

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ  
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.833.5

СОБСТВЕННАЯ ЧАСТОТА РЕЗОНАТОРА ГЕЛЬМГОЛЬЦА  
НА СТЕНКЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО КАНАЛА

© 2014 г. А. И. Комкин\*, М. А. Миронов\*\*, С. И. Юдин\*

\*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана  
105005 Москва, ул. 2-я Бауманская 5  
E-mail: akomkin@mail.ru

\*\*Акустический институт им. Н.Н. Андреева  
117036 Москва, ул. Шверника 4  
E-mail: mironov@akin.ru

Поступила в редакцию 18.06.2013 г.

Проведена оценка собственной частоты резонатора Гельмгольца на стенке прямоугольного канала. Особое внимание уделено определению присоединенной длины горла резонатора со стороны канала. Проанализирована зависимость присоединенной длины горла и собственной частоты резонатора Гельмгольца от конфигурации канала. Проведено сравнение полученных теоретических результатов с данными численных расчетов методом конечных элементов.

**Ключевые слова:** канал, резонатор Гельмгольца, присоединенная длина, собственная частота, расчет, метод конечных элементов.

**DOI:** 10.7868/S0320791914020105

Резонатор Гельмгольца относится к наиболее распространенным элементам глушителей шума. В простейшей модели резонатора Гельмгольца полагается, что характерные размеры резонатора много меньше, чем длины волн в рассматриваемом частотном диапазоне. При этом такой резонатор можно рассматривать как аналог простой механической колебательной системы. Расчету резонатора Гельмгольца посвящено достаточно большое количество публикаций, в которых рассматриваются различные связанные с этим вопросы [1–5]. В первую очередь к ним относится оценка собственной частоты резонатора.

Изначально Гельмгольц предложил оценивать собственную частоту  $f_0$  такого резонатора следующей формулой:  $f_0 = (c/2\pi)\sqrt{d_0/V}$ , где  $c$  – скорость звука в среде;  $d_0$ ,  $V$  – соответственно диаметр (эквивалентный диаметр) горла и объем резонатора. Однако проведенные экспериментальные исследования показали, что собственная частота резонатора Гельмгольца, помимо этих параметров, определяется также и инерцией движущегося в горле резонатора воздуха. Релей ввел понятие присоединенной длины горла, при этом формула для  $f_0$  приводится к виду  $f_0 = (c/2\pi)\sqrt{S_0/l_c V}$ , где  $S_0$  – площадь поперечного сечения горла резонатора;  $l_c = l + l_i + l_e$  – эффективная длина горла резонатора, определяемая, помимо действительной длины горла  $l$ , присоединенными длинами горла с внутренней  $l_i$  и внешней  $l_e$  стороны резонатора.

Дальнейшее уточнение оценки для собственной частоты резонатора Гельмгольца может быть получено, если оболочка резонатора представляет собой цилиндр с площадью поперечного сечения  $S$  и длиной  $L$ . При этом, согласно [6], собственная частота такого резонатора  $f_0 = (c/2\pi)\sqrt{S_0/(l_c V + L^2 S_0/3)}$ . Заметим, что уточнения, даваемые последней формулой, становятся заметными, когда длина резонатора превышает его поперечные размеры.

Вместе с тем основная проблема, связанная с оценкой собственной частоты резонатора Гельмгольца, так или иначе сводится к корректному определению присоединенной длины горла резонатора. Внутренняя присоединенная длина горла резонатора  $l_i$  достаточно хорошо исследована, и здесь, прежде всего, следует отметить классическую работу Ингарда [7]. Эта присоединенная длина может быть определена следующим низкочастотным приближением:

$$l_i = \alpha(1 - \beta g)d_0/2, \quad (1)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  – константы;  $g = \sqrt{S_0/S}$ . Входящий в (1) коэффициент  $\alpha$  зависит от длины горла  $l$  и, как показали результаты конечно-элементного моделирования конкретных конфигураций резонатора [8], принимает значения:  $\alpha = 0.808$  при  $l = 1$  мм,  $\alpha = 0.815$  при  $l = 2$  мм и  $\alpha = 0.820$  при  $l = 5$  мм. При дальнейшем увеличении  $l$ , как показывают аналитические расчеты [9],  $\alpha \rightarrow 0.822$ . Что касается

