

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК: 534.23:537.874.6

НОВАЯ ВЕРСИЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО
МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ ПРИМЕНИТЕЛЬНО
К ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ НА ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ

© 2014 г. С. А. Маненков

Московский технический университет связи и информатики

111024, Москва, ул. Авиамоторная 8а

E-mail: mail44471@mail.ru

Поступила в редакцию 23.05.2013 г.

Предложен новый вариант модифицированного метода дискретных источников для решения скалярной задачи дифракции на импедансном теле вращения. Разработанный подход позволяет строить эффективные алгоритмы решения данной задачи для тел вращения различной формы, в том числе для рассеивателей, имеющих изломы границы. Приведены численные результаты для тел с различной геометрией и продемонстрирована высокая точность полученных результатов.

Ключевые слова: дифракция волн, метод вспомогательных источников, аналитическое продолжение волновых полей.

DOI: 10.7868/S0320791914010110

ВВЕДЕНИЕ

Существует много работ, посвященных методу вспомогательных источников для решения задач дифракции волн [1–5]. Одной из версий этого метода является модифицированный метод дискретных источников (ММДИ), предложенный в работах [4, 5], который впоследствии был применен к решению широкого класса задач теории дифракции электромагнитных и акустических волн, таких как рассеяние на одиночном теле вращения [6, 7], дифракция на группе соосных тел вращения [8, 9] и др. В перечисленных выше работах вспомогательная поверхность выбиралась в сферической (либо полярной) системе координат. В работах [10, 11] предложена модификация ММДИ для решения задачи дифракции на сильно вытянутых и сильно сплюснутых телах, а также на телах тороидальной формы. В указанных работах вспомогательная поверхность выбиралась в сфероидальных или тороидальных координатах, то есть решение задачи строилось в подходящей системе координат. В настоящей работе данный подход распространен на тела, имеющие изломы границы, такие как полусфера, конус и т.д. Для решения задачи использовались ортогональные координаты, в которых граница рассеивателя является координатной поверхностью. Для получения данных координат использовалось конформное отображение единичной окружности на контур осевого сечения тела. В определенных таким образом координатах вводится комплексная переменная, что позволяет осуществить выбор как

поверхности, на которой ставится граничное условие задачи, так и поверхности, являющейся носителем дискретных источников.

Предлагаемая модификация ММДИ близка к методу адаптивной коллокации, предложенному в работах [12, 13]. Существенным отличием данного метода является, во-первых, использование базиса Рэлея для аппроксимации рассеянного волнового поля. В настоящей работе, как и в перечисленных выше работах, используется базис, состоящий из фундаментальных решений уравнения Гельмгольца. Во-вторых, ММДИ применим и в том случае, когда поверхность тела не совпадает с координатной поверхностью выбранной системы координат. Данный факт продемонстрирован в работе при анализе рассеяния на вытянутом суперэллипсоиде вращения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ
ПРИ ПОМОЩИ ММДИ

Рассмотрим математическую постановку задачи. Требуется найти функцию $U^1(\mathbf{r}) \equiv U^1(x, y, z)$, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца всюду вне рассеивателя, занимающего область D с границей S , и краевому условию

$$U = W \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_S, \quad (1)$$

где W – импеданс тела, $U = U^0 + U^1$, причем U^0 – известная функция (поле падающей на рассеиватель волны), которая имеет вид

$$U^0 = \exp(-ikr(\sin \theta_0 \sin \varphi \cos \theta + \cos \theta_0 \cos \theta)). \quad (2)$$

Здесь (r, θ, φ) – сферические координаты. Рассеянное поле U^1 удовлетворяет условию на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial U^1}{\partial r} + ikU^1 \right) = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим алгоритм решения задачи при помощи ММДИ. С использованием представления для поля $U^1(\mathbf{r})$

$$U^1(\mathbf{r}) = \int_{\Sigma} j(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\sigma, \quad (4)$$

где $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R}$ ($R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, k – волновое число) – функция Грина, задача сводится к решению следующего интегрального уравнения:

$$\int_{\Sigma} j(\mathbf{r}') \left(G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - W \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \right) d\sigma = - \left(U^0(\mathbf{r}) - W \frac{\partial U^0(\mathbf{r})}{\partial n} \right), \quad (5)$$

$\mathbf{r} \in S.$

В формулах (4) и (5) $j(\mathbf{r})$ – вспомогательная неизвестная функция, распределенная на замкнутой поверхности Σ , лежащей внутри S . Основным моментом ММДИ является выбор вспомогательной поверхности Σ . Как показано в работах [14, 15], имеет место следующая теорема существования (рассмотрим ее на примере граничного условия Дирихле, то есть при $W = 0$):

Пусть простая замкнутая поверхность S такова, что k не является собственным значением внутренней однородной задачи Дирихле для области внутри S . Тогда интегральное уравнение (5) разрешимо в том и только том случае, если Σ охватывает все особенности решения $U^1(\mathbf{r})$ краевой задачи с граничным условием (1). В этом случае уравнение (5) имеет единственное решение.

