E h_1^3 / [12(1 - \nu^2)]$; $E = 2\mu(1 + \nu)$, $\nu = \lambda / (2\lambda + 2\mu)$ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона ледяного покрова соответственно, g – ускорение свободного падения. Для проверки правильности дисперсионных зависимостей, получаемых с помощью (4), на рис. 2 также представлены кривые, полученные при использовании уравнения (5). Как видно, кривые совпадают в области низких частот, не превышающих ≈ 10 Гц. Различия становятся заметными на более высоких частотах, когда приближение бесконечного жидкого полупространства, которое предполагается при использовании (5), становится неприменимым. Полученные результаты подтверждают корректность расчетов с использованием уравнения (4), которое позволяет оценить дисперсионные кривые изгибных волн при учете влияния дна, но без учета влияния гравитации.

II – волна рэлеевского типа, распространяющаяся вдоль границы упругого полупространства и также существующая на всех частотах. В дальнейшем для этой волны будем использовать обозначение “фундаментальная” мода. Фазовая скорость этой волны на низких частотах имеет значение c'_R , а в остальных диапазонах определяется, в основном, параметрами дна. Для высоких частот фазовая скорость стремится к асимптотике c'_s . В случае отсутствия ледового покрова фундаментальной моде соответствует так называемая донная поверхностная волна [12], не имеющая критической частоты и распространяющаяся вдоль границы “жидкий слой–упругое полупространство”.

III – нормальные волны ледяного слоя как волновода. Фазовая скорость этих мод определяется, прежде всего, параметрами льда, а также соотношением значений упругих параметров льда и воды. Например, при $c_0 < c_t < c_l$ фазовая скорость принимает комплексные значения и происходит переизлучение волн данного семейства в воду и грунт, что приводит к быстрому затуханию моды. На высоких частотах фазовая скорость асимптотически стремится к значению c_t (рис. 2а).

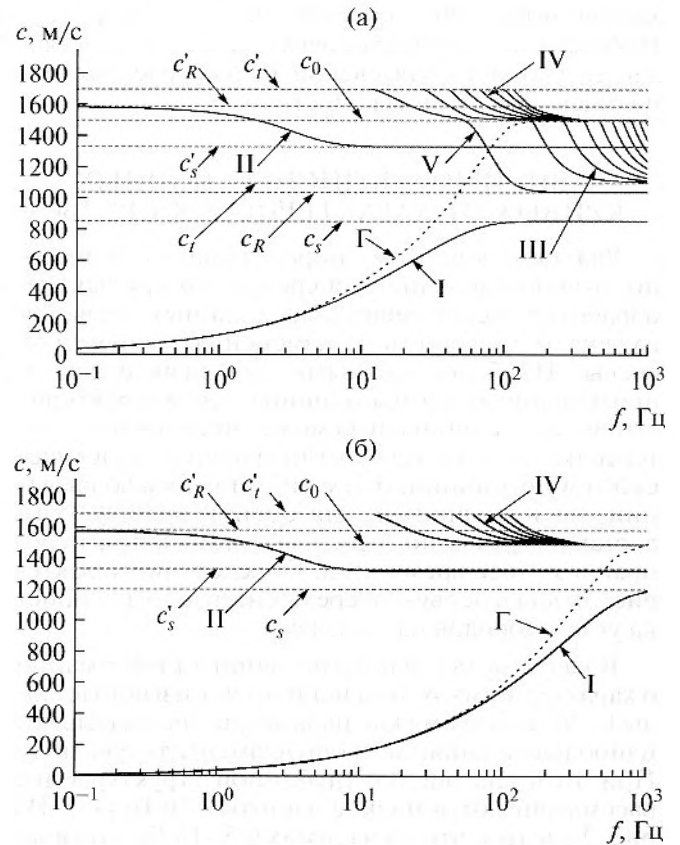


Рис. 2. Дисперсионные зависимости, соответствующие двум различным случаям, рассматриваемым в работе: (а) $c_t < c_0 < c_l$, (б) $c_0 < c_t < c_l$ (численные значения параметров сред указаны в тексте). Сплошными линиями обозначены: I – изгибная волна, II – “фундаментальная” мода, III – нормальные волны ледяного слоя как волновода, IV – гидроакустические моды, V – “квазипродольная” волна. Пунктирные линии соответствуют асимптотикам: c_R и c'_R – скорости рэлеевских волн, распространяющихся вдоль границы упругого полупространства и льда соответственно; c_s и c'_s – скорости волн Стоунли на границе “жидкость–упругое полупространство” и “жидкость–упругий слой” соответственно; c_t и c'_t – скорости поперечных волн во льду и в дне, c_0 – скорость продольных волн в водном слое. Штрихпунктирную линию (обозначена как Γ) обозначает дисперсионную кривую изгибно-гравитационной волны (5).

IV – гидроакустические моды, характеристики которых определяются параметрами всех сред. Участки дисперсионных кривых для этого семейства мод заключены между значениями c_0 и c'_t . Чтобы не загромождать рис. 2, на нем изображены только несколько первых гидроакустических мод.

V – “квазипродольная” волна, локализованная, в основном, в ледяном слое при условии, что ее скорость меньше скорости звука в жидкости. Поскольку максимальное значение фазовой скорости “квазипродольной” волны лежит в диапазоне $c_t \sqrt{2} \leq c_{np} \leq c_t$, для того, чтобы данная мода распространялась во всем диапазоне частот, необ-

ходимо выполнение соотношения $c_{\text{пр}} \leq \max\{c_0, c_r\}$. В области высоких частот асимптотой для моды является скорость рэлеевской волны, распространяющейся вдоль поверхности льда.

