

АКУСТИКА СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ
ТВЕРДЫХ СРЕД. ГЕОЛОГИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

УДК 550.843

ПРИМЕНЕНИЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
ДЛЯ СЕЙСМИЧЕСКОГО ПРОФИЛИРОВАНИЯ

© 2014 г. Л. С. Загорский, В. Л. Шкуратник

Московский государственный горный университет

119991 Москва, Ленинский пр-т, 6

E-mail: ftkp@mail.ru

Поступила в редакцию 05.06.2013 г.

Рассмотрен метод решения обратной задачи нахождения двухмерного вертикального профильного сейсмического скоростного разреза продольных и поперечных волн в массиве по регистрируемому на поверхности волнам поляризации Рэлея. Приведен алгоритм метода, основанный на применении теории возмущений и почти-периодических функций, а также алгебраических многочленов Б.М. Левитана. Возможности метода иллюстрируются результатами сравнения с геологическими данными, полученными в районах Северного Кавказа с помощью активной сейсмологии. Сформулированы условия устойчивости вычисления и приводится пример, основанный на данных микросейсм, полученных ОИФЗ РАН на участке в Северной Осетии.

Ключевые слова: двухмерная обратная задача, сейсмический разрез, волны Рэлея, возмущения, алгебраические многочлены, почти-периодические функции, микросейсм, геологические данные.

DOI: 10.7868/S0320791914030174

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] авторами была рассмотрена одномерная обратная задача нахождения по амплитудам и фазам волны Рэлея, регистрируемой на поверхности массива, скоростей продольных и поперечных волн в функции от его глубины z . Подобная задача в двухмерной постановке при изменении скорости волны Рэлея вдоль горизонтального профиля ранее не рассматривалась.

В связи с этим в рамках настоящей статьи предлагается теоретическое и экспериментальное обоснование возможности применения развитых в [1] подходов для определения двухмерных глубоких профильных вертикальных сейсмических разрезов при возрастающих шагах расчета скорости поперечных и продольных волн с применением теории почти-периодических функций [2] и теории возмущений. Основная идея метода состоит в коррекции амплитуд волн Рэлея в двухмерном случае и границ лакун в спектре, опираясь на теорию возмущений. Использование аппарата почти-периодических спектральных собственных функций, возникающих при обработке регистрируемых на поверхности сейсмограмм, позволяет отбрасывать большие периоды на резонансных частотах и использовать малые почти-периоды.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим свободное от напряжений неоднородное по вертикали и горизонтали упругое

полупространство $z \leq 0$ с постоянной плотностью и меняющимся модулем упругости, зависящим от координат x, z . Для решения обратной задачи определения сейсмического разреза полупространства задаются являющиеся функцией координат и времени смещения частиц волны Рэлея в точках профиля, где эта волна регистрируется. При этом число указанных точек составляет не менее восьми, а их шаг равен половине длины волны на преобладающей высокой частоте. Кроме того, предполагается, что кривизна профиля (отклонение от прямой линии по горизонтали) много меньше длины волны на максимальной из анализируемых частот, а длина профиля равна длине волны на низшей частоте исследования.

Плоско-слоистая среда считается однородной по координате y . Скорость распространения продольных и поперечных волн аппроксимируется функцией с непрерывной второй производной, причем горизонтальные изменения скоростей много меньше вертикальных.

Задача решается либо сразу для всего профиля, опираясь на теорию возмущений для глобальной фазовой скорости и вычисляемых локальных амплитуд и опорных максимальной и минимальной скоростей, либо текущим разбиением на участки, имеющие свои фазовые скорости и амплитуды.

Решение обратной задачи определения скорости поперечных (либо продольных) волн ищется в классе непрерывных функций, разлагаемых в

ряд Тейлора и имеющих непрерывную вторую производную.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

В [3] было доказано, что разделение переменных приводит для рэлеевских волн к задаче Штурма—Лиувилля, но в матричной форме, для ряда систем координат, в том числе и декартовых. В [4] приводится возникающая после разделения переменных система уравнений для плоских монохроматических волн вертикальной поляризации.