Отметим, что в приведенной теореме не указывается способ построения вспомогательной поверхности, нужно лишь, чтобы эта поверхность охватывала все особенности продолжения волнового поля внутрь границы тела. В работах [4–11] было показано, что для получения наиболее эффективных численных алгоритмов необходимо выбирать вспомогательную поверхность при помощи аналитической деформации границы рассеивателя. Как указано во введении, ранее для выбора данной поверхности использовались сферические, сфероидальные и тороидальные координаты.

ВЫБОР ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В СФЕРИЧЕСКИХ ИЛИ СФЕРОИДАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Предположим вначале, что поверхность S задана в сферических координатах

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \quad (6)$$

где $r = r(\theta)$ и $\theta \in [0, \pi]$. Тогда уравнения вспомогательной поверхности в сферической системе координат имеют вид [4–9]

$$r_{\Sigma} = |\xi|, \quad \theta_{\Sigma} = \arg \xi, \quad \xi(\theta) = r(\theta + i\delta) \exp(i\theta - \delta), \quad (7)$$

где δ – положительный параметр, определяющий степень деформации исходной поверхности тела. Если $\delta = 0$, то переменная $\xi \in C$, где C – контур на комплексной плоскости ξ , соответствующий контуру осевого сечения рассеивателя и конгруэнтный ему. Если начать увеличивать δ , то C будет сжиматься и мы получим новый контур, который может быть выбран в качестве контура осевого сечения поверхности Σ . Для нахождения декартовых координат точки на вспомогательной поверхности используем формулы

$$x_{\Sigma} = \text{Im } \xi \cos \varphi, \quad y_{\Sigma} = \text{Im } \xi \sin \varphi, \quad z_{\Sigma} = \text{Re } \xi, \quad (8)$$

причем $\xi = z_{\Sigma} + i\rho_{\Sigma}$, где ρ_{Σ} и z_{Σ} – цилиндрические координаты точки на вспомогательной поверхности.

Пусть далее поверхность тела задана в вытянутых сфероидальных координатах:

$$x = f \text{ sh } \alpha \sin \beta \cos \varphi, \quad (9)$$

$$y = f \text{ sh } \alpha \sin \beta \sin \varphi, \quad z = f \text{ ch } \alpha \cos \beta,$$

причем уравнение S имеет вид $\alpha = \alpha(\beta)$, где $\beta \in [0, \pi]$. Тогда вспомогательная поверхность определяется соотношениями [10, 11]

$$\alpha_{\Sigma} = \text{Re } Z, \quad \beta_{\Sigma} = \text{Im } Z, \quad (10)$$

$$Z(\beta) = \alpha(\beta + i\delta) + i(\beta + i\delta),$$

где $(\alpha_{\Sigma}, \beta_{\Sigma}, \varphi)$ – сфероидальные координаты “образа” точки с координатами (α, β, φ) на исходной поверхности. Для получения декартовых координат точки на вспомогательной поверхности нужно вновь использовать формулы (8), в которых в данном случае $\xi(\beta) = f \text{ ch } Z(\beta)$.

ВЫБОР ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ ВРАЩЕНИЯ

Приведенные выше способы построения вспомогательной поверхности можно обобщить. Рассмотрим задачу дифракции на вытянутом сфероиде, поверхность которого совпадает с координатной поверхностью $\alpha = \alpha_0$ в сфероидальных координатах. Очевидно, что отображение $\xi(t) = f \text{ ch } Z(\beta) \equiv \frac{f}{2} (e^{\alpha+\beta} + e^{-\alpha-\beta})$ представляет собой конформное

отображение внешности единичной окружности в плоскости переменной $t = \exp(\alpha + i\beta)$ на внешность отрезка $[-f, f]$ в плоскости ξ (предполагаем, что $\beta \in [0, 2\pi]$, $\alpha \geq 0$). При этом эллипс $\alpha = \alpha_0$ в плоскости ξ отображается в окружность радиуса e^{α_0} в плоскости t . Как следует из формулы (10), в рассматриваемом случае необходимо в качестве вспомогательной поверхности Σ взять координатную поверхность $\alpha = \alpha_0 - \delta$, где $0 < \delta < \alpha_0$.