ЗАВИСИМОСТЬ ДИСПЕРСИОННЫХ КРИВЫХ ОТ ХАРАКТЕРИСТИК СРЕДЫ

Важным вопросом, определяющим возможность использования дисперсионных кривых при обработке экспериментальных данных, является их чувствительность к изменению параметров среды. Наиболее важными для практического применения являются толщина льда и характеристики дна. Толщина льда может представлять интерес не только в задачах глобального экологического мониторинга, о чем упоминалось во введении, но и, например, для оценки возможности доставки грузов по льду, для организации переправ в зимнее время и т.д. Определение характеристик дна в первую очередь интересно для поиска углеводородов на шельфе.

В качестве основного источника информации о характеристиках льда используют изгибные моды [6, 9], в то время как параметры дна оказывают наибольшее влияние на фундаментальную моду. При этом для оценки глубинной структуры дна рассматриваются низкие частоты ~ 10 Гц [13]. Из рис. 2 следует, что на частотах 0.5–10 Гц, которые могут представлять практический интерес, изгибная и фундаментальная моды присутствуют в акустическом поле одновременно. В связи с этим возникает вопрос о возможности выделения в принимаемом сигнале этих двух мод с последующей отдельной оценкой параметров льда и дна. Поскольку изгибная и фундаментальная моды имеют заметно различающиеся скорости распространения, то в условиях эксперимента [6] эти волны могут быть разделены по временам приходов. Кроме того, как будет показано ниже, изгибная мода дает основной вклад в поле, принимаемое вблизи ледового слоя, в то время как вклад фундаментальной моды на низких частотах существует вблизи дна. Таким образом, возможное решение задачи разделения в принимаемом сигнале мод указанных типов может быть основано на пространственно-временном анализе принимаемых полей при соответствующем выборе частотного диапазона.

В случае успешного выделения изгибной моды оценка характеристик льда может осуществляться на основе исследования ее дисперсионных кривых. Вид дисперсионных кривых изгибной моды слабо зависит от изменения значений плотности льда, модуля Юнга, коэффициента Пуассона (для значений, которые встречаются в природе), однако заметное влияние на него оказывает изменение толщины льда [6, 9]. Эти результаты оказываются справедливыми и для рассматриваемой в настоящей работе модели среды. Для примера на рис. 3а приведены дисперсионные зависимости, полученные с помощью (4) для разных

значений толщины льда h_1 . Видно (см. рис. 3а), что фазовая скорость $c_{\text{ф}}$ фундаментальной моды практически не зависит от h_1 в рассматриваемом частотном диапазоне, в то время как изменения $\Delta c_{\text{н}}$ фазовой скорости изгибной моды достигают заметных значений. Так, численный расчет показал, что при изменении толщины льда на $\Delta h_1 = 1$ м изменение скорости изгибной волны на частоте $f \approx 5$ Гц составляет $\Delta c_{\text{н}} \approx 50$ м/с.

В ряде случаев оценка параметров слоистой среды осуществляется на основе анализа не фазовых, а групповых скоростей. Так, например, при реализации методов пассивного мониторинга [9] в качестве исходных данных для восстановления параметров льда рассматриваются времена распространения сигналов между точками приема, т.е. фактически используется информация о групповых скоростях. Времена распространения также используются при построении томографических схем [14, 15], основанных на линейной (или близкой к линейной) взаимосвязи между возмущениями наблюдаемых времен распространений сигналов Δt и возмущениями параметров среды, в качестве которых могут выступать, например, изменения толщины льда Δh_1 . Отклонение от линейного случая может быть учтено при использовании итерационных процедур [16]. Представляет интерес исследование поведения групповой скорости при изменении параметров рассматриваемой слоистой структуры. Ниже групповая скорость v рассчитывается стандартным способом:

$$v = \frac{c}{1 - \frac{\omega}{c} \frac{dc}{d\omega}}$$

где c — фазовая скорость рассматриваемой моды. Зависимость групповой скорости $v_{\text{н}}$ изгибной волны от частоты для различных значений толщины льда h_1 представлена на рис. 3б. Видно, что при увеличении h_1 значения $v_{\text{н}}$ монотонно увеличиваются. На рис. 3в представлена зависимость приращения $\Delta v_{\text{н}}^{(i)} = v_{\text{н}}(h_1^{(i)}) - v_{\text{н}}(h_1^{(0)})$ групповой скорости изгибной волны при изменении глубины $\Delta h_1^{(i)} = h_1^{(i)} - h_1^{(0)}$ для трех фиксированных частот (см. подписи к рисункам), где $h_1^{(0)} = 1$ м, а значения $h_1^{(i)}$ изменяются от 1.25 до 3 м с шагом 0.25 м; $v_{\text{н}}(h_1^{(i)})$ обозначает значение групповой скорости, вычисленное при заданной толщине $h_1^{(i)}$. Видно, что приращение групповой скорости, которое характеризует изменение времени распространения сигнала, вызванное наличием $\Delta h_1^{(i)}$, почти линейно зависит от $\Delta h_1^{(i)}$ в рассматриваемом частотном диапазоне. Наличие области линейной связи между $\Delta h_1^{(i)}$ и $\Delta v_{\text{н}}^{(i)}$ указывает на возможность построения томографических схем оценки h_1 по измеряемым временам распространения изгибных