В [1] путем подстановки Трикоми было показано, что уравнения для монохроматических волн преобразуются к виду, описывающему взаимодействие и трансформацию компонент волны Рэлея:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left[\frac{\omega^2}{V_s^2(z)} - k^2 \frac{\lambda(z) + 2\mu(z)}{\mu(z)} - \frac{\sqrt{\mu(z)''}}{\sqrt{\mu(z)}} \right] u = \\ = \frac{\delta(z - \zeta)}{\mu(\zeta)} * f_1(z, \lambda, \mu), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \left[\frac{\omega^2}{V_p^2(z)} - k^2 \frac{\mu(z)}{\lambda(z) + 2\mu(z)} - \frac{\sqrt{\lambda(z) + 2\mu(z)''}}{\sqrt{\lambda(z) + 2\mu(z)}} \right] w = \\ = \frac{\delta(z - \zeta)}{\lambda(\zeta) + 2\mu(\zeta)} * f_2(z, \lambda, \mu), \end{aligned} \tag{1}$$

где ω — частота; k — волновое число; $\lambda(z), \mu(z)$ — постоянные Ламе; u, w — компоненты вектора смещений частиц волны Рэлея; z — координата; ζ — сдвиг аргумента в свертке; знак $*$ в правой части (1) обозначает свертку,

$$\begin{aligned} f_1(z, \lambda, \mu) = -ik \frac{\lambda + \mu}{\sqrt{\lambda + 2\mu}} \times \\ \times \left[w' + w \left(-\frac{1}{2} \frac{\lambda' + 2\mu'}{\lambda + 2\mu} + \frac{\mu'}{\lambda + \mu} \right) \right], \\ f_2(z, \lambda, \mu) = -ik \left[\frac{\partial}{\partial z} (\lambda u) + \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right]. \end{aligned} \tag{2}$$

Свертка появляется в связи с взаимодействием P - и SV -волн, их трансформацией и приводит к вращению компонент волны Рэлея. Поэтому уравнения (1) рассматриваются как система, а разделение компонент происходит на резонансных частотах SV -волны при ориентации сейсмоприемников в вертикальной плоскости. Это обеспечивает следующее соотношение амплитуд компонент: $A_{SV} > A_p$. Выделение резонансных частот волны осуществляется сортировкой спектральных амплитуд по убыванию. Аналогичное (1) преобразование для нелинейных волн применено в [5].

Граничные условия для уравнений (1) на вещественные компоненты вектора смещений и тензора напряжений при $z = 0$:

$$\begin{aligned} u(0) = 0, \quad w(0) = 1, \quad u'(0) = 1, \\ u''(0) = 0, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{zz} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь граничные условия для прямой задачи приведены в напряжениях, а для обратной — в смещениях. В качестве исходного уравнения было взято уравнение движения упругих волн в локально-изотропном твердом теле. Решение было выбрано в виде разложения по плоским волнам. Но так как реальный фронт не плоский, то нормируя предварительно трассы по максимуму амплитуды, для SV -компоненты после нормирования получаем, что на свободной поверхности амплитуда равна 1.

Требование того, чтобы длина волны была много больше размера слоя, необходимо для представления собственной функции в виде суммы косинуса и минимальной интегральной добавки. Небольшое же приращение шага по глубине должно приводить к небольшим изменениям (приращениям) потенциала, модуля сдвига, собственной функции. Это позволяет производить расчеты на разных шагах независимо друг от друга и избежать накопления ошибок при продолжении на фиксированном шаге. Таким образом, глубина расчета ограничена фактически только длиной волны в дискретном спектре.

В (1) для SV -компоненты волны Рэлея собственное значение записывается в виде

$$\lambda_{sv} = \frac{\omega^2}{V_s^2(0)} - K^2 \frac{\lambda(0) + 2\mu(0)}{\mu(0)}, \tag{4}$$

а для P -компоненты в виде

$$\lambda_p = \frac{\omega^2}{V_p^2(0)} - K^2 \frac{\mu(0)}{\lambda(0) + 2\mu(0)}. \tag{5}$$

Здесь K — волновое число волны Рэлея. Анализ выражения (4) показывает, что волновое число для SV -компоненты больше, а фазовая скорость меньше, чем для P компоненты.

Для SV -компоненты в декартовых координатах X, Z (далее под X понимается двухмерная матрица координат источников и приемников) найдем прямые Фурье-преобразования $F_1(\omega, k, x_1), F_2(\omega, k, x_2)$ сигналов в точках профиля x_1, x_2 по времени t и координате x (от плюс-минус бесконечности до фиксированного x). По В.С. Владимирову [6], можно получить функцию Грина на свободной поверхности $z = 0$ для случая зависимости скорости поперечной волны от вертикальной координаты z :

$$\begin{aligned} g(\omega, k, x_1, x_2) = -F_1(\omega, k, x_1) \bar{F}_2(\omega, k, x_2) / \mu(x_0) W(x_0), \\ x_1 \leq x_0 \leq x_2, \\ g(\omega, k, x_2, x_1) = -F_2(\omega, k, x_2) \bar{F}_1(\omega, k, x_1) / \mu(x_0) W(x_0), \\ x_2 \leq x_0 \leq x_1. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь F — прямое Фурье-преобразование нормированных по максимуму амплитуды записей в ба-

