

РЕЗОНАНСНОЕ РАССЕЯНИЕ ЗВУКА
НА УПРУГИХ СФЕРОИДАЛЬНЫХ ТЕЛАХ И ОБОЛОЧКАХ

© 2014 г. А. А. Клещев

*С.-Петербургский государственный морской технический университет
190008 С.-Петербург, ул. Лоцманская, 3**E-mail: alexalex-2@yandex.ru*

Поступила в редакцию 10.10.2013 г.

На основе динамической теории упругости с использованием потенциалов Дебая найдены резонансы упругих сфероидальных тел (вытянутых и сжатых) как сплошных, так и в форме оболочек. Помимо аналитических решений приведены результаты расчетов на компьютерах угловых характеристик и сечений рассеяния упругих сфероидальных тел.

Ключевые слова: резонанс, упругий рассеиватель, граничные условия, сечение рассеяния, потенциал Дебая.

DOI: 10.7868/S0320791914030101

Впервые Дебай предложил разложение векторного потенциала \mathbf{A} на скалярные потенциалы U и V в работе [1], посвященной изучению поведения световых волн вблизи точки или линии фокусировки. Позднее такой подход успешно был использован при решении задач дифракции электромагнитных волн на сфере, круглом диске и параболоиде вращения [2–7], а также дифракции продольных и поперечных волн на упругих телах сфероидальной формы [8, 9].

Применительно к задачам, базирующимся на динамической теории упругости, введение потенциалов Дебая происходит по следующей схеме. Вектор смещения \mathbf{u} упругой изотропной среды подчиняется уравнению Ламе:

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = -\rho \omega^2 \mathbf{u}, \quad (1)$$

где λ и μ – коэффициенты Ламе; ρ – плотность упругой изотропной среды; ω – круговая частота гармонических колебаний.

По теореме Гельмгольца вектор смещения \mathbf{u} представляется в виде скалярного потенциала Φ и векторного потенциала \mathbf{A} :

$$\mathbf{u} = -\operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим уравнения Гельмгольца для потенциалов – скалярное для Φ и векторное для \mathbf{A} :

$$\Delta \Phi + h^2 \Phi = 0, \quad (3)$$

$$\Delta \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0, \quad (4)$$

где $h = \omega/c_1$ – волновое число упругой продольной волны, c_1 – скорость этой волны; $k = \omega/c_2$ – волновое число упругой поперечной волны, c_2 – скорость поперечной волны.

В скалярном уравнении (3) в трехмерном случае переменные разделяются в 11 координатных системах, что же касается уравнения (4), то из него в трехмерной задаче удастся получить три независимых уравнения для каждой из компонент векторной функции \mathbf{A} только в декартовой системе координат. Для преодоления этого препятствия и используются потенциалы Дебая U и V , подчиняющиеся скалярному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta V + k^2 V = 0, \quad \Delta U + k^2 U = 0. \quad (5)$$

Векторный потенциал \mathbf{A} (по Дебаю) следующим образом раскладывается с помощью потенциалов U и V :

$$\mathbf{A} = \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\mathbf{R}U) + ik \operatorname{rot}(\mathbf{R}V), \quad (6)$$

где \mathbf{R} – радиус-вектор точки упругого тела или упругой среды.

Покажем эффективность использования потенциалов Дебая при решении трехмерной задачи дифракции на упругом сфероиде [9]. Трехмерная задача дифракции на упругом сфероидальном рассеивателе решается с помощью потенциалов Дебая U и V , через которые выражается векторная функция \mathbf{A} в соответствии с представлением (6):

$$\mathbf{A} = \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\mathbf{R}U) + ik_2 \operatorname{rot}(\mathbf{R}V),$$

где k_2 – волновое число поперечной волны.

Эффективность такого представления становится очевидной, если учесть, что потенциалы U и V подчиняются скалярному уравнению Гельмгольца. Удобно сначала записать компоненты \mathbf{A} в сферической системе координат, выразив их через U , V и \mathbf{R} , а затем по формулам векторного анализа перейти к сфероидальным компонентам.

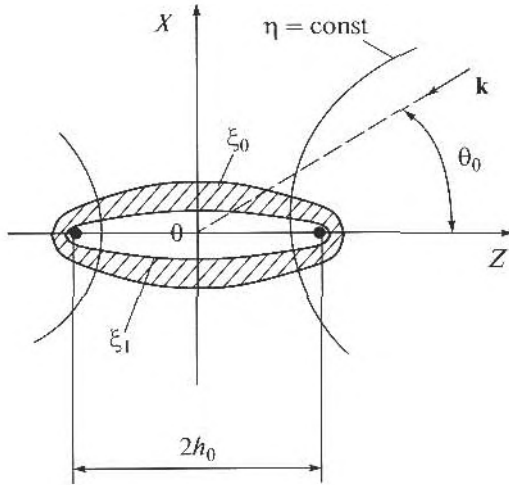


Рис. 1. Упругая сфероидальная оболочка в поле плоской гармонической волны.