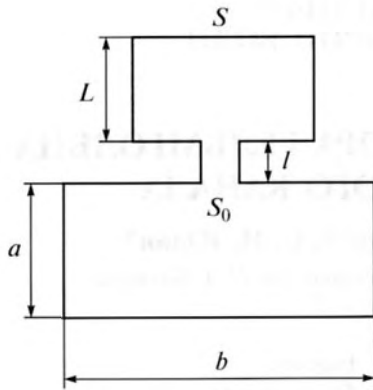


Рис. 1. Резонатор Гельмгольца на стенке прямоугольного канала.

коэффициента  $\beta$ , то при длине горла  $l \geq 1$  мм следует принимать  $\beta = 1.34$ .

Для наружной присоединенной длины горла резонатора в настоящее время используются различные оценки, и единой позиции по этому вопросу до сих пор не выработано. Обычно [10, 11] в качестве оценки внешней присоединенной длины резонатора берется присоединенная длина для отверстия диафрагмы, установленной в поперечном сечении бесконечно длинного канала. Но если отверстие размещено не на поперечной перегородке, а на боковой стенке канала, то присоединенная длина такого отверстия может существенно изменяться. Однако до сих пор не дано аналитической оценки внешней присоединенной длины резонатора на стенке канала, что затрудняет определение с приемлемой для практических целей точностью собственной частоты резонатора в такой системе. Решению данного вопроса и посвящена настоящая работа.

Рассмотрим прямоугольный канал со сторонами  $a$  и  $b$ , на стенке со стороной  $b$  размещен резонатор Гельмгольца с цилиндрическим объемом с площадью поперечного сечения  $S$  и длиной  $L$ , соединяющимся с каналом через горло с поперечным сечением  $S_0$  и длиной  $l$  (рис. 1). В основу данного рассмотрения положены результаты, полученные авторами в [12] при определении импеданса излучения прямоугольного поршня на стенке прямоугольного канала, где, в частности, дана оценка присоединенной длины для такого поршня. Задача решается в линейной постановке в пренебрежении вязкостью и теплопроводностью среды. Эти результаты, в предположении, что движение воздуха в горле резонатора можно считать поршневым, позволяют описать наружную присоединенную длину горла резонатора, расположенного на

оси симметрии стороны  $b$  прямоугольного канала, следующей формулой:

$$l_e = \frac{d}{\pi^2} \frac{a}{b} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{\bar{\kappa}_{mn}^2} \left( \frac{\sin(n\pi/\bar{b})}{n\pi/\bar{b}} \right)^2 \times \left[ 1 - \frac{\text{sh}(\pi \bar{\kappa}_{mn}/\bar{a})}{\pi \bar{\kappa}_{mn}/\bar{a}} e^{-\pi \bar{\kappa}_{mn}/\bar{a}} \right], \quad (2)$$

где  $\varepsilon_0 = 1$ ,  $\varepsilon_j = 2$  при  $j \neq 0$ ;  $\bar{\kappa}_{mn} = \sqrt{m^2 + (na/b)^2}$ ;  $\bar{a} = 2a/d$ ;  $\bar{b} = 2b/d$ ;  $d$  – поперечный размер горла резонатора, а штрихи у знаков суммы означают, что из суммирования исключается слагаемое с  $m = n = 0$ . Формула (2), полученная при условиях низкочастотного приближения, в представленном виде соответствует резонатору с горлом квадратного поперечного сечения. Она также может быть применена и для резонатора с горлом круглого поперечного сечения диаметром  $d_0$ , если положить в ней  $d = d_0/\sqrt{2}$ .