зовой x_1 и текущей x_2 точках профиля, $\bar{F}_{1,2}$ – комплексно-сопряженная функция к $F_{1,2}(\omega, k, x_1)$. Указанная нормировка приводит волну к плоской. Вронскиан равен

$$\begin{aligned} W(x_0) &= F_0(\omega, k, x_0)(-ik)\bar{F}_0(\omega, k, x_0) - \\ &- \bar{F}_0(\omega, k, x_0)(ik)F_0(\omega, k, x_0) = \\ &= 2\bar{F}_0(\omega, k, x_0)(-ik)F_0(\omega, k, x_0). \end{aligned}$$

Далее очевидно, что спектральная матрица-функция равна

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, \omega, k) &= \frac{F_1(\omega, k, x_1)}{2ikF_0(\omega, k, x_0)\mu(x_0)}, \quad x_0 = x_2, \\ g(x_2, x_1, \omega, k) &= \frac{F_2(\omega, k, x_2)}{2ikF_0(\omega, k, x_0)\mu(x_0)}, \quad x_0 = x_1. \end{aligned} \quad (7)$$

После обратного преобразования Фурье и нормировки по амплитуде G -функция Грина будет выглядеть так (при равных спектрах в двух точках – это формула для плоской волны из [6]):

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, \omega) &= \\ &= \sum_k \frac{F_1(\omega, k, x_1)}{2ikF_2(\omega, k, x_2)\mu(x_2)} \exp(-ik|x_1 - x_2|), \\ G(x_2, x_1, \omega) &= \\ &= \sum_k \frac{F_2(\omega, k, x_2)}{2ikF_1(\omega, k, x_1)\mu(x_1)} \exp(-ik|x_2 - x_1|). \end{aligned} \quad (8)$$

Построенная функция (8) обладает всеми свойствами функции Грина: она симметрична, удовлетворяет волновому уравнению и красивым условиям в двух точках регистрации, ее вторая производная по координате x дает дельта-функцию, на ее диагонали имеется скачок производной.

В реальной геосреде возможны почти горизонтальные слои с малыми изменениями в гипсометрии пластов по сравнению с длиной самой низкочастотной волны, и тогда необходима постановка задачи в возмущениях [7], иначе требуется применение области расчета с изменяющейся глобальной дисперсией фазовой скорости. Интегральное уравнение Гельфанда–Левитана, описывающее волновое поле, имеет вид

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2) &= -A(x_1, x_2) \mp \int_{\mp\infty}^{x_1} G(s, x_2)A(x_1, s)ds, \\ G(x_1 + t, x_2) &= \\ &= -A(x_1 + t, x_2) \mp \int_{\mp\infty}^{x_1+t} G(s, x_2)A(x_1 + t, s)ds, \end{aligned} \quad (9)$$

где t – сдвиг, x_1, x_2 – двумерные матрицы координат источников и приемников. В нуле z имеем

$$G(x_1, 0, x_2, 0) = -\delta(x_1 - x_2, 0) \mp \int_{\mp\infty}^{x_1, 0} G(s, x_2)\delta(x_1, s)ds. \quad (10)$$

Здесь возможны три случая:

1) среда с горизонтальной однородностью $A = \text{const}$, и поправка p равна нулю, $m_j(\omega)$ – нормировочные числа не меняются вдоль профиля:

$$A'_x(x_1, x_1) = \left(\sum_j \frac{1}{m_j(\omega)} \right)'_x = 0, \quad (11)$$

а функция Грина определена интегрированием по профилю равномерно распределенных источников. При этом интеграл в (10) на бесконечности стремится к нулю;

2) среда с горизонтальной неоднородностью

$$\frac{\partial A}{\partial t} \neq 0,$$

и тогда решаем уравнение для поправок;

3) в формуле (9) анализируются большие глубины и соответственно малые значения волнового числа, тогда главной в функции Грина становится ее амплитудная часть. При этом след на поверхности функции Грина виден в формуле (10).

Из уравнений (9) получаем уравнение для поправок (возмущений)

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{\partial A}{\partial t} + GA. \quad (12)$$

Переходя к разностной схеме, получим при $z = 0$

$$\frac{G(x_1 + t, x_1) - G(x_1, x_1)}{t} = -\frac{A(x_1 + t, x_1) - A(x_1, x_1)}{t} + \frac{1}{2}\{G(x_1, x_1 + t)A(x_1 + t, x_1) + G(x_1, x_1)A(x_1, x_1)\}, \quad (13)$$

откуда находим A , и, следовательно, поправка p к потенциалу q равна

$$p = 2\frac{A(x_1 + t, x_1) - A(x_1, x_1)}{t}. \quad (14)$$

Из формулы для функции Грина и неравенства нулю интеграла при $x_1 = x_2$ следует, что вторичный источник и рассчитываемая точка совпадают.