Выражения для сферических компонент векторной функции $A(A_R, A_\theta, A_\varphi)$ через потенциалы Дебая имеют следующий вид [9]:

$$\begin{aligned}
 A_\theta &= [h_0(\xi^2 - 1 + \eta^2)]^{-1} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \theta_1} \frac{\partial \xi}{\partial R} \frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} + \right. \\
 &+ \frac{\partial \xi}{\partial \theta_1} \frac{\partial \eta}{\partial R} \frac{\partial^2 B}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial R} \frac{\partial \eta}{\partial \theta_1} \frac{\partial^2 B}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial R} \frac{\partial \eta}{\partial \theta_1} \frac{\partial^2 B}{\partial \eta^2} + \\
 &+ \left. \frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial R \partial \theta_1} + \frac{\partial B}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial R \partial \theta_1} \right] + ik_2 (\sin \theta_1)^{-1} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \\
 A_R &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial R} \right)^2 \frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial \xi}{\partial R} \frac{\partial \eta}{\partial R} \frac{\partial^2 B}{\partial \eta \partial \xi} + \\
 &+ \left(\frac{\partial \eta}{\partial R} \right)^2 \frac{\partial^2 B}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial R^2} \frac{\partial B}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial R^2} \frac{\partial B}{\partial \eta} + k_2^2 B, \\
 A_\varphi &= \left[(\xi^2 - 1 + \eta^2)^{1/2} \sin \theta_1 h_0 \right]^{-1} \times \\
 &\times \left[\frac{\partial \xi}{\partial R} \frac{\partial^2 B}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{\partial \eta}{\partial R} \frac{\partial^2 B}{\partial \eta \partial \varphi} \right] - ik_2 \left[\frac{\partial \xi}{\partial \theta_1} \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial \theta_1} \frac{\partial V}{\partial \eta} \right],
 \end{aligned}$$

где $B = h_0(\xi^2 - 1 + \eta^2)^{1/2} U$; ξ, η, φ – вытянутые сфероидальные координаты, они изменяются в пределах: $1 \leq \xi \leq \infty$; $-1 \leq \eta \leq +1$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Сфероидальные компоненты функции $A(A_\xi, A_\eta, A_\varphi)$ будут равны [9]

$$\begin{aligned}
 A_\xi &= A_R \frac{h_0}{h_\xi} \xi (\xi^2 - 1 + \eta^2)^{1/2} + A_\theta \frac{h_0}{h_\xi} (\xi^2 - 1 + \eta^2)^{1/2} \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi}, \\
 A_\eta &= A_R \frac{h_0}{h_\eta} \eta (\xi^2 - 1 + \eta^2)^{1/2} + A_\theta \frac{h_0}{h_\eta} (\xi^2 - 1 + \eta^2)^{1/2} \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta}, \\
 A_\varphi &\equiv A_\varphi,
 \end{aligned}$$

где $h_\xi = h_0(\xi^2 - \eta^2)^{1/2}(\xi^2 - 1)^{1/2}$; $h_\eta = h_0(\xi^2 - \eta^2)^{1/2} \times (1 - \eta^2)^{1/2}$.

Выберем в качестве рассеивателя упругую изотропную сфероидальную оболочку (рис. 1). Все потенциалы – потенциал плоской волны Φ_0 , потенциал рассеянной волны Φ_1 , скалярный потенциал оболочки Φ_2 , потенциалы Дебая U и V , а также потенциал Φ_3 газа, заполняющего оболочку, – раскладываются в ряды по волновым сфероидальным функциям:

$$\begin{aligned}
 \Phi_0 &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n \geq m}^{\infty} i^{-n} \varepsilon_{m,n} \bar{S}_{m,n}(C_1, \eta_0) \times \\
 &\times \bar{S}_{m,n}(C_1, \eta) R_{m,n}^{(1)}(C_1, \xi) \cos m\varphi, \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n \geq m}^{\infty} B_{m,n} \bar{S}_{m,n}(C_1, \eta) R_{m,n}^{(3)}(C_1, \xi) \cos m\varphi, \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_2 &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n \geq m}^{\infty} \bar{S}_{m,n}(C_l, \eta) \cos m\varphi \times \\
 &\times [C_{m,n} R_{m,n}^{(1)}(C_l, \xi) + D_{m,n} R_{m,n}^{(2)}(C_l, \xi)], \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_3 &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n \geq m}^{\infty} E_{m,n} R_{m,n}^{(1)}(C_2, \xi) \bar{S}_{m,n}(C_2, \eta) \cos m\varphi, \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \geq m}^{\infty} \bar{S}_{m,n}(C_l, \eta) \sin m\varphi \times \\
 &\times [F_{m,n} R_{m,n}^{(1)}(C_l, \xi) + G_{m,n} R_{m,n}^{(2)}(C_l, \xi)], \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n \geq m}^{\infty} \bar{S}_{m,n}(C_l, \eta) \cos m\varphi \times \\
 &\times [H_{m,n} R_{m,n}^{(1)}(C_l, \xi) + I_{m,n} R_{m,n}^{(2)}(C_l, \xi)], \quad (12)
 \end{aligned}$$

где $C_l = k_1 h_0$, $C_l = k_2 h_0$, $C_l = k h_0$, k – волновое число звуковой волны в газе-заполнителе, $B_{m,n}, C_{m,n}, D_{m,n}, E_{m,n}, F_{m,n}, G_{m,n}, H_{m,n}, I_{m,n}$ – неизвестные коэффициенты разложений; $\bar{S}_{m,n}(C_l, \eta)$ – нормированная вытянутая угловая сфероидальная функция; $R_{m,n}^{(1)}(C_l, \xi)$ и $R_{m,n}^{(2)}(C_l, \xi)$ – радиальные вытянутые сфероидальные функции 1-го и 2-го родов соответственно.

Коэффициенты разложений отыскиваются из физических граничных условий на обеих поверхностях (ξ_0 и ξ_1 , см. рис. 1):

- 1) непрерывность нормальной компоненты смещения на обеих границах ξ_0 и ξ_1 ;
- 2) равенство нормального напряжения в упругой оболочке звуковому давлению в жидкости (ξ_0) или газе (ξ_1);
- 3) отсутствие касательных напряжений на обеих границах оболочки ξ_0 и ξ_1 .