На рис. 2а представлены вычисленные в соответствии с (2) зависимости относительной присоединенной длины круглого горла резонатора  $\bar{l}_e = 2l_e/d_0$  от конфигурации прямоугольного канала. Вычисления проводились в среде MathCAD с конечным числом членов ряда  $M$ . Для получения достоверных результатов, особенно при небольших диаметрах горла резонатора, это число должно быть достаточно большим. Так при  $d_0/b = 1$  достаточно принять  $M = 100$ , и дальнейшее увеличение  $M$  не приводит к видимым изменениям соответствующего графика на рис. 2. При уменьшении отношения  $d_0/b$  до 0.05 последнее условие обеспечивается уже при  $M = 500$ . Представленные графики показывают, что при малых относительно стенки канала диаметрах горла ( $d_0/b = 0.05$ ) внешняя присоединенная длина горла практически не зависит от ширины канала  $b$ . Ее значение приблизительно равно значению присоединенной длины отверстия в бесконечном экране ( $\bar{l}_e \approx 0.82$ ), однако в общем случае зависимость присоединенной длины горла резонатора  $\bar{l}_e$  от ширины канала весьма существенна. Характерной особенностью этой зависимости является то, что при постоянной ширине канала  $b$  уменьшение его высоты  $a$  приводит к уменьшению присоединенной длины горла  $\bar{l}_e$ . При этом чем больше размер поршня, тем значительнее зависимость  $\bar{l}_e$  от высоты канала. В максимальной степени эта зависимость проявляется, когда диаметр горла становится равным ширине канала ( $d_0/b = 1$ ). Следствием этой особенности является также то, что рассматриваемые кривые пересекаются, что имеет место в окрестности значения  $a/b = 2.5$ .

Следует отметить, что представленные на рис. 2а зависимости присоединенной длины горла резонатора от конфигурации канала довольно сложно ап-

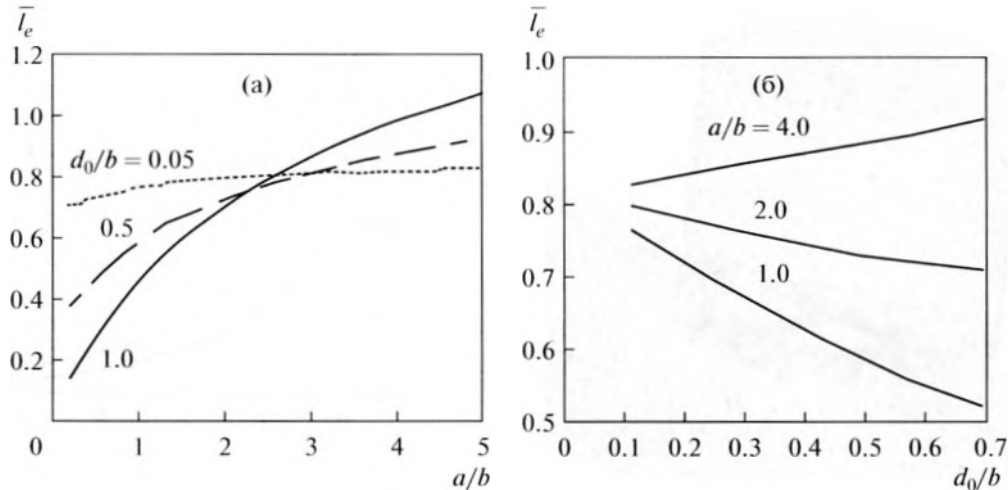


Рис. 2. Зависимости внешней присоединенной длины горла резонатора Гельмгольца от конфигурации канала.

проксимировать простыми аналитическими выражениями. Вместе с тем, если перестроить эти графики в виде зависимости присоединенной длины от отношения  $d_0/b$ , как это представлено на рис. 2б, то эти зависимости при  $d_0/b < 0.4$  можно считать линейными, характеризуемыми прямыми линиями. Каждому значению  $a/b$ , будет соответствовать определенный наклон прямой. При этом точка пересечения этих прямых соответствует значению  $\bar{l}_e \approx 0.82$ .

Далее полученные результаты были использованы для оценки собственной частоты резонатора Гельмгольца с цилиндрической камерой круглого поперечного сечения диаметром  $D = 70$  мм, длиной  $L = 60$  мм и горлом диаметром  $d_0 = 20$  мм, длиной  $l = 2$  мм. В соответствии с приведенным выше обзором собственная частота такого резонатора может быть выражена следующей формулой [8]:

$$f_0 = \frac{c}{2\pi D} \frac{1}{\sqrt{L(\bar{l} + \bar{l}_l + \bar{l}_e + \bar{L}g^2/3)}} \quad (3)$$