В уравнении Гельфанда–Левитана в возмущенной постановке интеграл в (9)–(10) в бесконечных пределах равен некоторой константе. Слой же толщиной t , уходящий вглубь массива, уникален для высокой частоты при длине волны, равной его половине, а также на низшей частоте при длине волны, равной его удалению от начала профиля. Поэтому прямые Фурье-преобразования до текущей координаты x позволяют определить локальные дисперсионные кривые (их участки), из которых выбираются минимальные и максимальные скорости, фактически определяющие локальный линейный тренд. Далее для протяженного участка профиля находятся амплитуды как функция частоты и волнового числа. Эти данные используются для нахождения локальных амплитуд. При прямом Фурье-преобразовании до текущей координаты x можно получить для высоких частот оценки интеграла (9)–(10) методом стац-

онарной фазы, а для низких – рассматривая почти-период при максимальных амплитудах на удалениях от приемника, близких к шагу съёмки. Усреднение же по почти-периоду (от двух точек) завершает процесс. В этом заключается основная идея получения (после сортировки амплитуд по убыванию) локального линейного тренда. Таким образом, все сводится к последовательному решению двух одномерных обратных задач.

Для получения локальных оценок скоростей следует выполнить прямое преобразование Фурье сначала по времени и решить уравнения типа свертки для пары источник–приемник, а затем выполнить преобразование Фурье по координате вдоль профиля. Если производить вычисления с переменным верхним пределом, то получим, что максимум амплитуд оказывается между двумя последними приемниками при текущем удалении. Это связано с обнулением периодической части интегралов, соответствующих различным длинам волн. Определяя на указанных участках максимумы и минимумы фазовых скоростей и находя среднее арифметическое по всем частотам, а также длинам волн в вертикальной полосе, можно оценить степень нарушенности массива в различных точках профиля, а затем получить динамику трехслойного разреза, зная расстояние между датчиками и скорость поперечной волны у поверхности. По горизонтали в ячейке наблюдается эффект сейсмической томографии при усреднении по близким длинным волнам за почти-период. По вертикали имеем аналогичную картину – обнуление интеграла за период и усреднение вертикальной ячейкой за почти-период (размер ячейки).

Среднее арифметическое фазовых скоростей на участке профиля между двумя соседними сейсмоприемниками, очевидно, соответствует математическому ожиданию гауссового распределения. При этом по вертикальной оси откладывается длина волны, а по горизонтальной – допустимый интервал изменения вертикального волнового числа. Таким образом, двигаясь от поверхности вглубь массива, получаем повышение точности с ростом длины волны. Это обусловлено тем, что на высоких частотах при малых длинах волн имеется большой разброс скоростей в связи с локальной неоднородностью массива, соизмеримой с длиной волны. Кроме того, верхний слой массива сложен либо осадочными породами, либо является трещиноватым вблизи горной выработки.

Полученное решение обратной задачи нахождения скорости зависит от начального линейного локального приближения.

Вместо разностных формул (13), (14) эффективно применение трехточечных, что поясняет рассеяние на неоднородностях слева и справа от линии вторичных источников при фиксированных удалениях вдоль профиля.

На поправку p накладывается условие интегрируемости выражения [6–7]

$$p(1 + x_1^2). \tag{15}$$

Далее используется формула следов [8]:

$$q_1 = \alpha_1 + \beta_1 - 2\xi_1(t) + p, \quad p \rightarrow 0, \tag{16}$$

где q_1 – потенциал; α_1, β_1 – границы лакуны в спектре; $\xi_1(t)$ – квадрат вертикального волнового числа.