В соответствии с этим граничные условия примут вид [9]

$$(h_\xi)^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} (\Phi_0 + \Phi_1) = (h_\xi)^{-1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} + (h_\eta h_\varphi)^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (h_\varphi A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (h_\eta A_\eta) \right]_{\xi=\xi_0}, \quad (13)$$

$$(h_\xi)^{-1} \frac{\partial \Phi_3}{\partial \xi} = (h_\xi)^{-1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} + (h_\eta h_\varphi)^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (h_\varphi A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (h_\eta A_\eta) \right]_{\xi=\xi_1}, \quad (14)$$

$$-\lambda_0 k^2 (\Phi_0 + \Phi_1) = -\lambda_1 k_1^2 \Phi_2 + 2\mu_1 \left[(h_\xi h_\eta)^{-1} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} u_\eta + (h_\xi)^{-1} \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} \right]_{\xi=\xi_0}, \quad (15)$$

$$-\lambda_2 k_2^2 \Phi_3 = -\lambda_1 k_1^2 \Phi_2 + 2\mu_1 \left[(h_\xi h_\eta)^{-1} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} u_\eta + (h_\xi)^{-1} \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} \right]_{\xi=\xi_1}, \quad (16)$$

$$0 = \left[\frac{h_\eta}{h_\xi} \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi} + \frac{h_\xi}{h_\eta} \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} \right]_{\xi=\xi_0, \xi=\xi_1}, \quad (17)$$

$$0 = \left[\frac{h_\varphi}{h_\xi} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \xi} + \frac{h_\xi}{h_\varphi} \frac{\partial u_\xi}{\partial \varphi} \right]_{\xi=\xi_0, \xi=\xi_1}. \quad (18)$$

Здесь λ_1 и μ_1 — коэффициенты Ламе материала оболочки, λ_0 — коэффициент объемного сжатия жидкости, λ_2 — коэффициент объемного сжатия газа, заполняющего оболочку,

$$u_\xi = (h_\xi)^{-1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} + (h_\eta h_\varphi)^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (h_\varphi A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (h_\eta A_\eta) \right],$$

$$u_\eta = (h_\eta)^{-1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} + (h_\xi h_\varphi)^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (h_\xi A_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\varphi A_\varphi) \right],$$

$$u_\varphi = (h_\varphi)^{-1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} + (h_\xi h_\eta)^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta A_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi A_\xi) \right].$$

Подстановка рядов (7)–(12) в граничные условия (13)–(18) дает бесконечную систему уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов. Из-за ортогональности тригонометрических функций $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$ бесконечная система уравнений распадается на бесконечные подсистемы с фиксированным индексом m . Каждая из подсистем решается методом усечения. Число удерживаемых членов разложений (7)–(12) тем больше, чем больше волновой размер для данного потенциала.

Частоты первых резонансов упругих колебаний сфероидальных тел могут быть достаточно точно определены с помощью их полных и относительных сечений излучения и рассеяния (интегральные характеристики) [9–13]. Эти характеристики могут быть получены с помощью угловых характеристик излучения $F(\theta, \varphi)$ и рассеяния $D(\theta, \varphi)$ этих тел. Рассмотрим рассеиватель в форме

изотропной вытянутой сфероидальной оболочки (см. рис. 1), облучаемой плоской гармонической волной вдоль оси вращения (осесимметричная задача). Все потенциалы, включая потенциал плоской падающей волны Φ_0 , потенциал рассеянной волны Φ_1 , скалярный потенциал оболочки Φ_2 , компоненту A_φ векторного потенциала \mathbf{A} и скалярный потенциал Φ_3 газа, заполняющего оболочку, разложим по сфероидальным волновым функциям [9–13]:

$$\Phi_0 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} \bar{S}_{0,n}(C_1, 1) \bar{S}_{0,n}(C_1, \eta) R_{0,n}^{(1)}(C_1, \xi);$$

$$\Phi_1 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} B_n \bar{S}_{0,n}(C_1, \eta) R_{0,n}^{(3)}(C_1, \xi);$$

$$\Phi_2 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \bar{S}_{0,n}(C_1, \eta) [C_n R_{0,n}^{(1)}(C_1, \xi) + D_n R_{0,n}^{(2)}(C_1, \xi)];$$

$$A_\varphi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \bar{S}_{0,n}(C_1, \eta) [F_n R_{0,n}^{(1)}(C_1, \xi) + G_n R_{0,n}^{(2)}(C_1, \xi)];$$

$$\Phi_3 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} E_n R_{0,n}^{(1)}(C_2, \xi) \bar{S}_{0,n}(C_2, \eta),$$

где $B_n, C_n, D_n, F_n, G_n, E_n$ — неизвестные коэффициенты разложений.

Коэффициенты разложений определяются из физических граничных условий на обеих поверхностях оболочки (ξ_0 и ξ_1):

1) непрерывность нормального смещения на двух границах (ξ_0 и ξ_1);

2) равенство между нормальным напряжением в оболочке и звуковым давлением в жидкости (ξ_0) или газе (ξ_1);

3) отсутствие касательных напряжений на обеих границах (ξ_0 и ξ_1).