Черта над обозначениями означает, что эти величины нормированы относительно диаметра горла  $d_0$ . Присоединенные длины горл резонатора в формуле (3) определялись с помощью формул (1) и (2). На рис. 3 представлены зависимости собственной частоты резонатора Гельмгольца от конфигурации канала. Представленные кривые являются, по сути, перевернутыми кривыми, отображающими на рис. 2а зависимость внешней присоединенной длины горла резонатора от конфигурации канала. Как и ранее, в случае, когда диаметр горла соизмерим с шириной канала, собственная частота резонатора существенным образом меняется с изменением высоты канала  $a$ . Если принять внешнюю присоединенную длину горла равной присоединенной длине соответ-

ствующего отверстия в бесконечном экране, то собственная частота резонатора 485 Гц. На самом деле в зависимости от конфигурации канала собственная частота резонатора может быть как меньше, так и существенно больше этой величины. Заметим, что представленные данные соответствуют небольшой длине горла резонатора ( $l = 2$  мм). С увеличением длины горла зависимость собственной частоты резонатора от конфигурации канала будет уменьшаться, но, тем не менее, она должна приниматься во внимание.

С целью проверки достоверности полученных аналитических результатов было выполнено конечно-элементное моделирование рассматриваемой системы. Составление конечно-элементной модели осуществлялось в среде ANSYS, а последующие численные расчеты проводились с использованием расчетного пакета SYSNOISE. При

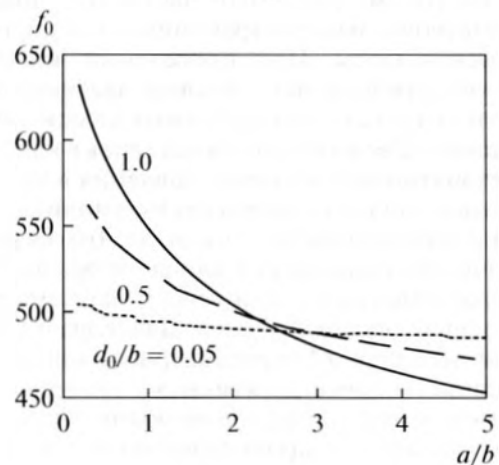


Рис. 3. Зависимость собственной частоты резонатора Гельмгольца от конфигурации канала.

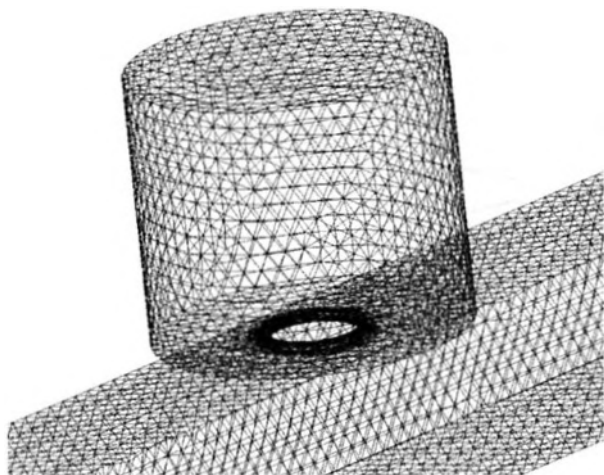


Рис. 4. Конечно-элементная модель резонатора Гельмгольца в канале.

этом численно задача решается также в линейной постановке в пренебрежении вязкостью и теплопроводностью среды. Ранее такой подход был применен авторами [8] при исследовании присоединенной длины диафрагмы в канале и показал высокую эффективность. Конечно-элементная модель резонатора Гельмгольца в канале приведена на рис. 4. Модель характеризуется неравномерным разбиением рассматриваемой системы на конечные элементы, когда в канале размер конечных элементов изменялся от 5 до 10 мм, в объеме резонатора составлял 5 мм, а в окрестности горла резонатора – 0.5 мм.