В процессе аналитического продолжения по формуле Тэйлора по указанному выше алгоритму все точки $\xi_1(t)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению [1, 7]

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial t} = \frac{\pm 2a_j \sqrt{-R(\xi_j(t))}}{N \prod_{k \neq j} (\xi_k - \xi_j(t))}, \quad j = 1 \dots N. \tag{17}$$

В (17) N – число лакун в спектре, a_j – амплитуда волны Рэлея, $R(\xi) = \xi \prod_{k=1}^N (\xi - \alpha_k)(\xi - \beta_k)$, $\xi_{ij}(z) = \left[\frac{\omega_i^2}{V_s^2(z)} - K_{ij}^2 \frac{\lambda(0) + 2\mu(0)}{\mu(0)} \right]$ – квадрат вертикального волнового числа для SV -компоненты волны Рэлея, i – сдвиг, j – номер частоты, j – номер моды, для P -компоненты

$$\xi_{ij}(z) = \left[\frac{\omega_i^2}{V_p^2(z)} - K_{ij}^2 \frac{\mu(0)}{\lambda(0) + 2\mu(0)} \right]. \tag{18}$$

Способ определения входных данных для расчета поверхности амплитуд как функции частоты и волнового числа для интегральных характеристик профиля описан в [1]. Отметим, что доминирующим известным подходом является концепция локальных гладких дисперсионных кривых [9, 10]. Другим подходом является использование зигзагообразных дисперсионных кривых [11]. Особенности подготовки входных данных при использовании акустической шумовой томографии отражены в [12]. Потенциал $q(t)$ для SV -компоненты волны Рэлея

$$q(t) = \lambda_1 - \xi_1(t) + \frac{\sqrt{\mu}}{\mu}, \tag{19}$$

$$\xi_1(t) = \left| \frac{\omega^2}{V_s^2(t)} - k^2 \right|, \quad k^2 = \frac{\lambda(0) + 2\mu(0)}{\mu(0)} k^2, \tag{20}$$

будет почти-периодическим при условии

$$|q(t) - q(0)| \leq \varepsilon, \tag{21}$$

$$|q(t) - q(0)| \leq \beta_1 - \alpha_1, \tag{22}$$

$$q(t) = \alpha_1 + \beta_1 - 2\xi_1(t),$$

где t – почти-период. Поэтому

$$\xi_1(t) = \frac{\alpha_1 + \beta_1 \pm \varepsilon}{2} \tag{23}$$

и для первого сдвига получим

$$\left| \lambda_1 - \left(\frac{\alpha_1 + \beta_1 \pm \varepsilon}{2} + \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} \right) \right| \leq \varepsilon < \beta_1 - \alpha_1. \quad (24)$$

Неравенство (24) можно рассматривать как систему и для двух соседних членов последовательности собственных значений определить $V_S(t)$, $V_S(2t)$.

Для последующих сдвигов

$$\left| \lambda_1 - \xi_1(t) + \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} \right| \leq N\varepsilon \leq \beta_1 - \alpha_1, \quad (25)$$

где N – натуральное число, а

$$\lambda_1, \xi_1(t) \in [\alpha_1, \beta_1]. \quad (26)$$

Поэтому, если выполняется условие ограниченности потенциала, то потенциал и, следовательно, модуль сдвига являются почти-периодическими функциями. Если заданы две точки

$$V_S(0), V_S(t), \quad (27)$$

то с учетом ограничения (21), (22) по формулам продолжения (24), (25) найдем третью точку $V_S(2t)$. Производим не более трех сдвигов на частоту (правило трех сигм для многочленов третьей степени). Значения α_1 и β_1 определяются следующим образом [1, 7]:

$$\alpha_1 = \frac{1}{-\lambda_1 + \beta_1} \left[\frac{(\lambda_1 - \xi_1(h))^2}{A_1^2 \lambda_1} - \lambda_1^2 + \lambda_1 \beta_1 \right], \quad (28)$$

где A_1 – амплитуда первой моды нормальной волны Рэлея;

$$\begin{aligned} & \beta_1^2(-\xi_1 + \lambda_1) + \\ & + \beta_1 \left[\xi_1^2 + \frac{(\lambda_1 - \xi_1(h))^2}{A_1^2 \lambda_1} - \lambda_1^2 - \frac{(\lambda_1 - \xi_1(h))^2}{A_1^2 \xi_1} \right] + \\ & + \frac{(\lambda_1 - \xi_1(h))^2}{A_1^2 \xi_1} \lambda_1 - \lambda_1 \xi_1^2 - \\ & - \frac{(\lambda_1 - \xi_1(h))^2}{A_1^2 \lambda_1} \xi_1 + \lambda_1^2 \xi_1 = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

В (29) из двух корней квадратного уравнения выбирается неотрицательный, а в знаменателях формул (28), (29) прибавляем малый параметр регуляризации.