Пусть далее известно конформное отображение $\xi(t)$ внешности единичного круга в плоскости $t = \exp(\alpha + i\beta)$ (где $\beta \in [0, 2\pi]$, $\alpha \geq 0$) на внешность контура осевого сечения некоторого тела вращения (граница которого имеет изломы) в плоскости ξ . Для упрощения записи мы не вводим новых обозначений для переменных α и β . Подчеркнем, что эти величины никак не связаны со сфероидальными координатами, описанными выше. Тройку чисел (α, β, φ) можно рассматривать в качестве ортогональных координат вращения. В выбранных координатах поверхность тела S описывается уравнением $\alpha = 0$. При этом особенности волнового поля расположены на поверхности рассеивателя. Для того чтобы применить ММДИ, можно аппроксимировать поверхность S при помощи координатной поверхности, у которой координата $\alpha = \alpha_0 \ll 1$. При такой аппроксимации контур осевого сечения полученного тела не будет иметь особенностей (они будут располагаться внутри контура сечения “нового” рассеивателя), то есть будет гладким. Заметим, что формула (10), которая позволяет определить ортогональные координаты $(\alpha_\Sigma, \beta_\Sigma, \varphi)$ точки на вспомогательной поверхности, остается в силе, а зависимость, связывающая переменные ξ и Z (или ξ и t), будет отличаться от случая сфероидальных координат. В качестве поверхности Σ необходимо, в соответствии с формулой (10), взять координатную поверхность, у которой $\alpha = \alpha_0 - \delta$ ($0 < \delta < \alpha_0$).

Подчеркнем, что в отличие от задачи рассеяния на сфероиде, при анализе дифракции на теле, имеющем изломы, мы имеем приближенную постановку задачи, так как рассматриваем дифракцию на теле, поверхность которого описывается уравнением $\alpha = \alpha_0$, в то время как поверхность рассеивателя, для которого решается исходная задача дифракции, задается уравнением $\alpha = 0$.

ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ДЛЯ ТЕЛ, ИМЕЮЩИХ ИЗЛОМЫ ГРАНИЦЫ

Рассмотрим некоторые примеры. В случае задачи дифракции на полусфере имеем следующую функцию $\xi(t)$:

$$\xi(t) = -ia \frac{1 - \left(\frac{it-1}{t-i}\right)^{3/2}}{1 + \left(\frac{it-1}{t-i}\right)^{3/2}}. \tag{11}$$

Данная формула представляет собой композицию дробно-линейной и степенной функций. В формуле (11) a – радиус полусферы. В случае конуса, усеченного конуса и других тел, осевое сечение которых представляет собой многоугольник, мы использовали формулу Кристоффеля–Шварца для отображения внешности единичного круга в плоскости $t = \exp(\alpha + i\beta)$ на внешность соответствующей области в плоскости ξ . А именно, в случае конуса имеем

$$\xi'(t) = -\frac{C}{t^2} (1-t)^{2\gamma} (1+2qt+t^2)^{1-\gamma}. \tag{12}$$

Здесь γ – угол при основании осевого сечения конуса, выраженный в долях π , величина $q = \frac{\gamma}{1-\gamma} < 1$, а $C > 0$ – постоянная, которая определяется, исходя из размеров тела. В (12) штрих означает производную по переменной t . Формула (12) определяет конформное отображение внешности единичного круга в плоскости t на внешность равнобедренного треугольника в плоскости ξ . В случае усеченного конуса конформное отображение внешности единичного круга на внешность контура осевого сечения тела (равнобедренную трапецию) имеет вид

$$\xi'(t) = -\frac{C}{t^2} (1-2kt+t^2)^\gamma (1+2qkt+t^2)^{1-\gamma}, \tag{13}$$

где γ – угол при нижнем основании сечения конуса, выраженный в долях π , k – параметр, зависящий от отношения длин оснований конуса ($0 < k < 1$), $C > 0$ – постоянная, которая зависит от размеров конуса. Для нахождения функции $\xi(t)$ мы использовали разложение функций, стоящих в правых частях равенств (12) и (13), в ряды по степеням $1/t$ с последующим интегрированием этих разложений. Для разложения в ряд и интегрирования полученных рядов мы использовали пакет символьных вычислений Maple 9.5, который позволяет получить коэффициенты указанных разложений с требуемой точностью. Как было указано выше, контур сечения тела аппроксимировался линией $\xi = \xi(\alpha_0 + i\beta)$, где $\alpha_0 \ll 1$, а контур сечения вспомогательной поверхности имел вид $\xi = \xi(\alpha_0 - \delta + i\beta)$.