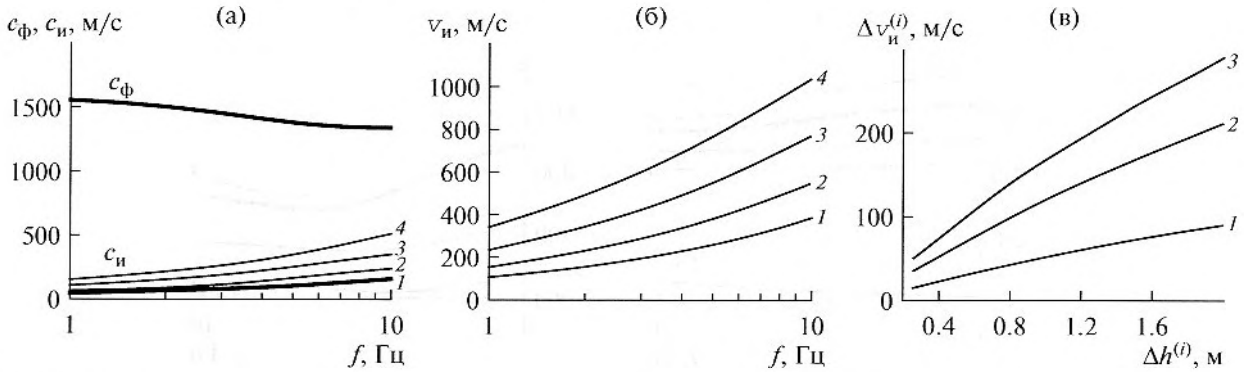


Рис. 3. (а) – Зависимости фазовых скоростей фундаментальной (c_f) и изгибной (c_n) волн от частоты для разных значений толщины льда h_1 : 1) $h_1 = 1$ м, 2) $h_1 = 2$ м, 3) $h_1 = 4$ м, 4) $h_1 = 8$ м. Видно, что фазовая скорость c_f фундаментальной моды практически не зависит от h_1 . (б) – Частотная зависимость групповой скорости v_n изгибной волны при разной толщине льда для тех же значений h_1 , что и на (а). (в) – Приращение $\Delta v_n^{(i)}$ групповой скорости изгибной волны как функция изменения глубины $\Delta h^{(i)}$ для трех фиксированных частот: $f = 1$ Гц (1), $f = 5$ Гц (2), $f = 10$ Гц (3).

волн между точками приемов сигналов при наличии достаточной априорной информации о фоновых значениях $h_1^{(0)}$. Важный вопрос, требующий отдельного рассмотрения и выходящий за рамки настоящей работы, связан с возможностью определения в натурном эксперименте времен распространений изгибных волн с требуемой точностью.

Вопрос о зависимости дисперсионных кривых фундаментальной моды от характеристик дна при наличии ледового покрова ранее в литературе подробно не обсуждался. Известно, однако [4], что пониженные значения скорости сдвиговых волн в донных слоях могут указывать на наличие нефтяных залежей. В связи с этим представляет интерес исследовать, как зависят дисперсионные кривые фундаментальной моды от изменения скорости сдвиговых волн в дне. На рис. 4а представлены дисперсионные зависимости, полученные с помощью (4), для разных значений сдвиговых скоростей в донном грунте c'_i (остальные параметры задачи те же самые, что использовались при построении рис. 2б). Рассматриваемый диапазон изменений c'_i от 1200 до 2000 м/с при фиксированном значении скорости продольных волн $c'_l = 3500$ м/с соответствует сравнительно небольшому изменению коэффициента Пуассона от 0.26 до 0.45. При этом наблюдаемое изменение дисперсионных кривых (рис. 4а) весьма существенно. Так, на частотах $f \approx 5$ Гц изменение скорости сдвиговых волн на $\Delta c'_i = 200$ м/с приводит к изменению фазовой скорости фундаментальной моды на $\Delta c_f \approx 150$ м/с. Следует отметить, что при этом дисперсионная кривая изгибной моды практически не изменяется (рис. 4а).

При рассмотрении групповых скоростей v_ϕ фундаментальной моды оказалось, что в рассматриваемом диапазоне частот имеется минимум v_ϕ

(рис. 4б), причем уменьшение значения c'_i приводит к смещению минимума групповой скорости в область низких частот, минимальное значение v_ϕ при этом уменьшается. Наличие немонотонной зависимости групповой скорости фундаментальной моды от частоты накладывает дополнительные требования на выбор частотного диапазона при поиске области линейной зависимости Δv_ϕ от $\Delta c'_i$. Для рассматриваемых параметров задачи имеет смысл использовать более низкие частоты (что предпочтительнее для зондирования глубинных структур дна), где существуют области линейной взаимосвязи возмущений групповых скоростей Δv_ϕ и изменений скоростей $\Delta c'_i$ сдвиговых волн в дне. Следует отметить, что на дисперсионной кривой изгибной моды v_n также наблюдается минимум групповой скорости, но на более низких частотах f , не превышающих 0.2 Гц [9].