Если мод больше одной, то в качестве амплитуды первой моды следует брать

$$A_1' = \frac{A_1}{N \prod_{k=2} (\lambda_1 - \xi_k)}$$

Из уравнения Штурма–Лиувилля [2, 3]

$$y'' + \lambda y = qy \quad (30)$$

следует, что при равном нулю потенциале собственная функция имеет вид

$$y = B(\lambda) \cos(\sqrt{\lambda}z) + o(t). \quad (31)$$

При стремлении к нулю потенциале фазовый резонанс ($n = 1$)

$$\sqrt{\lambda_1}z = \pi, \quad h = \frac{\pi}{2\pi/L_r} = \frac{L_r}{2} = \frac{V_{fr}}{2f_r} \quad (32)$$

дает известное правило – глубина до границы равна половине длины волны, L_r – длина волны, V_{fr} – фазовая скорость, f_r – частота.

Для первого сдвига удобно принять

$$\xi_1(t) = \left\langle \frac{\omega^2}{V_S^2(z)} - k^2 \right\rangle, \quad k^2 = \frac{\lambda(0) + 2\mu(0)}{\mu(0)} k^2, \quad (33)$$

где $\langle \rangle$ означает среднее интегральное значение линейного тренда.

При аналитическом продолжении происходит движение от середины лакуны к ее верхней или нижней границе. Экстремумы имеют место при

$$\xi_1(t) = \alpha_1, \quad \xi_1(t) = \beta_1. \quad (34)$$

В общем случае собственная функция имеет вид

$$y = \cos(\sqrt{\lambda}z) + \int_0^z A(t) \cos(\sqrt{\lambda}t) dt, \quad (35)$$

поэтому необходим амплитудно-фазовый сдвиг при

$$t \in [0, z]. \quad (36)$$

Имеем по Лагранжу при условии фазового резонанса

$$\cos(\sqrt{\lambda}z) = -1, \quad (37)$$

собственную функцию в виде

$$y = -(1 - zA(\zeta) \cos \sqrt{\lambda}\zeta). \quad (38)$$

Это верно при условии $\sqrt{\lambda}nz/n = \pi, n = 2m + 1$. Очевидно, что

$$zA(\zeta) = \alpha(\max(z, \zeta)), \quad (39)$$

и необходим пересчет амплитуд при нахождении границ первой лакуны, т.к.

$$A(0) \geq A(\zeta). \quad (40)$$

Сортировка по каждой трассе спектральных амплитуд по убыванию позволяет эффективно выделять резонансные частоты с последующим нахождением минимумов и максимумов скорости интерференционных волн.

При $t \rightarrow 0$ необходим простой амплитудный сдвиг

$$\begin{aligned} & \cos \sqrt{\lambda}(\zeta + t) + (\zeta + t)A(\zeta) \cos \sqrt{\lambda}\zeta \cong \\ & \cong \cos \sqrt{\lambda}\zeta (1 + (\zeta + t)A(\zeta)). \end{aligned} \quad (41)$$

Почти-периодичность модуля сдвига следует из формулы продолжения

$$\sqrt{\mu_3} = \mp \left(\lambda_1 - \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} \right) h^2 \sqrt{\mu_2} + 2\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}, \quad (42)$$

что при разных шагах дает оценку точности продолжения ($n = 1$)

$$\Delta = \left| \mp \left(\lambda_1' - \frac{\alpha_1' + \beta_1'}{2} \right) h_1^2 \pm \left(\lambda_1'' - \frac{\alpha_1'' + \beta_1''}{2} \right) h_2^2 \right| \times \sqrt{\mu_2} < \delta(\varepsilon). \quad (43)$$

При этом почти-период t равен

$$t = h_2 - h_1, \quad h_2 > h_1. \quad (44)$$

Оценка (43) следует из

$$\left| \lambda_1 - \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} \right| h^2 \leq \max(|\lambda_1 - \alpha_1|, |\lambda_1 - \beta_1|) h^2 \leq (\beta_1 - \alpha_1) h^2 < \beta_1 h^2 \leq \lambda_1 h^2 = \pi^2, \quad (45)$$

$$\xi_{i+1/j}(h+t)^2 - \xi_{ij} h^2 = h^2(\xi_{i+1/j} - \xi_{ij}) + \xi_{i+1/j}(2ht + t^2).$$