При моделировании на одном конце канала задавалось граничное условие в виде согласованной нагрузки с импедансом  $Z_{\text{н}} = \rho c$ , где  $\rho$  – плотность среды. На другом конце канала возбуждались звуковые волны колебаниями поршня со скоростью 1 м/с. Частота этих колебаний менялась, но рассматриваемый частотный диапазон соответствовал распространению в канале только поршневой моды. При проведении численных расчетов определялись звуковые давления в трех расчетных точках, располагаемых на оси симметрии канала. Две из них располагались в канале перед резонатором и звуковые давления в них затем использовались для определения амплитуд падающей и отраженной волн в канале. Третья расчетная точка располагалась в канале за резонатором. Звуковое давление в ней определяло амплитуду прошедшей звуковой волны. Далее вычислялись потери передачи  $TL$  в рассматриваемой системе, пропорциональные десятичному логарифму отношения амплитуд падающей волны в канале перед резонатором и прошедшей волны за резонатором при согласованной нагрузке на выходе из канала. При этом в качестве собственной частоты резонатора Гельмгольца принималась частота, со-

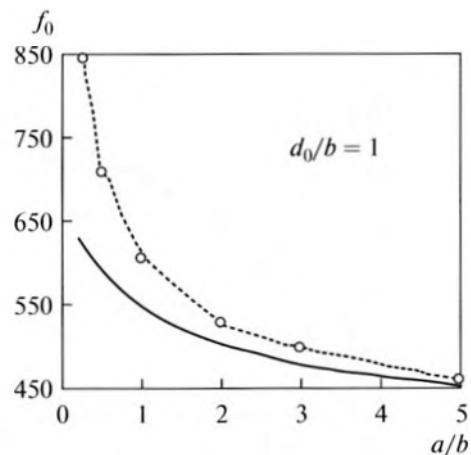


Рис. 5. Собственные частоты резонатора Гельмгольца, вычисленные аналитическим (—) и численным (--○--) методами.

ответствующая максимуму потерь передачи  $TL$ , которая в данном случае совпадает с резонансной частотой такого резонатора в канале.

На рис. 5 для сравнения показаны зависимости собственной частоты резонатора от соотношения сторон канала  $a/b$ , полученные аналитическим и численным методами. Как следует из представленных данных, численные расчеты дают более высокую собственную частоту резонатора, чем аналитические данные. Эта разница особенно ощутима при небольших значениях  $a/b$ . С ростом значений этого параметра разница в получаемых данных уменьшается, так что при  $a/b = 5$  оба метода приводят к практически совпадающим результатам. Следует отметить, что представленные на рис. 5 данные получены для предельного значения  $d_0/b = 1$ , когда диаметр горла резонатора равен ширине канала. При уменьшении диаметра горла разница в аналитических и численных результатах уменьшается, но все равно остается заметной.

Для того чтобы выявить причину расхождения результатов аналитического и численного моделирования, было проанализировано пространственное распределение параметров звуковой волны в канале с резонатором Гельмгольца на его стенке. На рис. 6 показаны картины распределения звукового давления и поперечной колебательной скорости в окрестности горла резонатора в продольной плоскости канала, когда диаметр горла резонатора равнялся ширине канала ( $d_0/b = 1$ ). На рис. 6а для  $a = 40$  мм показаны кривые равного звукового давления в переходной области в окрестности резонатора, где в результате воздействия резонатора на распространяющуюся в канале плоскую звуковую волну происходит ее отражение в обратную сторону. При этом в этой переходной зоне имеет место сферический характер