В соответствии с этими граничными условиями будем иметь соотношения [9–13]:

$$-(h_\xi)^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} (\Phi_0 + \Phi_1) = -(h_\xi)^{-1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} + (h_\eta h_\varphi)^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\varphi A_\varphi) \text{ при } \xi = \xi_0, \quad (19)$$

$$-(h_\xi)^{-1} \frac{\partial \Phi_3}{\partial \xi} = -(h_\xi)^{-1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} + (h_\eta h_\varphi)^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\varphi A_\varphi) \text{ при } \xi = \xi_1, \quad (20)$$

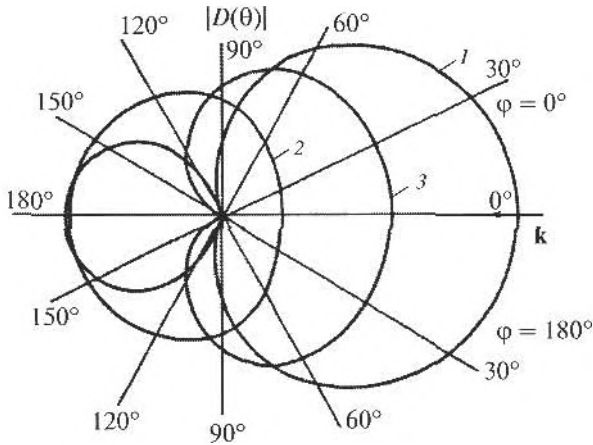


Рис. 2. Модули угловых характеристик рассеяния сфероидальных тел.

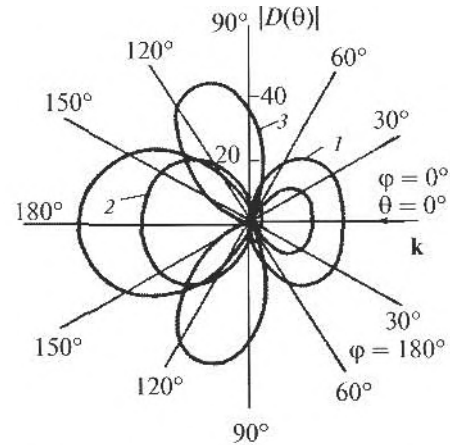


Рис. 3. Модули угловых характеристик сфероидального рассеивателя.

$$\lambda_0 k^2 (\Phi_0 + \Phi_1) = \lambda h^2 \Phi_2 + 2\mu \left\{ -(h_\xi h_\eta)^{-1} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \times \right. \\ \times \left[(h_\eta)^{-1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} + (h_\xi h_\eta)^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta A_\eta) \right] + \\ \left. + (h_\xi)^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[-(h_\xi)^{-1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} + (h_\eta h_\eta)^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\eta A_\eta) \right] \right\} \\ \text{при } \xi = \xi_0, \quad (21)$$

$$\lambda_1 k_1^2 \Phi_3 = \lambda h^2 \Phi_2 + 2\mu \left\{ -(h_\xi h_\eta)^{-1} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \times \right. \\ \times \left[(h_\eta)^{-1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} + (h_\xi h_\eta)^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta A_\eta) \right] + \\ \left. + (h_\xi)^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[-(h_\xi)^{-1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} + (h_\eta h_\eta)^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\eta A_\eta) \right] \right\} \\ \text{при } \xi = \xi_1, \quad (22)$$

$$\left[-(h_\xi h_\eta)^{-1} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} - (h_\xi)^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \left[(h_\eta)^{-1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} + \right. \\ \left. + (h_\xi h_\eta)^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta A_\eta) \right] + \left[(h_\xi h_\eta)^{-1} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} - (h_\eta)^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \times \\ \times \left[-(h_\xi)^{-1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} + (h_\eta h_\eta)^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\eta A_\eta) \right] = 0 \\ \text{при } \xi = \xi_0 \text{ и } \xi = \xi_1. \quad (23)$$

Характеристики вытянутой сфероидальной газонаполненной оболочки были вычислены для двух углов облучения $\theta_0 = 0^\circ$ и $\theta_0 = 90^\circ$. На рис. 2 представлены модули угловых характеристик рассеяния $|D(\theta)|$ стальной вытянутой газонаполненной сфероидальной оболочки (кривая 1), мягкого вытянутого сфероида (кривая 2) и жесткого сфероида (кривая 3) при $\theta_0 = 0^\circ$ и $C_1 = 1.0$.

Такие же угловые распределения, но при $C_1 = 3.1$ (упругая оболочка, $C_1 = 3.0$ для идеально-го сфероида) и $C_1 = 10.0$ соответственно, представлены на рис. 3 и 4. Обозначения кривых на всех трех рисунках идентичны. Анализ полученных численных результатов позволяет заключить, что при угле облучения $\theta_0 = 0^\circ$ и волновом размере тел $C_1 = 1.0$ (см. рис. 2) угловая характеристика упругой оболочки подобна угловой характеристике жесткого сфероида. При $C_1 = 3.1$ и угле облучения $\theta_0 = 0^\circ$ складывается промежуточная ситуация: угловая характеристика оболочки носит дипольный характер, как и у жесткого сфероида, но конфигурация теневого лепестка у оболочки не такая, как у жесткого сфероида (см. рис. 3).

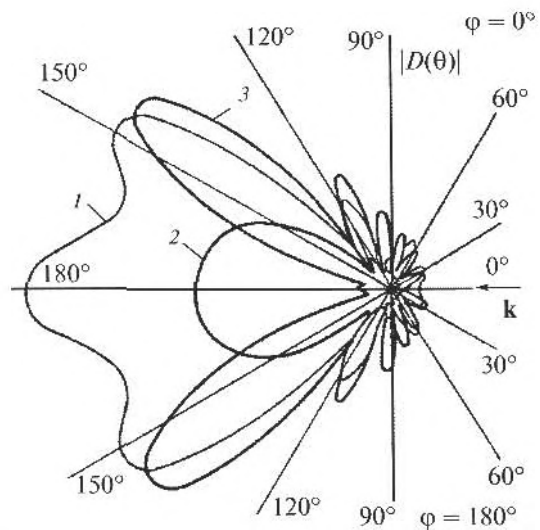


Рис. 4. Модули угловых характеристик сфероидальных тел.