Условие фазового резонанса (37) приводит к устойчивой вычислительной схеме при возрастающих шагах по вертикальной координате. Из (45) следует устойчивость при трех сдвигах по частоте в пределах лакуны (включая нулевой) и условие на начальный шаг по горизонтали и вертикали

$$h = (1 - 2)h_0, \quad h_0 = L_{sv}/2.$$

ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА РАСЧЕТА И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Пример применения метода расчета приведен на рис. 1 по результатам микросейсмического зондирования, проведенного ОИФЗ РАН на базе работ [13–15]. Эксперимент проводился в районе Скалистого хребта в Северной Осетии. Анализ рис. 1 показывает, что при начальном вертикальном шаге 350 м (сдвиг много меньше и вычисляется на каждом шаге), решение обратной задачи устойчиво и можно сделать выводы о динамике границы характерного вложенного волновода. Характер сейсмических границ соответствует приближению к средней части Скалистого хребта при горизонтальном шаге 600 м и вертикальном 350 м. Координаты крайней левой точки на оси удалений соответствуют середине Скалистого хребта. Сравнение рассчитанных сейсмических разрезов с известными для Северного Кавказа производилось по данным [16] с учетом результатов экспедиции ОИФЗ РАН и показало хорошую сходимость (рис. 2 и 3). При этом приближение к хребту и рост глубины сопровождается повышением скорости поперечных волн. Заметно некоторое понижение скорости на глубинах от 15 км до 20 км. Отчетливо видна куэста в виде чередования более и менее скоростных участков пород в верхней части разреза (изрезанность профиля скорости в долинах рек). Максимально достижимая глубина составляет 5–6 длин профиля или 3 длины волны на низшей частоте. Этот вывод подтверждается результатами эксперимента в Индии, где указанная глубина составляет 2000 м или пять длин 400-метрового профиля [17]. Отметим, что имеется ряд работ по сейсмической томографии [18, 19], однако в них не применялась концепция

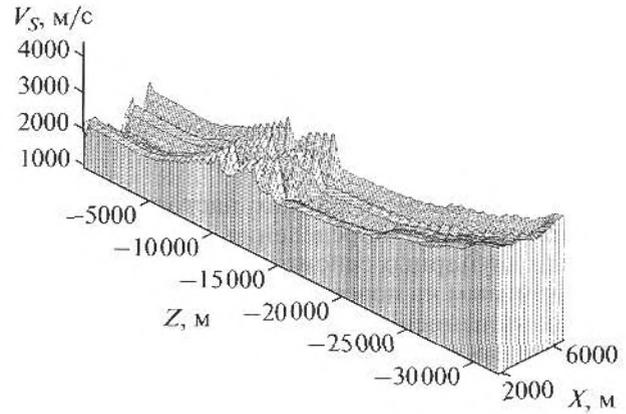


Рис. 1. Сейсмический разрез Северной части Скалистого хребта: V_S – скорость поперечных волн; X – удаление; Z – глубина.

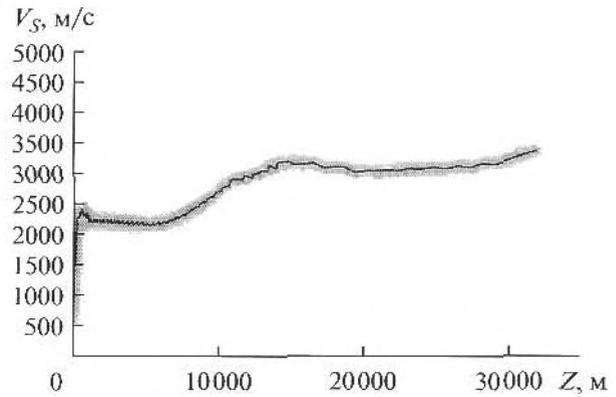


Рис. 2. Сглаженный сейсмический разрез для Северной части Скалистого хребта: V_S – скорость поперечных волн; удаление 6700 м; Z – глубина.

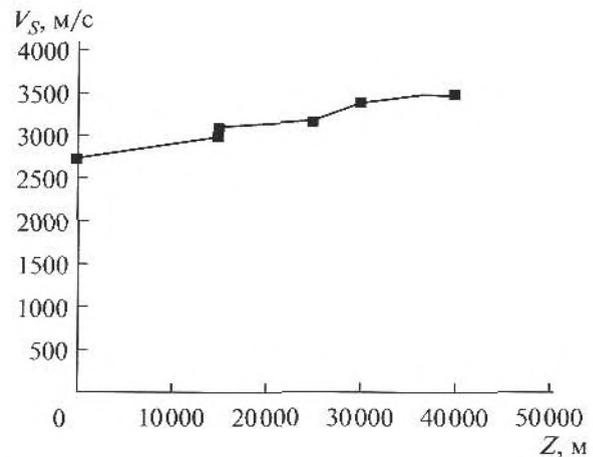


Рис. 3. Сейсмический разрез Северной части Скалистого хребта по Павленковой: V_S – скорость поперечных волн; удаление 6500 м; Z – глубина.

спектральных многочленов Б.М. Левитана и почти-периодических функций, позволяющих отбрасывать периоды на длинных и коротких волнах и получать эффективно локальные линейные тренды и границы поиска решений при аналитическом продолжении.