Как оказалось, дисперсионные кривые фундаментальной моды заметно зависят и от толщины жидкого слоя (рис. 5). Важно, что поведение этой зависимости при изменении скорости поперечных волн в дне отличается от поведения зависимостей скоростей c_ϕ и v_ϕ на рис. 4. Видно (рис. 4а), что при изменении скорости сдвиговых волн в дне дисперсионные кривые смещаются в основном параллельно оси Oy , в то время как изменение толщины водного слоя приводит к изменению угла наклона дисперсионных кривых при переходе между асимптотиками (рис. 5а). Рассмотрение групповых скоростей v_ϕ (рис. 5б) показывает, что при уменьшении глубины h_1 минимум v_ϕ смещается в область высоких частот, при этом само минимальное значение не изменяется. Отмеченные особенности дисперсионных зависимостей фундаментальной моды могут быть использованы при совместной оценке толщины водного слоя и скорости попереч-

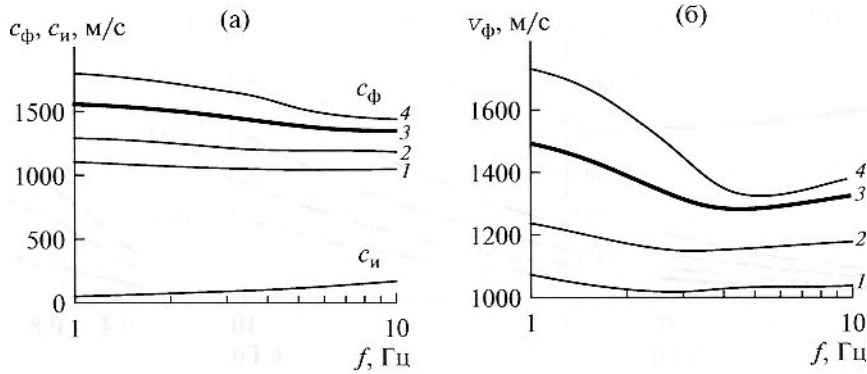


Рис. 4. (а) – Частотные зависимости фазовых скоростей фундаментальной (c_ϕ) и изгибной (c_{ni}) волн для разных значений сдвиговых скоростей в дне c'_i : 1) $c'_i = 1200$ м/с, 2) $c'_i = 1400$ м/с, 3) $c'_i = 1700$ м/с, 4) $c'_i = 2000$ м/с. Видно, что фазовая скорости c_{ni} изгибной моды не меняется при изменении c'_i . (б) – Зависимости групповой скорости v_ϕ при разных значениях сдвиговых скоростей в дне для тех же значений c'_i , что и на (а).

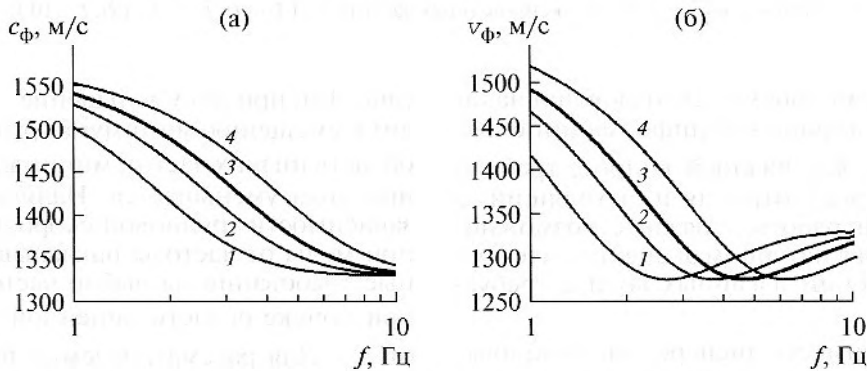


Рис. 5. (а) Частотные зависимости фазовых скоростей c_ϕ фундаментальной моды для разных значений толщины жидкого слоя h_2 : 1) $h_2 = 176$ м, 2) $h_2 = 126$ м, 3) $h_2 = 101$ м, 4) $h_2 = 76$ м. (б) Зависимости групповой скорости v_ϕ при разных толщинах жидкого слоя для тех же значений h_2 , что и на (а).

ных волн в дне на основе анализа экспериментально измеряемых сигналов.

ВОЛНОВАЯ СТРУКТУРА ПОЛЯ, ГЕНЕРИРУЕМОГО ПОВЕРХНОСТНЫМ ИЗЛУЧАТЕЛЕМ

Выше было получено дисперсионное уравнение (4) для распространяющихся в рассматриваемой слоистой среде волн. Представляет интерес расчет волнового поля, генерируемого источниками, расположенными в различных местах рассматриваемой слоистой среды. В качестве примера ниже рассматривается локализованный силовой источник, воздействующий на участок поверхности льда с силой $F_0 H(a-r) e^{-i\omega t}$ (рис. 1),

где $H(a-r) = \begin{cases} 1, & \text{при } r \leq a \\ 0, & \text{при } r > a \end{cases}$ – функция Хевисайда.

Это воздействие учитывается изменением условия на верхней свободной границе рассматриваемой слоистой среды:

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = \frac{F_0}{\pi a^2} H(a-r) e^{-i\omega t}. \quad (6)$$

Модель источника конечных размеров позволяет рассчитать более точно по сравнению с моделью точечного источника поле низкоскоростной изгибной моды в условиях, когда длина волны оказывается сопоставима с размером источника.