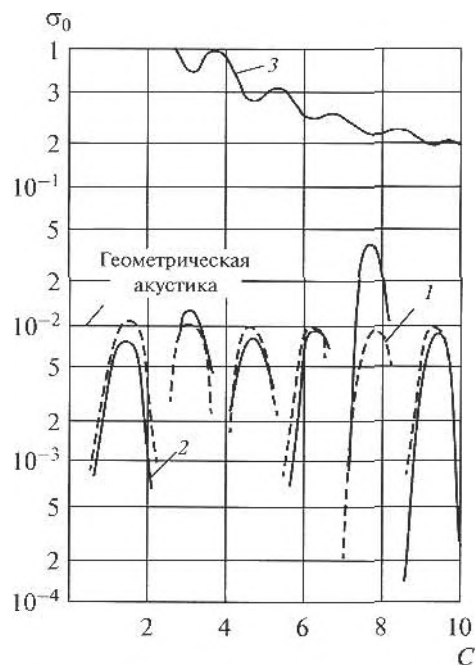


Рис. 5. Относительные сечения обратного рассеяния вытянутых сфероидов.

При дальнейшем увеличении волнового размера C_1 характер рассеяния звука оболочкой остается сложным (см. рис. 4): в освещенной области характеристика $|D(\theta)|$ оболочки похожа на характеристику жесткого сфероида, а в области тени она ближе к теневому лепестку мягкого сфероида.

По известным угловым характеристикам рассеяния $D(\theta, \varphi)$ может быть вычислено относительное сечение обратного рассеяния σ_0 упругих сфероидальных тел [9]. На рис. 5 представлены значения относительных сечений рассеяния σ_0 вытянутых сфероидов с соотношением полуосей 1 : 10 ($\xi_0 = 1.005$) при осесимметричном облучении ($\theta_0 = 0^\circ$): кривая 1 относится к жесткому сфероиду, кривая 2 – к сплошному упругому сфероиду, кривая 3 – к мягкому сфероиду. Сплошной упругий сфероид по своему поведению весьма близок к идеально жесткому рассеивателю. Это было видно выше при сравнении угловых характеристик $D(\theta, \varphi)$ стального и идеальных сфероидов. Совпадение наблюдается всюду, за исключением резонансной точки $C_1 = 7.4$. Этот резонанс вызван периферической волной типа волны Рэлея [14]. При волновом размере $C_1 = 7.4$ на поверхности вдоль контура стального сплошного вытянутого сфероида укладывается $2.5\lambda_R$, где λ_R – длина периферической волны “типа волны Рэлея”. Скорость этой волны c_R составляет около

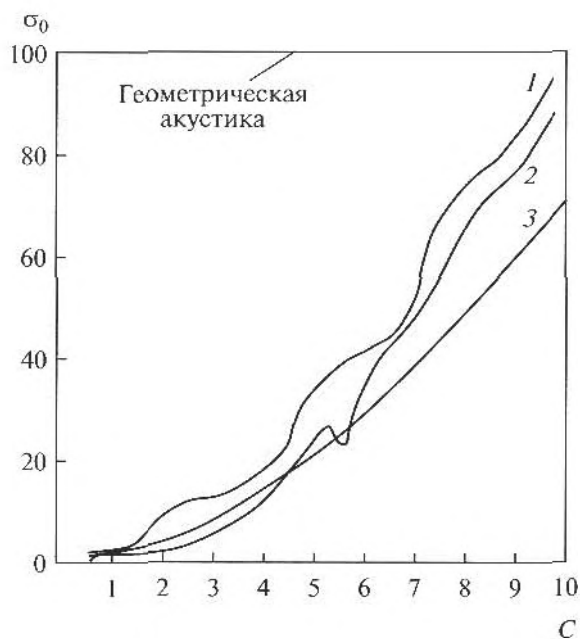


Рис. 6. Относительные сечения обратного рассеяния сжатых сфероидов.

2889 м/с, в то время как скорость волны Рэлея на плоской границе сталь–вакуум равна 2980 м/с.

На рис. 6 изображены относительные сечения обратного рассеяния σ_0 сжатых сфероидов с соотношением полуосей 1 : 10 ($\xi_0 = 0.1005$) при осесимметричном облучении ($\theta_0 = 0^\circ$), обозначения те же, что и на рис. 5. До резонанса периферической нулевой антисимметричной – изгибной волны ($C_1 \approx 5.3$) σ_0 стального сжатого сфероида по уровню ближе к σ_0 мягкого сфероида, а при $C_1 > 5.3$ приближается к σ_0 жесткого сфероида, хотя угловая характеристика $D(\theta)$ упругого сфероида при $\theta_0 = 0^\circ$ и при всех значениях волнового размера C_1 близка к угловой характеристике $D(\theta)$ жесткого сфероида. На рис. 7 представлены относительные сечения обратного рассеяния σ_0 вытянутых сфероидальных тел. Стальной (сплошной) вытянутый сфероид и при θ_0 имеет резонанс периферической (поверхностной) волны при том же самом значении $C_1 = 7.4$ (см. кривую 2 рис. 5) [9]. Само сечение рассеяния σ_0 стального сплошного сфероида (кривая 3) при $\theta_0 = 90^\circ$ заметно ближе к σ_0 жесткого сфероида (кривая 4) по сравнению с σ_0 мягкого сфероида (кривая 5). Эта близость рассеивающих свойств сплошного упругого и жесткого сфероидов проявилась уже в угловых характеристиках $D(\theta, \varphi)$. Частотная зависимость относительного сечения обратного рассеяния σ_0 вытянутой сфероидальной оболочки (кривая 1)