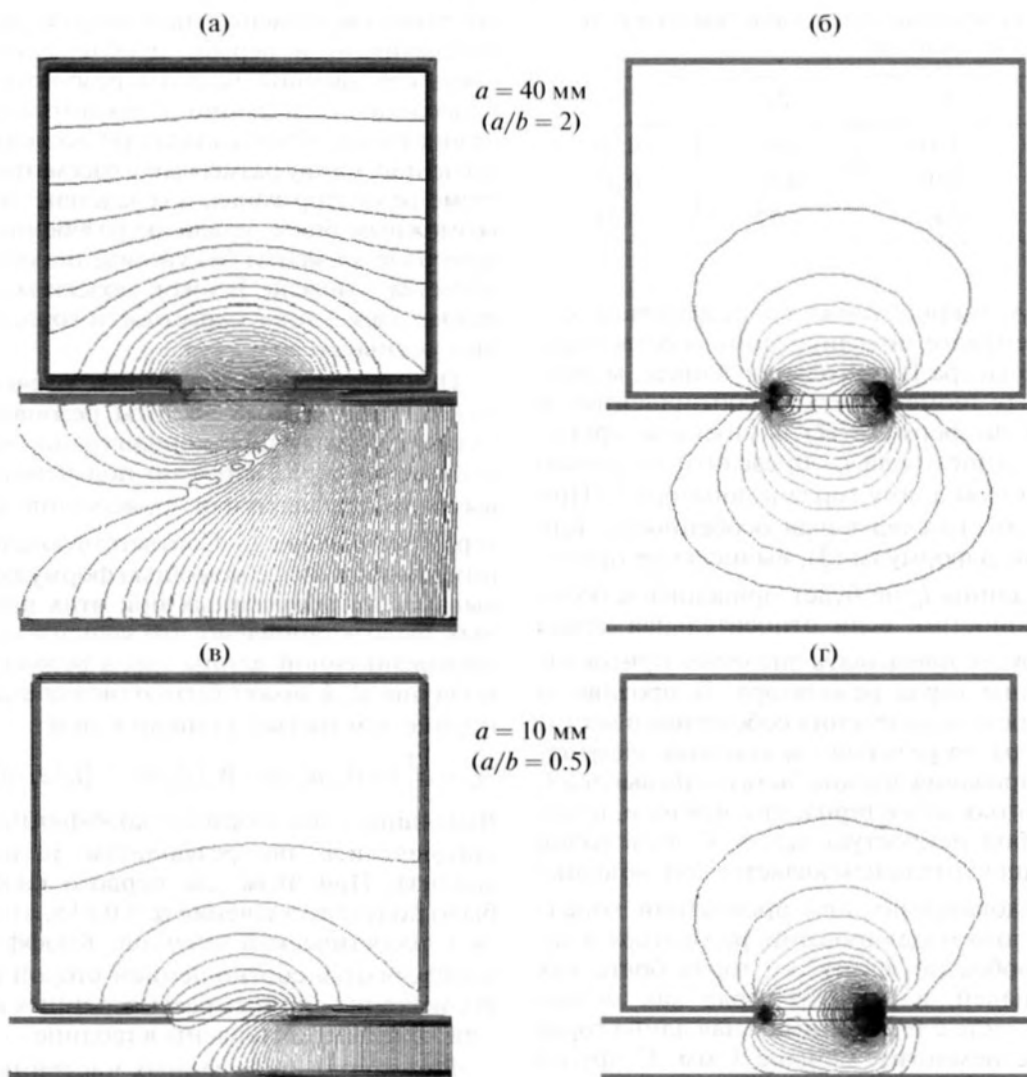


Рис. 6. Картины распределения звукового давления (а, в) и колебательной скорости (б, г) в продольной плоскости канала.

распределения звукового давления по обеим сторонам горла резонатора. Это говорит о том, что движение воздуха в горле резонатора можно считать поршневым. Что касается колебательной скорости в горле резонатора, то в данном случае (рис. 6б) имеем почти симметричную картину ее распределения по обеим сторонам резонатора. Как и следовало ожидать, максимальные значения колебательной скорости приходятся на края горла резонатора. Так как присоединенная длина горла определяется наличием в его окрестности быстро затухающих неоднородных волн, то размер области, в которой происходит этот процесс и который на рис. 6б определяется кривыми постоянной колебательной скорости, можно связать с этой присоединенной длиной. Таким образом, этот рисунок наглядно показывает, что при данной высоте канала присоединенные длины с обе-

их сторон горла резонатора имеет примерно одинаковые значения.

Картина принципиально меняется, когда высота канала начинает уменьшаться. Так при  $a = 10$  мм (рис. 6в) поведение кривых равного звукового давления в окрестности горла резонатора уже не имеет ничего общего с тем, что характеризует поршневое движение воздуха в горле резонатора. Это же относится и к кривым постоянной колебательной скорости (рис. 6г), которые в этом случае теряют свою симметричность как по обеим сторонам горла резонатора, так и в продольном направлении канала. Таким образом, при малой высоте канала концепция присоединенной длины горла резонатора перестает работать и тогда для оценки собственной частоты резонатора следует использовать численные методы анализа.