Подстановка решений (2) в граничные условия (3) с учетом (6) приводит к системе алгебраических уравнений для коэффициентов $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$, $D(k)$, $E(k)$, $F(k)$, $G(k)$, $H(k)$. Коэффициенты $E(k)$ и $F(k)$, найденные из этой системы, позволяют получить выражение для потенциала смещения в воде в виде

$$\phi_0 = \frac{F_0 \omega^2 \rho}{\pi a \mu^2} \int_0^\infty \frac{dp(k, \omega, z)}{d(k, \omega)} J_0(kr) J_1(ka) dk, \quad (7)$$

где $dp(k, \omega, z)$ имеет вид

$$dp(k, \omega, z) = \alpha_i \times \left[(k^2 - \alpha_i^2)^2 \sin \alpha_i h_1 + 4k^2 \alpha_i \alpha_i' \sin \alpha_i h_1 \right] \times \left[\frac{\omega^4 \rho_0 \rho_0'}{\mu^2} \alpha_i' \sin(z + h_2) \alpha_0 + i \alpha_0 \times \left((k^2 - \alpha_i'^2)^2 + 4k^2 \alpha_i' \alpha_i' \right) \cos(z + h_2) \alpha_0 \right]. \quad (8)$$

Выражение (7) для потенциала φ_0 позволяет найти давление P в воде:

$$P(z, \omega) = -\lambda_0 \Delta \varphi_0 = \frac{F_0 \omega^4 \rho_0 \rho_0'}{\pi a \mu^2} \int_0^\infty \frac{dp(k, \omega, z)}{d(k, \omega)} J_0(kr) J_1(ka) dk. \quad (9)$$

Вычисляя интеграл в выражении (9) при помощи вычетов, получаем

$$P(z, \omega) = i \frac{F_0 \omega^4 \rho_0 \rho_0'}{a \mu^2} \sum_n H_0^{(1)}(k_n r) J_1(k_n a) \frac{dp(k_n, \omega, z)}{d'(k_n, \omega)}, \quad (10)$$

где $H_0^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля 1-го рода, $k_n = \omega/c_n$, c_n – фазовая скорость n -ой моды; $d'(k_n, \omega)$ – значение производной (8) по k , взятое при $k = k_n$; k_n – корни дисперсионного уравнения (4). Выражение (10) учитывает только моды, распространяющиеся вдоль слоистой структуры и представляющие интерес для задачи восстановления параметров сред; волны, уходящие в дно, интереса для данной работы не представляют и не учитываются.

На рис. 6 показано вертикальное распределение амплитуды давления в воде для изгибной и фундаментальной мод, соответствующих различным корням k_n , для двух случаев $c_i < c_0 < c_l$ и $c_0 < c_l < c_i$. Расчеты проведены для трех значений частоты $f = 10, 50$ и 80 Гц при значениях параметров сред, использованных при построении кривых на рис. 2. Линейный размер источника полагался равным $a = 0.5$ м, а расстояние до точки наблюдения составляло $r = 150$ м. Для выбранных значений r и частот f справедливо условие $k_n r \gg 1$, что позволяет рассматривать выражение для поля давлений в виде (10) и не учитывать затухающие волны, соответствующие комплексным k_n .

На рис. 6а видно, что изгибная волна имеет наибольшее значение амплитуды давления на границе “лед–вода”, а при увеличении глубины давление этой моды спадает по закону, близкому к экспоненциальному, причем спад тем сильнее, чем больше частота. Фундаментальная мода локализована при низких частотах в придонной области, однако с повышением частоты абсолютный максимум давления в ней постепенно смещается вверх и при $f = 80$ Гц имеет место уже на границе “лед–вода”. Похожий эффект, но в отсутствие ледяного слоя, описан в работе [17].

В случае $c_0 < c_l < c_i$ (рис. 6б) уменьшение давления изгибной моды с глубиной становится еще более заметным. При этом характер зависимости амплитуды фундаментальной моды от глубины для рассматриваемых параметров модели среды существенно не изменяется.

Следует отметить, что на всех частотах (см. рис. 6) в приповерхностной области по амплитуде давления доминирует изгибная волна, эффективность возбуждения которой с ростом частоты постепенно уменьшается. В то же время фундаментальная мода в основном формирует низкочастотное поле вблизи дна. Это дает возможность разделить фундаментальную и изгибную моды в принимаемом сигнале при расположении приемников акустического давления в разных точках по глубине. При повышении частоты (для рассматриваемого случая при $f > 80$ Гц) эта возможность пропадает, так как и фундаментальная, и изгибная моды локализируются вблизи поверхности льда.

Графики зависимости амплитуд гидроакустических мод и мод ледяного слоя от глубины не приводятся для сокращения объема настоящей работы. Данные зависимости хорошо известны, например, зависимость давления от глубины у гидроакустических мод в рассматриваемом случае однородного жидкого слоя изменяется по закону, близкому к синусоидальному [18]. Эффективность возбуждения гидроакустических мод с ростом частоты увеличивается, что проявляется на больших глубинах, где они дают решающий вклад в общее поле. Моды ледяного слоя, как и “квазипродольная” мода, локализованы в области границы “лед–вода”. Поведение амплитуды давления этих волн в зависимости от глубины и частоты такое же, как у изгибной моды.

СОПОСТАВЛЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

В качестве примера использования полученных выше теоретических результатов для анализа экспериментальных данных далее рассматриваются результаты обработки записей сейсмоакустических сигналов, выполненных в условиях ледовой обстановки. Эксперимент [19] проводился в период с 19 по 22 марта 2012 г. на Ладожском озере в бухте Владимировская Приозерского района Ленинградской области. Исследовалась возможность регистрации и идентификации сигналов, возбуждаемых различными источниками, в условиях водоема, покрытого льдом. В настоящей работе рассматриваются лишь предварительные результаты обработки измерений, проводившихся на поверхности льда с помощью сейсмоприемника СМЗ-ОС [20]. Измерительным элементом использованного сейсмоприемника является высокочувствительный маятник, позволяющий измерять вертикальную компоненту смещений в диапазоне от 1×10^{-4} до 5×10^{-3} м с частотой дис-

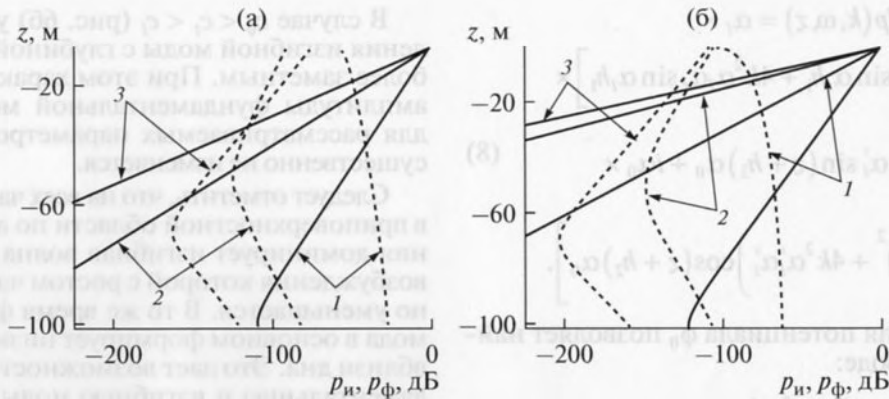


Рис. 6. Зависимость давления изгибной (p_n , сплошные линии) и фундаментальной (p_ϕ , пунктирные линии) мод от глубины z : (а) случай $c_t < c_0 < c_l$, (б) случай $c_0 < c_t < c_l$. Здесь $p_n = 20 \lg(|p_n|/\max|p_n + p_\phi|)$, $p_\phi = 20 \lg(|p_\phi|/\max|p_n + p_\phi|)$. Зависимости рассчитывались для трех частот f : 1) $f = 10$ Гц, 2) $f = 50$ Гц, 3) $f = 80$ Гц.

кретизации 100 Гц. Для правильной установки маятника на поверхности льда вырубалось небольшое углубление, дно которого засыпалось песком (рис. 7); после установки “нулевого” положения маятника он накрывался специальным чехлом и засыпался снегом для уменьшения влияния ветровой помехи. Толщина льда в месте проведения эксперимента составляла в среднем ≈ 0.3 м, глубина ≈ 6 м. Сейсмоприемник СМЗ-ОС располагался на расстоянии ≈ 50 м от берега. Далее рассматриваются записи сигналов от двух различных источников. В первом случае была проведена серия ударов о лед кувалдой на расстоянии ≈ 20 м от точки приема. Во втором случае был записан сигнал от мощного промышленного взрыва, произведенного на расстоянии ≈ 100 км от места проведения эксперимента.

На рис. 8 приведена запись ударов о лед кувалдой. Ожидалось, что принимаемый сигнал в основном будет сформирован изгибной модой. В подтверждение этой гипотезы на рис. 8б приведена спектрограмма одного из четырех сигналов, представленных на рис. 8а. На рис. 8б отчетливо видна



Рис. 7. Установка сейсмоприемника СМЗ-ОС в вырубке на поверхности льда.

зависимость скорости прихода сигналов от частоты. Тонкие белые линии на рис. 8б представляют дисперсионные зависимости фазовой скорости изгибной моды, рассчитанные на основе (4) для следующих параметров среды: $\rho_0 = 1000$ кг/м³, $\rho = 900$ кг/м³, $\rho' = 2000$ кг/м³, $c_0 = 1500$ м/с, $c'_1 = 3500$ м/с, $c'_2 = 1700$ м/с, $c_l = 3200$ м/с, $c_l = 1900$ м/с, $h_2 = 6$ м, для разных значений толщины льда $h_1 = 0.20, 0.25$ и 0.30 м. Видно, что все три кривые удовлетворительно описывают экспериментальные данные, что указывает на сравнительно низкое качество оценки толщины льда, получаемое с использованием дисперсионных кривых в рассматриваемом случае. Улучшение получаемых оценок среды может быть основано на применении методов спектрального анализа с высоким разрешением [21], а также на использовании априорной информации об источнике или на оценке параметров источников [9] при решении задачи восстановления характеристик среды по экспериментальным данным.

На рис. 9 представлены результаты записи удаленного взрыва. В этом случае ожидалось, что в принимаемом сигнале будет присутствовать “фундаментальная” мода. На рис. 9а видно, что перед приходом изгибной моды, соответствующей резкому увеличению амплитуды сигнала, поле представляет собой почти периодический процесс. На рис. 9б изображена спектрограмма сигнала, приведенного на рис. 9а. Отчетливо видна дисперсионная кривая изгибной моды, аналогичная той, что представлена на рис. 8а. Видно также, что во всем диапазоне времен наблюдения присутствует узкополосный сигнал, локализованный в частотной области вблизи 2 Гц. Известно [1, стр. 242 и далее], что похожая, почти синусоидальная волна, возникает при распространении импульса в жидком слое. В случае жидкого дна частота этой волны оценивается как критическая частота первой нормальной волны $f_k = c_0/4\Delta h \sqrt{1 - (c_0/c'_1)^2}$, ниже которой волны являются нераспространяю-