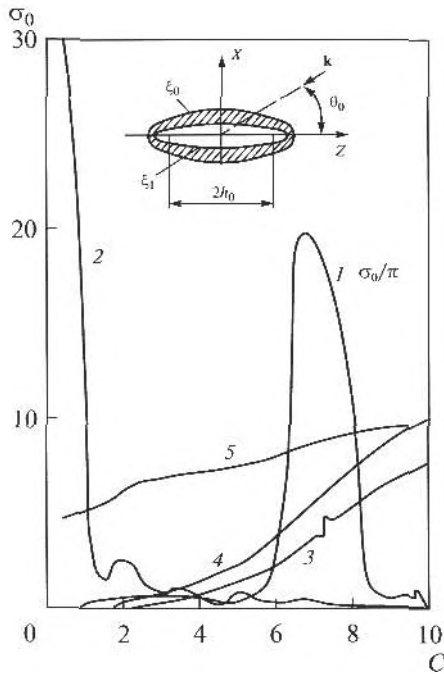


Рис. 7. Относительные сечения обратного рассеяния вытянутых сфероидальных тел.

при $\theta_0 = 0^\circ$ показывает наличие весьма существенного резонанса при $C_1 = 6.75$ [9–13]. На рис. 8 показаны модули угловых характеристик $D(\theta)$ рассеивателей вытянутой сфероидальной формы. Кривая 1 относится к стальной газонаполненной оболочке при волновом размере $C_1 = 6.75$, соответствующем ее резонансу, кривая 2 – к мягкому сфероиду, кривая 3 – к жесткому, для идеальных сфероидов волновой размер $C_1 = 10.0$. Из сравне-

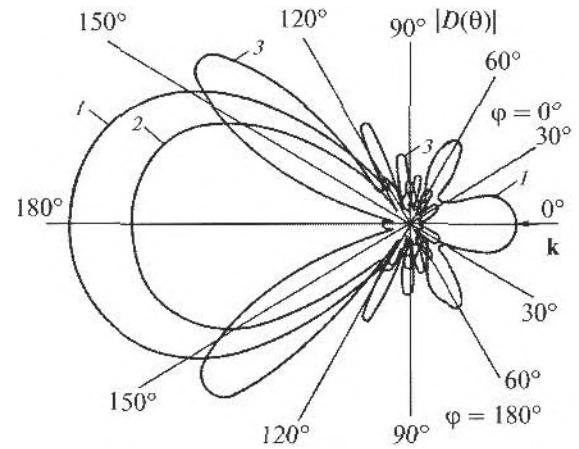


Рис. 8. Модули угловых характеристик вытянутых сфероидальных тел.

ния этих кривых видно, что теневой лепесток угловой характеристики оболочки указывает на “мягкий фон”, а лепесток обратного отражения – на “жесткий”.

Относительное сечение обратного рассеяния σ_0 сфероидальной оболочки при $\theta_0 = 90^\circ$ было вычислено вплоть до волнового размера $C_1 = 5.5$. Значения σ_0 оболочки оказались настолько близки к σ_0 жесткого сфероида, что представилось целесообразным сравнить значения этих сечений в табличной форме (табл. 1). Как видно из табл. 1, при угле облучения $\theta_0 = 90^\circ$ вплоть до $C_1 = 5.5$ проявляется “жесткий фон” рассеяния, что сказалось и на виде угловых характеристик рассеяния $D(\theta, \varphi)$. Полное сечение рассеяния σ опреде-

Таблица 1.

Волновой размер C_1	σ_0 при $\theta_0 = 90^\circ$		
	вытянутая сфероидальная газонаполненная оболочка ($\xi_0 = 1.005075$; $\xi_1 = 1.005$)	жесткий сфероид ($\xi_0 = 1.005$)	мягкий сфероид ($\xi_0 = 1.005$)
0.5	0.3012×10^{-3}	0.2452×10^{-3}	4.506
1.0	0.4748×10^{-2}	0.3908×10^{-2}	4.760
1.5	0.2365×10^{-1}	0.1965×10^{-1}	5.194
2.0	0.7354×10^{-1}	0.6147×10^{-1}	5.748
2.5	0.1751	0.1479	6.300
3.0	0.3470	0.3006	6.754
3.5	0.6068	0.5418	7.094
4.0	0.9736	0.8911	7.358
4.5	1.447	1.362	7.592
5.0	2.014	1.960	7.815
5.5	2.599	2.680	8.029

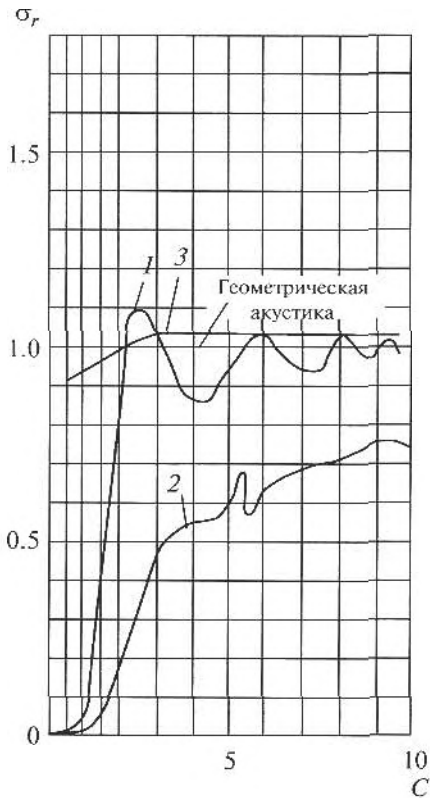


Рис. 9. Относительные сечения рассеяния сжатых сфероидов.

