АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2014, том 60, № 3, с. 227–229

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.26

ПОГЛОЩЕНИЕ ИЗГИБНЫХ ВОЛН ПАРОЙ ЦЕПОЧЕК МЕХАНИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ, УСТАНОВЛЕННЫХ НА ПЛАСТИНЕ

А. Д. Лапин

Акустический институт им. академика Н.Н. Андреева
117036 Москва, ул. Шверника, 4
E-mail: lapin1932@yandex.ru
Поступила в редакцию 05.09.2013 г.

Рассмотрена задача о рассеянии изгибной волны от двух цепочек из механических резонаторов, характеризуемых эффективной проводимостью. Эта проводимость реактивная для резонаторов первой (нижней) цепочки и комплексная для резонаторов второй (верхней) цепочки. Пространственные периоды обеих решеток одинаковы. На верхнюю цепочку наклонно падает плоская гармоническая изгибная волна, рассеянное поле от цепочек получено в виде суперпозиции однородных и неоднородных брэгговских спектров. Интенсивное рассеяние волны происходит только при взаимной компенсации реактивных компонент эффективной проводимости резонаторов и комплексной проводимости излучения. Пара цепочек с периодами, не превышающими половину длины изгибной волны, является эффективным изолятором изгибной волны. В полупространстве за первой цепочкой нулевая спектральная компонента рассеянного поля полностью компенсирует падающую изгибную волну резонансной частоты. Пусть вторая цепочка расположена в одной из пучностей смещения суммарного поля падающей волны и нулевого рассеянного спектра. Тогда при равенстве активных компонент эффективной проводимости резонаторов второй решетки и комплексной проводимости излучения падающая изгибная волна полностью поглощается этими резонаторами.

Ключевые слова: механический резонатор, дифракционная решетка, метод самосогласованного поля, волноводный изолятор.

DOI: 10.7868/S0320791914030113

На практике для создания виброизоляции изгибных волн в стержнях и пластинах применяют механические резонаторы [1–4]. Простейшим резонатором является пружина с грузом [5]. Эффективным устройством изоляции изгибных волн является волноводный изолятор [6–9]. Он представляет собой сетку одинаковых резонаторов, прикрепленных к пластине на малом расстоянии друг от друга.

В работе [10] было исследовано рассеяние плоской изгибной волны в пластине от цепочки одинаковых механических резонаторов (пружин с грузами) при наклонном падении. Рассеянное поле представлено в виде суперпозиции однородных и неоднородных брэгговских спектров. Рассчитаны амплитуды рассеянных спектральных компонент на резонансной частоте. При периоде цепочки, меньшем $\lambda(1 + \sin\theta)^{-1}$, где θ – угол падения, λ – длина изгибной волны, только "нулевые" рассеянные спектральные компоненты являются однородными. Тогда при отсутствии диссипативных потерь в резонаторах падающая изгибная волна полностью отражается от цепочки. При резонансной частоте сумма падающей и отраженной волн дает стоячее поле, его узлы и пучности смещения расположены на соответствующих линиях, параллельных цепочке. Поместим в одной из пучностей смещения вторую цепочку, отличающуюся от первой наличием трения в ее резонаторах. Можно ожидать, что при определенном трении в резонаторах второй цепочки эта пара цепочек будет эффективным поглотителем изгибных волн резонансной частоты. Ниже рассчитана виброизоляция пары параллельных цепочек из механических резонаторов, характеризуемых эффективной проводимостью. Эта проводимость равна $Y_0^{(1)} = iX_0$ для резонаторов первой (нижней) цепочки и равна $Y_0^{(1)} = R_0 + iX_0$, где $R_0 > 0$, для резонаторов второй (верхней) цепочки. Пространственные периоды обеих цепочек одинаковы. Пусть пластина лежит в плоскости xy, первая и вторая цепочки совпадают соответственно с линиями $y = 0$ и $y = -H$. На этих линиях резонаторы расположены в точках $x = x_s \equiv sL$, где L – период цепочки, s – любое целое число. Из полупространства $y < -H$ на резонаторы падает гармоническая изгибная волна