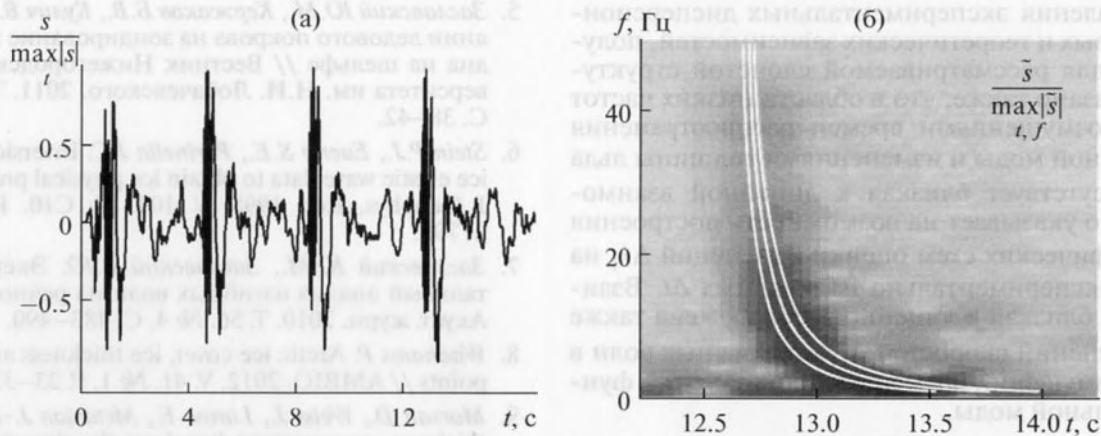


Рис. 8. (а) – Нормированные сигналы с выхода сейсмоприемника от серии ударов кувалдой о лед; (б) – нормированная спектрограмма одного из приведенных на (а) сигналов, где также отмечены тонкими белыми линиями теоретические дисперсионные кривые изгибной моды, рассчитанные для трех значений толщины льда h_1 : кривая слева – $h_1 = 0.20$ м, средняя кривая – $h_1 = 0.25$ м, кривая справа – $h_1 = 0.30$ м. Численные значения параметров сред указаны в тексте.

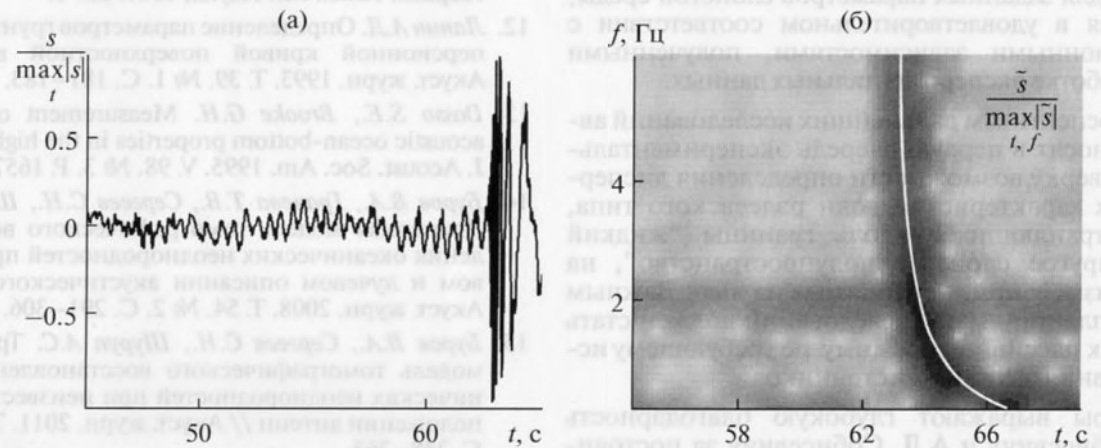


Рис. 9. (а) – Нормированный сигнал сейсмоприемника от удаленного промышленного взрыва; (б) – нормированная спектрограмма этого сигнала, где тонкая белая линия обозначает теоретическую дисперсионную кривую изгибной моды, рассчитанную для толщины льда $h_1 = 0.25$ м.

щимися. Для характерных параметров $\Delta h \approx 6$ м, $c_0 \approx 1500$ м/с минимальное значение $f \approx 70$ Гц. Напротив, при наличии сдвиговой упругости в дне первая нормальная волна существует на всех частотах. Конкретное значение 2 Гц сигнала, полученное в эксперименте, может объясняться, например, исходным спектральным составом сигнала, дисперсионными характеристиками трассы распространения от места взрыва и требует дальнейшего анализа, выходящего за рамки данной статьи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено дисперсионное уравнение для слоистой среды, состоящей из твердого слоя (лед), жидкого слоя (морская толща) и упругого однородного полупространства (дно). На основе этого уравнения исследованы некоторые общие закономерности распространения упругих волн в

условиях, близких к условиям мелкого моря, покрытого льдом. Многогранность рассматриваемой задачи не позволяет осуществить полный анализ всех возможных случаев распространения волн в рамках отдельно взятой статьи. Тем не менее, полученное дисперсионное уравнение (а также выражение для акустического поля в гидроакустическом волноводе) может быть использовано как “инструмент”, позволяющий провести подобное исследование для конкретных задач. Так, например, показано, что в низкочастотной области разделение в принимаемых данных полей изгибной моды и фундаментальной донной волны может быть основано на пространственно-временном анализе принимаемых полных полей при соответствующем выборе частотного диапазона. Раздельное рассмотрение изгибной и фундаментальной мод позволило наметить возможные пути оценки толщины льда и жидкого слоя, а также скорости поперечных волн в дне на основе

сопоставления экспериментальных дисперсионных кривых и теоретических зависимостей, полученных для рассматриваемой слоистой структуры. Показано также, что в области низких частот между возмущениями времен распространения Δt изгибной моды и изменениями толщины льда Δh_1 присутствует близкая к линейной взаимосвязь, что указывает на возможность построения томографических схем оценки изменений Δh_1 на основе экспериментально измеряемых Δt . Взаимосвязь, близкая к линейной, обнаружена также для изменений скоростей $\Delta c_1'$ поперечных волн в дне и возмущений времен распространений фундаментальной моды.