ляется через квадрат модуля угловой характеристики рассеяния $D(\theta, \varphi)$ [9–13]:

$$\sigma = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} |D(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Относительное сечение рассеяния σ_r , в свою очередь, равно [9–13]:

$$\sigma_r = \sigma / 2A_0,$$

где A_0 – площадь геометрической тени рассеивателя.

С помощью оптической теоремы [9] полное сечение рассеяния σ может быть найдено через значение мнимой части угловой характеристики в направлении падающей волны $\text{Im} D(180^\circ - \theta_0; 180^\circ)$ (рассеяние “вперед”):

$$\sigma = (4\pi/k) \text{Im} D(180^\circ - \theta_0; 180^\circ),$$

где θ_0 – угол падения волны, $\varphi_0 = 0^\circ$.

Формально по аналогии с сечением рассеяния σ можно ввести понятие сечения излучения $\sigma_{\text{изл}}$ упругого или жидкого тела под действием точечного источника [9]:

$$\sigma_{\text{изл}} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} |F(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi,$$

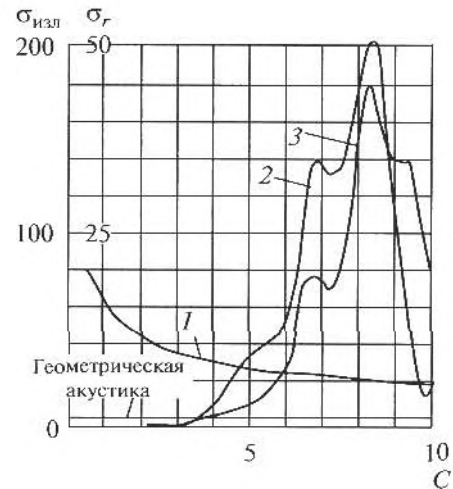


Рис. 10. Относительные сечения рассеяния и излучения вытянутых сфероидальных тел.

где $F(\theta, \varphi)$ – угловая характеристика излучения звука телом под действием точечного источника.

На основе представленных соотношений был выполнен расчет полных σ и относительных σ_r сечений рассеяния и излучения $\sigma_{\text{изл}}$ сфероидальных тел (вытянутых и сжатых).

На рис. 9 представлены относительные сечения рассеяния σ_r идеального жесткого сжатого сфероида (кривая 1), стального сжатого сфероида (кривая 2) и идеально мягкого сжатого сфероида (кривая 3). Во всех трех случаях соотношение полуосей $a : b = 1 : 10$ ($\xi_0 = 0.1005$), а угол облучения $\theta_0 = 0^\circ$. Относительное сечение σ_r упругого сфероида выявляет резонанс совпадения, как это проявилось и в относительном сечении обратного рассеяния σ_0 (см. рис. 6), сместилась только точка максимума: для σ_0 максимум наблюдался при $C_1 = 5.25$, для σ_r – при $C_1 = 5.35$. С ростом C_1 кривая 2 приближается к значению $\sigma_r = 1.0$, соответствующему геометрической акустике. Расчеты показывают, что при $C_1 = 15.0$ для упругого сжатого сфероида $\sigma_r = 0.866$, а при $C_1 = 20.0$ $\sigma_r = 0.941$. На рис. 10 представлены относительные сечения рассеяния σ_r (кривые 1 и 2) и сечение излучения $\sigma_{\text{изл}}$ (кривая 3) вытянутых сфероидальных тел. Кривая 1 показывает частотную зависимость $\sigma_r(C)$ идеально мягкого вытянутого сфероида ($a : b = 1 : 10$, $\xi_0 = 1.005$), кривая 2 – $\sigma_r(C)$ стальной газонаполненной вытянутой сфероидальной оболочки ($\xi_0 = 1.005075$, $\xi_1 = 1.005$). Обе кривые соответствуют $\theta_0 = 0^\circ$ (осесимметричная задача).

Кривая 2 для упругой оболочки, в отличие от относительного сечения ее обратного рассеяния (кривая 1 на рис. 7), содержит два максимума.

Первый из них наблюдается при $C_1 = 6.7$ (в отличие от $C_1 = 6.75$ для σ_0), второй при $C_1 = 8.25$ и соответствует $L = 1.5\lambda_1$, где L – длина контура нейтральной поверхности оболочки, λ_1 – длина продольной волны (нулевой симметричной волны Лэмба), распространяющейся со скоростью $c_1 \approx 5420$ м/с. Кривая I для идеально мягкого сфероида асимптотически стремится к значению, соответствующему геометрической акустике ($\sigma_r = 1.0$): $\sigma_r(15.0) = 4.16$, $\sigma_r(65.0) = 2.23$, $\sigma_r(100.0) = 1.93$. Кривая 3 характеризует излучающую способность этой же оболочки, если она возбуждается снаружи точечным источником при $\theta_0 = 0^\circ$ ($h_0 = 50.0$ м).

Исследованию резонансов упругих сфероидальных оболочек (при осесимметричном их возбуждении) посвящены работы [15, 16], в которых авторы рассмотрели стальные и алюминиевые оболочки различного эксцентриситета и различной толщины. Для алюминиевой оболочки с отношением осей 1 : 6 (эксцентриситет 0.986) были вычислены значения нормальной компоненты скорости, которые показали наличие резонанса оболочки при волновом размере $C = 11.4$ (в пересчете на скорость звука в жидкости). В нашей стальной оболочке с соотношением осей 1 : 10 (эксцентриситет 0.995) в диапазоне волновых размеров 0.5–10.0 наблюдалось два резонанса: при $C = 6.75$ и $C = 8.25$.