$$w_0(x, y) = A\exp[i(k_x^0 x + k_y^0 y)], \tag{1}$$

где A — амплитуда смещения, k_x^0 и k_y^0 — соответственно проекции волнового вектора падающей волны на оси x и y, временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опускаем. Под действием этой волны резонаторы колеблются и создают на пластине точечные нормальные силы. Обозначим через $w_1(x,y)$ и $w_2(x,y)$ поля смещений в пластине, создаваемые цепочками точечных нормальных сил, действующих на линиях $y = 0$ и $y = -H$. Полное поле в пластине равно $w = w_0 + w_1 + w_2$. Структура рассеянного поля определяется периодом цепочек резонаторов и величина $w(x,y)\exp(-ik_x^0 x)$ является периодической функцией x с периодом L. Обозначим через F_1 и F_2 амплитуды нормальных сил в точках $(x = 0, y = 0)$ и $(x = 0, y = -H)$ соответственно. Тогда амплитуды нормальных сил в точках $(x = x_s, y = 0)$ и $(x = x_s, y = -H)$ будут $F_1\exp(ik_x^0 x_s)$ и $F_2\exp(ik_x^0 x_s)$. Поля w_1 и w_2 удовлетворяют уравнениям

$$\Delta w_1 - k^4 w_1 = \frac{F_1}{D}\exp(ik_x^0 x)\delta(y)\sum_{s=-\infty}^{s=+\infty}\delta(x - x_s),$$

$$\Delta w_2 - k^4 w_2 = \frac{F_2}{D}\exp(ik_x^0 x)\delta(y+H)\sum_{s=-\infty}^{s=+\infty}\delta(x - x_s),$$

где $k = (\omega^2\rho/D)^{1/4}$ — волновое число изгибной волны, $\Delta = \nabla^2$ — оператор Лапласа, ρ и D — соответственно поверхностная плотность и изгибная жесткость пластины. Решения этих уравнений находятся методом Фурье и имеют вид

$$\begin{gathered} w_1(x,y) = \sum_n \frac{iF_1}{4k^2 LD}\times \\ \times\left\{\frac{1}{k_y^n}\exp\left[i(k_x^n x + k_y^n|y|)\right] + \frac{i}{\alpha^n}\exp\left[ik_x^n x - \alpha^n|y|\right]\right\}, \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} w_2(x,y) = \sum_n \frac{iF_2}{4k^2 LD}\left\{\frac{1}{k_y^n}\exp\left[i(k_x^n x + k_y^n|H+y|)\right] + \right. \\ \left. + \frac{i}{\alpha^n}\exp\left[ik_x^n x - \alpha^n|H+y|\right]\right\}, \end{gathered} \tag{3}$$

где $k_x^n = k_x^0 + n2\pi/L$, $k_y^n = \sqrt{k^2 - (k_x^n)^2}$, $\alpha^n = \sqrt{k^2 + (k_x^n)^2}$, суммирование производится по всем целым n. В фигурных скобках первое слагаемое есть однородная плоская волна при $|k_x^n| \le k$ и неоднородная плоская волна при $|k_x^n| > k$, второе слагаемое всегда является неоднородной волной.

Для улучшения сходимости рядов, дающих рассеянные поля, точечную нормальную силу, создаваемую каждым резонатором, "размажем" по площади контакта пластины и резонатора. Тогда для смещений w_1 и w_2 получим выражения

$$\begin{gathered} w_1(x,y) = \sum_n \frac{iF_1}{4k^2 LD}\psi_1^{(n)}(x,y), \\ w_2(x,y) = \sum_n \frac{iF_2}{4k^2 LD}\psi_2^{(n)}(x,y), \end{gathered} \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered} \psi_1^{(n)} = \frac{1}{\sigma}\iint_\sigma\left\{\frac{1}{k_y^n}\exp\left[ik_x^n(x-x') + ik_y^n|y-y'|\right] + \right. \\ \left. + \frac{i}{\alpha^n}\exp\left[ik_x^n(x-x') - \alpha^n|y-y'|\right]\right\}dx'dy', \end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} \psi_2^{(n)} = \frac{1}{\sigma}\iint_\sigma\left\{\frac{1}{k_y^n}\exp\left[ik_x^n(x-x') + ik_y^n|H+y-y'|\right] + \right. \\ \left. + \frac{i}{\alpha^n}\exp\left[ik_x^n(x-x') - \alpha^n|H+y-y'|\right]\right\}dx'dy', \end{gathered} \tag{6}$$

σ — площадь контакта пластины и резонатора.