Представлены предварительные результаты обработки экспериментальных данных, полученных при регистрации сейсмоакустических сигналов на льду. Показано, что дисперсионные кривые изгибной моды, аналитически рассчитанные на основе (4) для заданных параметров слоистой среды, находясь в удовлетворительном соответствии с дисперсионными зависимостями, полученными при обработке экспериментальных данных.

К перспективам дальнейших исследований авторы относят в первую очередь экспериментальную проверку возможности определения дисперсионных характеристик волн рэлеевского типа, распространяющихся вдоль границы “жидкий слой–упругое слоистое полупространство”, на основе измерений, проводимых на льду. Важным этапом планируемых исследований должен стать переход к пассивному режиму, не требующему использования активных источников.

Авторы выражают глубокую благодарность Л.Е. Собисевичу и А.Л. Собисевичу за постоянное внимание к работе, важные замечания и советы, а также С.П. Вдовиченко, теоретические наработки которого позволили довести рассматриваемую работу до конца.

Работа выполнена при поддержке Программы № 4 фундаментальных исследований Президиума РАН, а также при поддержке грантов РФФИ (14-05-00762 и 14-05-31246).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
2. *Руденко О.В., Собисевич А.Л., Собисевич Л.Е., Хедберг К.М., Шамаев Н.В.* Нелинейная модель гранулированной среды, содержащей слои вязкой жидкости и газовые полости // *Акуст. журн.* 2012. Т. 58. № 1. С. 112–120.
3. *Собисевич А.Л., Разин А.В.* Геоакустика слоистых сред. М.: ИФЗ РАН, 2012. 210 с.
4. *Заславский Ю.М., Кержаков Б.В., Кулич В.В.* Вертикальное сейсмическое профилирование на морском шельфе // *Акуст. журн.* 2008. Т. 54. № 3. С. 483–490.
5. *Заславский Ю.М., Кержаков Б.В., Кулич В.В.* О влиянии ледового покрова на зондирование морского дна на шельфе // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского.* 2011. Т. 5. № 3. С. 38–42.
6. *Stein P.J., Euerle S.E., Parinella J.C.* Inversion of pack ice elastic wave data to obtain ice physical properties // *J. Geophys. Res.* 1998. V. 103. № C10. P. 21783–21793.
7. *Заславский Ю.М., Заславский В.Ю.* Экспериментальный анализ изгибных волн на речном льду // *Акуст. журн.* 2010. Т. 56. № 4. С. 483–490.
8. *Wadhams P.* Arctic ice cover, ice thickness and tipping points // *AMBIO.* 2012. V. 41. № 1. P. 23–33.
9. *Marsan D., Weiss J., Larose E., Metaxian J.-P.* Sea–ice thickness measurement based on the dispersion of ice swell // *J. Acoust. Soc. Am.* 2011. V. 131. № 1. P. 80–91.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
11. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 287 с.
12. *Ланин А.Д.* Определение параметров грунта по дисперсионной кривой поверхностной волны // *Акуст. журн.* 1993. Т. 39. № 1. С. 181–183.
13. *Dosso S.E., Brooke G.H.* Measurement of seismoacoustic ocean-bottom properties in the high Arctic // *J. Acoust. Soc. Am.* 1995. V. 98. № 3. P. 1657–1666.
14. *Буров В.А., Грачева Т.В., Сергеев С.Н., Шуруп А.С.* Двумерная модель томографического восстановления океанических неоднородностей при волновом и лучевом описании акустического поля // *Акуст. журн.* 2008. Т. 54. № 2. С. 291–306.
15. *Буров В.А., Сергеев С.Н., Шуруп А.С.* Трехмерная модель томографического восстановления океанических неоднородностей при неизвестном расположении антенн // *Акуст. журн.* 2011. Т. 57. № 3. С. 348–363.
16. *Гончаров В.В., Зайцев В.Ю., Куртепов В.М., Нечаев А.Г., Хилько А.И.* Акустическая томография океана. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1997. 256 с.
17. *Безруков А.В., Приходько В.Ю., Тютекин В.В.* Расчет характеристик нормальных волн мелкого моря с упругим дном (импедансный метод) // *Акуст. журн.* 1987. Т. 33. № 5. С. 805–813.
18. *Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П.* Теоретические основы акустики океана. М.: Наука, 2007. 369 с.
19. Отчет № 02/703-2012 по научно-исследовательской работе “Исследование наведенных сейсмических и геоакустических полей в мелком море, включая квазипоперечные структуры, и обоснование требований к техническим средствам мониторинга запасов нефти и газа (заключительный).” Шифр “Зондирование – 1 – ИФЗ”. ФГБУН Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН (ИФЗ РАН). Санкт-Петербург–Москва, 2012.
20. <http://www.ceme.gsras.ru/1251/v2.htm>
21. *Гордиенко В.А., Краснописцев Н.В., Некрасов В.Н., Торопов В.Н.* Локализации источников излучения на корпусе корабля при одновременном использовании комбинированного приемника и методов спектрального анализа с высоким разрешением // *Акуст. журн.* 2011. Т. 52. № 2. С. 179–191.