В работах [14, 17–20] для нахождения резонансов упругих сфероидальных оболочек применялся метод Т-матриц, а именно, модифицированная процедура к расширенному методу Ватермана [17]. Форм-функция обратного рассеяния (индикатриса рассеяния) вычислялась по формулам, предложенным в [14]. Поскольку авторы этих работ использовали сферический базис волновых функций, применение в методе Т-матриц динамической теории упругости ограничивается отношением осей сфероида 1 : 3 и больше. Используемый в данной работе метод разделения переменных свободен от этого недостатка.

Результаты численных расчетов, представленные в статье, помогли выполнить анализ полученных при эксперименте амплитудно-фазовых характеристик рассеяния импульсных звуковых сигналов в зонах Френеля и Фраунгофера [21, 22].

В последние годы появился целый ряд работ [23–26], которые показывают эффективность применения методов высокочастотной асимптотики для расчета дифракционного поля сфероидов без использования волновых функций. Интересен тот факт, что такой подход оказывается применимым и при достаточно низких частотах.

Характеристики, полученные в статье, могут быть использованы при решении задачи классификации объектов гидролокации для определения их формы, размеров и материала.

Представленные в статье результаты получены при проведении поисковой научно-исследовательской работы в рамках Государственного контракта П 242 от 21 апреля 2010 года ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Debye P.* Das Verhalten von Lichtwellen in der Nahe eines Brennpunktes oder Brennlinie // *Ann. Physik.* 1909. V. 30. № 4. S. 755–776.
2. *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.–Л.: ОНТИ, 1937. 998 с.
3. *Franz W.* Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen. Berlin–Gottingen–Heidelberg: Springer, 1957. Zf. 9. 123 s.
4. *Meixner J.* Strenge Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an der vollkommen leitenden Kreisscheibe // *Zs. Naturforsch.* 1948. V. 3a. Heft 8–11. S. 501–518.
5. *Фок В.А.* Теория дифракции от параболоида вращения // Сборник “Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения”. М.: Сов. радио, 1957. С. 5–56.
6. *Фок В.А.* Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1970. 517 с.
7. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
8. *Гутман Т.Л., Клещев А.А.* Дифракция волн в упругой среде на упругом сфероиде // *Тр. ЛКИ.* 1974. № 91. С. 31–37.
9. *Клещев А.А.* Гидроакустические рассеиватели. С.–Пб.: 1-е изд., Судостроение. 248 с.; 2-е изд., Прима. 268 с.
10. *Клещев А.А.* Характеристики рассеяния звука упругими телами сфероидальной формы // *Тр. ЛКИ.* 1978. Вып. Судовая акустика. С. 43–48.
11. *Kleshchev A.A.* With reference to low frequency resonances of elastic spheroidal bodies // *J. Techn. Acoust.* 1995. V. 2. № 1. P. 27–28.
12. *Kleshchev A.A., Kuznetsova E.I.* About low frequency resonances of elastic spheroidal shells, irradiating and establishing by harmonic and pulse signals // *J. T. M. P.* 2013. V. 3. № 1. P. 4–9.
13. *Клещев А.А.* Потенциалы Дебая и “типа Дебая” в задачах дифракции, излучения и распространения упругих волн // *Акуст. журн.* 2012. Т. 58. № 3. С. 338–341.
14. *Werby M.F., Green L.H.* Correspondence between acoustical scattering from spherical and end-on incident spheroidal shells // *J. Acoust. Soc. Am.* 1987. V. 81. № 3. P. 783–787.
15. *Yen T., Di Maggio F.* Forced vibrations of submerged spheroidal shells // *J. Acoust. Soc. Am.* 1967. V. 41. № 3. P. 618–626.
16. *Hayek S., Di Maggio F.L.* Complex natural frequencies of vibrating submerged spheroidal shells // *Int. J. Sol. and Struct.* 1967. V. 6. № 3. P. 333–351.

17. *Werby M.F., Green L.H.* An extended unitary approach for acoustical scattering from elastic shells immersed in a fluid // *J. Acoust. Soc. Am.* 1983. V. 74. № 2. P. 625–630.
18. *Gaunaurd G.C., Werby M.F.* Resonance response of submerged acoustically excited thick and thin shells // *J. Acoust. Soc. Am.* 1985. V. 77. № 6. P. 2081–2093.
19. *Werby M.F., Green L.H.* Comparison of acoustical scattering from fluid-loaded elastic shells and sound-soft objects // *J. Acoust. Soc. Am.* 1984. V. 76. № 4. P. 1227–1230.
20. *Werby M.F., Gaunaurd G.C.* Classification of resonances in the scattering from submerged spheroidal shells insonified at arbitrary angles of incidence // *J. Acoust. Soc. Am.* 1987. V. 82. № 4. P. 1369–1377.
21. *Клещёв А.А.* Низкочастотное рассеяние импульсного звукового сигнала упругими цилиндрическими оболочками // *Акуст. журн.* 2011. Т. 57. № 3. С. 381–386.
22. *Kleshchev A.A.* Measurement of characteristics of sound reflection and scattering by elastic cylindrical shells in conditions of hydroacoustic basin // *I. J. Ph.* 2013. V. 1. № 1. P. 5–14.
23. *Андронов И.В.* Дифракция на сильно вытянутом теле вращения // *Акуст. журн.* 2011. Т. 57. № 2. С. 147–152.
24. *Андронов И.В.* Дифракция плоской волны, падающей под малым углом к оси сильно вытянутого сфероида // *Акуст. журн.* 2012. Т. 58. № 5. С. 571–579.
25. *Andronov I.V.* Diffraction of spherical waves on large strongly elongated spheroids // *A.A.A.* V. 99. № 1. P. 1–6.
26. *Андронов И.В.* Рассеяние высокочастотной волны на сильно вытянутом теле // *Акуст. журн.* Т. 59. № 4. С. 419–423.