Величины F_1 и F_2 получим методом самосогласованного поля. Резонатор, присоединенный к пластине в точке (0,0), действует на нее с силой F_1, пластина же действует на этот резонатор с силой $(-F_1)$. Смещение точки контакта пластины и резонатора равно $w(0,0) = (-F_1)Y_0^{(1)}/(-i\omega)$, где $Y_0^{(1)}$ — эффективная проводимость резонаторов первой цепочки. Аналогично получим, что смещение пластины в точке $(0,-H)$ равно $w(0,-H) = (-F_2)Y_0^{(2)}/(-i\omega)$, где $Y_0^{(2)}$ — эффективная проводимость резонаторов второй цепочки. При учете формул (1) и (4)–(6) эти соотношения можно представить в виде

$$\begin{gathered} w(0,0) = A + F_1 Y/(-i\omega) + F_2 Y^*/(-i\omega) = \\ = (-F_1)Y_0^{(1)}/(-i\omega), \\ w(0,-H) = A\exp(-ik_y^0 H) + F_1 Y^*/(-i\omega) + \\ + F_2 Y/(-i\omega) = (-F_2)Y_0^{(2)}/(-i\omega), \end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered} Y = -i\omega w_1(0,0)/F_1 = -i\omega w_2(0,-H)/F_2 = \\ = \sum_n \frac{\omega\psi_1^{(n)}(0,0)}{4k^2 LD}, \\ Y^* = -i\omega w_1(0,-H)/F_1 = -i\omega w_2(0,0)/F_2 = \\ = \sum_n \frac{\omega\psi_1^{(n)}(0,-H)}{4k^2 LD}. \end{gathered} \tag{7}$$

Величина Y есть комплексная проводимость излучения резонатора, вещественная часть этой проводимости равна

$$R = \mathrm{Re}\,Y = \sum_n \omega/(4k^2 LDk_y^n), \tag{8}$$

где суммирование производится по всем n, при которых k_y^n – вещественное. Величина Y^* есть взаимная проводимость резонаторов первой и второй цепочек.

В результате получим систему уравнений для сил F_1 и F_2:

$$(Y_0^{(1)} + Y)F_1 + Y^*F_2 = i\omega A,$$
$$Y^*F_1 + (Y_0^{(2)} + Y)F_2 = i\omega A \exp(-ik_y^0 H).$$

Решения этих уравнений имеют вид $F_1 = i\omega A T_1/T$, $F_2 = i\omega A T_2/T$, где

$$T = Y_1 Y_2 - (Y^*)^2,\ T_1 = Y_2 - Y^* \exp(ik_y^0 H),$$
$$T_2 = Y_1 \exp(-ik_y^0 H) - Y^*,$$
$$Y_1 = R + i(X_0 + X),\ Y_2 = (R_0 + R) + i(X_0 + X),$$
$$X = \operatorname{Im} Y.$$

Подставляя силы F_1 и F_2 в формулы (2) и (3), получим рассеянные поля w_1 и w_2. Полное рассеянное поле равно $w_1 + w_2$.

Пусть пространственные периоды цепочек не превышают половину длины изгибной волны. Тогда все рассеянные спектральные компоненты, кроме "нулевых" при $n = 0$, будут неоднородными. Согласно формуле (8) для таких цепочек $R = \omega/(4k^2 LDk_y^0)$. Полагая, что рассеянные неоднородные спектральные компоненты существенно затухают на расстоянии H, из формулы (7) получим приближенно

$$Y^* \approx \exp(ik_y^0 H)\omega/(4k^2 LDk_y^0) = \exp(ik_y^0 H)R.$$

Интенсивное рассеяние изгибной волны происходит только при взаимной компенсации реактивных компонент эффективной проводимости резонаторов и комплексной проводимости излучения, т.е. при выполнении соотношения $X_0 + X = 0$. При частоте ω, удовлетворяющей этому соотношению, амплитуды нулевых спектральных компонент полного рассеянного поля $(w_1 + w_2)$ будут равны $A_{y>0}^0 = -A$,

$$A_{y<-H}^0 = -A\frac{R_0 - i2R\sin(k_y^0 H)\exp(-ik_y^0 H)}{R_0 - i2R\sin(k_y^0 H)\exp(ik_y^0 H)}. \tag{9}$$

В полупространстве $y > 0$ нулевая спектральная компонента рассеянного поля полностью компенсирует падающую волну (1).