Зависимость коэффициентов аппроксимации  $\beta_i$  от отношения сторон канала

$a/b$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
0.5	1.48	0.53	0.16
1.0	0.97	0.32	0.07
2.0	0.60	0.52	0.24

Используя вычисленную по результатам конечно-элементного моделирования собственную частоту резонатора Гельмгольца в канале, можно при заданных геометрических соотношениях и полученной по формуле (2) внутренней присоединенной длине горла  $l_e$  определить внешнюю присоединенную длину горла резонатора  $l_e$ . При этом имеет место следующая особенность. Как следует из вида формулы (3), вычисление присоединенной длины  $\bar{l}_e$  не будет приводить к большим погрешностям, если относительная длина горла  $\bar{l}$  не будет превышать значения присоединенной длины горла резонатора. В противном случае точность определения собственной частоты резонатора по результатам конечно-элементного моделирования должна быть очень высокой, порядка десятых долей герца, что, в общем, представляет собой непростую задачу. С этой точки зрения предпочтительным является соотношение  $\bar{l} < 0.2$ . Следовательно, при проведении конечно-элементного моделирования резонатора в канале целесообразно длину его горла брать как можно меньшей, а диаметр горла как можно большим. Вместе с тем минимальная длина горла на практике немногим меньше 1 мм. С другой стороны, увеличение диаметра горла приводит к пропорциональному увеличению и всех остальных размеров системы, что в свою очередь может приводить как к резкому увеличению числа конечных элементов в модели, так и к нарушению условия, когда в канале может распространяться только плоская звуковая волна.

Таким образом, успешное решение рассматриваемой задачи должно основываться на нахождении компромисса между выбранной конфигурацией системы резонатор-канал, теоретически обеспечивающей высокую точность оценки собственной частоты резонатора Гельмгольца в канале, и размером (числом элементов) соответствующей конечно-элементной модели, при котором приемлемая точность оценки обеспечивается по результатам численных расчетов. Исходя из этого, с целью повышения точности получаемых результатов, дальнейшие расчеты проводились для модели, в которой диаметр горла резонатора был уменьшен в два раза, до 10 мм, длина горла осталась неизменной, 2 мм. Диаметр цилиндрического объема резонатора, как и ранее, составлял 70 мм, а

его длина была уменьшена в два раза, до 30 мм, что обеспечивало в первом приближении неизменность собственной частоты резонатора. Все это позволило существенно уменьшить объем самого резонатора и объем канала при исследуемых соотношениях между размерами в рассматриваемой системе резонатор-канал, а вследствие этого сделать возможным более детальное разбиение модели на конечные элементы без увеличения общего их количества в модели. В такой модели минимальный размер элементов в окрестности горла резонатора был уменьшен до 0.2 мм.

При проведении численных расчетов оценивались собственные частоты резонатора Гельмгольца для различных конфигураций канала и соотношений  $d_0/b$ . Затем по полученным данным вычислялась внешняя присоединенная длина горла резонатора  $\bar{l}_e$ . Соответствующие вычисления проводились с помощью формулы (3). Основываясь на полученных при этих расчетах данных, было установлено, что зависимость внешней присоединенной длины горла резонатора от отношения  $d_0/b$  может быть описана аналитически полиномом третьей степени в виде

$$l_e = \alpha \left[ 1 - \beta_1 (d_0/b) + \beta_2 (d_0/b)^2 - \beta_3 (d_0/b)^3 \right] d_0/2. \quad (4)$$

Входящие в эту формулу коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta_i$  определялись по результатам регрессионного анализа. При этом для первого коэффициента было получено значение  $\alpha = 0.815$ , что согласуется с теоретической оценкой. Коэффициенты  $\beta_i$  определяются соотношением сторон канала  $a/b$ . Их значения для трех рассмотренных конфигураций канала представлены в таблице.