Таким образом, в рамках настоящей работы обоснован метод определения глубоких вертикальных двумерных сейсмических разрезов по регистрируемым на поверхности волнам типа Рэлея с использованием теории почти-периодических функций по микросейсмическим данным. Преимуществом метода является отсутствие накопления ошибок вычислений благодаря использованию почти-периодических функций.

Метод применим для исследования как субвертикальных, так и горизонтальных скоростных неоднородностей. Использование прямого Фурье-преобразования по горизонтальной координате позволяет существенно сократить (до 5–10 мин) время записи микросейсм, что обеспечивает возможность более оперативного мониторинга изменений строения массива.

Ограничения метода связаны с необходимостью расположения измерительного профиля на равнинных участках. В случае гористой местности это предполагает, что точки профиля находятся на одной отметке относительно уровня моря, например, на плато или горной дороге. При этом колебания высотных отметок должны не превышать шага точек измерения по горизонтали и быть меньше радиуса кривизны поверхности.

Представляется перспективным применение метода для изучения и верхней части разреза, в частности, при решении задач инженерной сейсмологии.

Авторы признательны чл.-корр. РАН А.В. Николаеву и в.н.с. А.В. Горбатикову за полезное обсуждение работы и предоставленные лабораторией экспериментальной геофизики ОИФЗ РАН микросейсм, а также проф. А.Л. Левшину и проф. Б.П. Сибирякову за ценные замечания, которые были учтены в окончательном варианте статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Загорский Л.С., Шкуратник В.Л. Метод определения вертикального сейсмического разреза массива горных пород с использованием волн типа Рэлея // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 2. С. 222–231.
2. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984. 240 с.
3. Киселев С.Г., Маркушевич В.М. О разделении переменных для Рэлеевских колебаний слоистых сред // ДАН. 1993. Т. 332. № 3.
4. Бреховских Л.М., Годин О.А. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1989. 416 с.
5. Есипов И.Б., Степанов Ю.С. Нелинейное взаимодействие звука в рассеивающей среде // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 5. С. 845–851.
6. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
7. Загорский Л.С. Спектральные методы определения строения горного массива / Под ред. акад. В.Н. Страхова. М.: Изд. д. “Грааль”, 2001. 80 с.
8. Хасанов А.Б. Обратная задача рассеяния для возмущенного конечнозонного оператора Штурма–Лиувилля // ДАН. 1991. Т. 318. № 5. С. 1095–1098.
9. Haskell N. The dispersion of surface waves on multilayered media // Bulletin of the Seismological Society of America. 1953. № 43. P. 17–34.
10. Левшин А.Л. Поверхностные и каналовые сейсмические волны. М.: Наука, 1973. 176 с.
11. Жэн Б.-С., Лу Л.-Ю. Волны Рэлея и обнаружение низкоскоростных слоев в слоистом полупространстве // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 5. С. 613–625.
12. Гончаров В.В., Чепурин Ю.А., Годин О.А. Пассивная акустическая томография океана при использовании антенн неизвестной формы // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 2. С. 193–201.
13. Николаев А.В., Троицкий П.А., Чеботарева И.Я. Изучение литосферы сейсмическими шумами // ДАН СССР. 1986. Т. 286. № 3. С. 586–591.
14. Горбатиков А.В., Ларин Н.В., Моисеев Е.И., Беляшов А.В. Применение метода микросейсмического зондирования для изучения строения погребенной трубки взрыва // ДАН. 2009. Т. 428. № 4. С. 526–530.
15. Королева Т.Ю., Яновская Т.Б., Патрушева С.С. Использование сейсмического шума для определения структуры верхней толщи Земли // Физика Земли. 2009. № 5. С. 1–12.
16. Павленкова Г.А. Строение земной коры Кавказа по профилям ГСЗ Степное–Бакуриани и Волгоград–Нахичевань (результаты переинтерпретации первичных данных) // Физика Земли. 2012. № 5. С. 16–25.
17. Башилов И.П., Загорский Л.С., Левченко Д.Г., Рыбаков Н.П., Шкуратник В.Л., Червинчук С.Ю., Ом Астана, Панкадж Рой Гунта. Испытание Малогабаритного Донного Модуля и восстановление скоростного разреза геологической среды по методике МОВСР в условиях транзитной зоны шельфа Аравийского моря // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2013. № 9. С. 145–160.
18. Nolet G. A breviary of seismic tomography. Cambridge Univ. Press, 2008.
19. Поверхностные сейсмические волны в горизонтально-неоднородной Земле / Под ред. Кейлиса-Борока В.И. М.: Наука, 1987.