Пусть вторая цепочка расположена в одной из пучностей смещения суммарного поля падающей волны и нулевого рассеянного спектра от первой цепочки. Тогда $k_y^0 H = M\pi/2$, где M – нечетное число, и формула (9) дает

$$A_{y<-H}^0 = -A\frac{R_0 - 2R}{R_0 + 2R}. \tag{10}$$

При выполнении соотношения $R_0 = 2R$ эта амплитуда равна нулю и падающая изгибная волна (1) полностью поглощается резонаторами. Величина $2R$ есть вещественная компонента проводимости излучения в пучности смещения.

Отражение рэлеевской волны и волн Лэмба в твердом слое решеткой механических резонаторов было исследовано в работах [11, 12]. Новые эффективные способы создания виброизоляции на основе механических резонаторов предложены в работах [13, 14]. Обзор современных конструкций вибропоглотителей дан в работе [15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Клюкин И.И.* Об ослаблении волн изгиба в стержнях и пластинах при помощи резонансных колебательных систем // Акуст. журн. 1960. Т. 6. № 2. С. 213–219.
2. *Клюкин И.И., Сергеев Ю.Д.* О рассеянии изгибных волн антивибраторами, установленными на пластине // Акуст. журн. 1964. Т. 10. № 1. С. 60–65.
3. *Тютекин В.В., Шкварников А.П.* Синтез и исследование поглотителей изгибных волн в стержнях и пластинах // Акуст. журн. 1972. Т. 18. № 3. С. 441–447.
4. *Лапин А.Д.* Влияние диссипативных потерь на эффективность работы резонатора для изгибных волн // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 2. С. 278–280.
5. *Croker M.J., Editor-in-Chief.* Acoustics Handbook. New York: John Wiley & Sons Inc., 1997.
6. *Исакович М.А., Кашина В.И., Тютекин В.В.* Применение систем резонаторов для звукоизоляции нормальной волны нулевого порядка в трубах и в других длинных линиях // Морское приборостроение. Серия Акустика. 1972. Выпуск 1. С 117–125.
7. *Исакович М.А.* Теория волноводной изоляции в длинных линиях // Теория дифракции и распространения волн. Книга 2. Ереван: ВНИИРИ, 1973. С. 105–108.
8. *Исакович М.А., Кашина В.И., Тютекин В.В.* Способ виброизоляции продольных и изгибных волн в стержнях и пластинах. Авт. свид. № 440509. Б.И. № 31. 1974.
9. *Исакович М.А., Кашина В.И., Тютекин В.В.* Экспериментальное исследование виброизоляции изгибных волн, создаваемой импеданцными системами // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 3. С. 384–389.
10. *Лапин А.Д.* Изоляция изгибных волн цепочкой резонаторов, установленных на пластине / Сборник трудов XI сессии РАО. М.: ГЕОС, 2001. Т. 1. С. 195–197.
11. *Лапин А.Д.* Отражение рэлеевской волны решеткой механических резонаторов // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 5. С. 391–394.
12. *Лапин А.Д.* Отражение волн Лэмба в твердом слое решеткой механических резонаторов // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 3. С. 307–311.
13. *Maidanik G.* Induced damping by nearly continuous distribution of nearly undamped oscillators: linear theory // J. Sound and Vibration. 2001. V. 240. P. 717–731.
14. *Xiao Y., Wen J., Wen X.* Flexural wave band gaps in locally resonant thin plates with periodically attached spring-mass resonators // J. of Physics, D. 2012. V. 45. № 19. P. 195401–195412.
15. *Sun J.O., Jolly M.R., Norris M.A.* Passive, adaptive and active tuned vibration absorber – A Survey // J. Vibration and Acoustics. 1955. V. 117. P. 234–242.