Результаты проведенных численных расчетов и их аналитическая аппроксимация показаны на рис. 7. Представленные кривые по характеру совпадают с теоретическими кривыми, представленными выше на рис. 2б, но имеют по сравнению с последними больший наклон, который тем больше, чем меньше отношение  $a/b$ . При  $a/b = 0.5$  и  $d_0/b \rightarrow 1$  значения присоединенной длины становятся отрицательными. Это говорит о том, что в этом случае движение среды в горле резонатора начинает существенно отличаться от поршневого, а сама концепция присоединенной длины горла перестает работать, что подтверждается рис. 6в. Наоборот, при  $d_0/b \rightarrow 0$  все представленные кривые, как и ожидалось, стремятся к одному значению, равному присоединенной длине отверстия в бесконечном экране заданной толщины. Следует отметить, что представленные на рис. 7 кривые имеют нелинейный характер, что в большей степени проявляется с увеличением отношения  $a/b$ . Линейной зависимостью в первом приближении они могут быть лишь при малых относительно размеров канала диаметрах горла,  $d_0/b < 0.25$ . С этой точки зрения данные резуль-

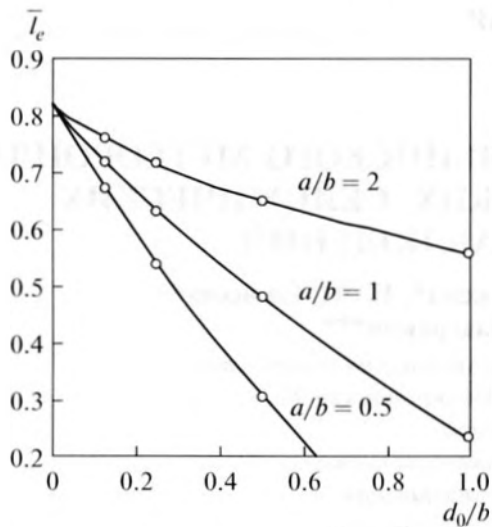


Рис. 7. Численная оценка зависимости внешней присоединенной длины горла резонатора от конфигурации канала (○) и ее аналитическая аппроксимация (—).

таты являются обобщением полученных ранее данных [7, 8], в которых присоединенная длина отверстия в перегородке описывается низкочастотным линейным приближением.

Таким образом, в данной работе показано, что теоретическая модель, описывающая внешнюю присоединенную длину горла резонатора в канале и основанная на предположении о поршневом характере колебаний в горле резонатора, дает достоверные результаты только при малых отношениях  $d_0/b$ . Поэтому предпочтительным для оценки собственной частоты резонатора Гельмгольца в канале является использование конечно-элементного моделирования, которое показало, что

характер колебаний в горле резонатора в общем случае имеет более сложный характер.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Davis D.D., Stokes G.M., Moor D., Stevens G.L. Theoretical and experimental investigation of mufflers with comments on engine exhaust muffler design // NASA Report, 1954. № 1192. 48 p.
2. Alster M. Improved calculation of resonant frequencies of Helmholtz resonator // J. Sound Vibr. 1972. V. 24. № 1. P. 63–85.
3. Tang P.K., Sirignano W.A. Theory of generalized Helmholtz resonator // J. Sound Vibr. 1973. V. 26. № 2. P. 247–262.
4. Ланин А.Д. Сечения рассеяния и поглощения резонатора Гельмгольца в многомодовом волноводе // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 3. С. 376–379.
5. Chanaud R.C. Effect of geometry on the resonance frequency of Helmholtz resonators // J. Sound Vibr. 1994. V. 178. № 3. P. 337–348.
6. Panton R.L., Miller J.M. Resonant frequencies of cylindrical Helmholtz resonators // J. Acoust. Soc. Am. 1975. V. 57. № 6. Pt. 2. P. 1533–1535.
7. Ingard U. On the theory and design of acoustic resonators // J. Acoust. Soc. Am. 1953. V. 25. № 6. P. 1037–1061.
8. Комкин А.И., Миронов М.А., Юдин С.И. О присоединенной длине отверстий // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 6. С. 677–682.
9. Norris A.N., Sheng J.C. Acoustic radiation from a circular pipe with an infinite flange // J. Sound Vibr. 1989. V. 135. № 1. P. 85–93.
10. Selamet A., Ji Z.L. Circular asymmetric Helmholtz resonators // J. Acoust. Soc. Am. 2000. V. 107. № 5. Pt. 1. P. 2360–2369.
11. Ingard U. Noise reduction analysis. Jones and Bartlett Publishers, Sudbury, Massachusetts, 2010. 452 p.
12. Комкин А.И., Миронов М.А. Импеданс излучения поршня на стенке прямоугольного канала // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 3. С. 257–260.