В случае решения задачи дифракции на сильно вытянутом цилиндре, как показывают вычисления, для аппроксимации контура осевого сечения тела более целесообразным является использова-

ние суперэллипсоида вращения, уравнение которого в цилиндрических координатах имеет вид [6]

$$\left(\frac{z}{a}\right)^{2l} + \left(\frac{\rho}{b}\right)^{2l} = 1. \quad (14)$$

Здесь l достаточно велико. При этом, если цилиндр вытянут вдоль оси z , то для получения более точных результатов следует задавать уравнение суперэллипсоида в вытянутых сфероидальных координатах (9). Отметим, что в данном случае поверхность тела уже не является координатной поверхностью. Для нахождения координат точек коллокации и координат дискретных источников мы исходили из уравнения

$$A^l(\chi + 1)^l + B^l\chi^l = 1, \quad (15)$$

в котором $A = \left(\frac{f}{a}\right)^2 \cos^2 \beta$, $B = \left(\frac{f}{b}\right)^2 \sin^2 \beta$, $\chi = \text{sh}^2 \alpha$. Для нахождения точек коллокации мы задаем координату $\beta = \beta_n \equiv \frac{\pi}{N}(n - 1/2)$, где $n = 1, 2, \dots, N$, и находим координату $\alpha_n = \ln(\sqrt{\chi_n} + \sqrt{\chi_n + 1})$, где χ_n определяем численно из (15).

Для нахождения координат точек источников использовался метод продолжения по параметру. Вначале определяем максимальное значение параметра деформации контура δ_{\max} . Для этого решаем уравнение [10, 11]

$$\alpha'(\beta) = -i. \quad (16)$$

Величина δ_{\max} равна мнимой части корня уравнения (16). Уравнение (16) определяет особенности продолжения вторичного волнового поля внутри границы рассеивателя [10, 14]. Можно показать, что величина δ_{\max} выражается по формуле

$$\delta_{\max} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - i\sqrt{\eta}}{1 + i\sqrt{\eta}} \right|, \quad (17)$$

где

$$\eta = \frac{1 + p - \tau^2 + \sqrt{(1 + p - \tau^2)^2 + 4\tau^2}}{2\tau^2}, \quad \tau = {}^{(2l-1)}\sqrt{-i\left(\frac{a}{b}\right)^{2l}},$$

$$p = f^2 \sqrt{\left(\frac{\tau}{a}\right)^{2l} + \left(\frac{1}{b}\right)^{2l}}.$$

Далее задаем значение δ ($0 < \delta < \delta_{\max}$) параметра деформации вспомогательного контура. Затем находим комплексную величину χ_n для n -го источника, решая уравнение (15), полагая в нем $\beta = \beta_n + i\tilde{\delta}$, где $0 \leq \tilde{\delta} \leq \delta$, и постепенно увеличивая параметр $\tilde{\delta}$ до требуемого значения δ . При этом на каждой следующей итерации берем в качестве начального приближения к корню уравнения (15) значение переменной χ , найденное на предыдущей итерации. Сфероидальные координаты n -го источника в соответствии с формулой (10) определяются по формулам $\alpha_n = \text{Re}(\alpha_n + i(\beta_n + i\tilde{\delta}))$ и $\beta_n = \text{Im}(\alpha_n + i(\beta_n + i\tilde{\delta}))$, где $\alpha_n = \ln(\sqrt{\chi_n} + \sqrt{\chi_n + 1})$.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

После выбора вспомогательной поверхности задача решается при помощи разложения неизвестной функции и функции Грина в ряд Фурье:

$$j(\beta', \varphi') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(\beta') \exp(im\varphi'), \quad (18)$$

$$G(\alpha, \beta, \alpha', \beta', \psi) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_m(\alpha, \beta, \alpha', \beta') \exp(im\psi), \quad (19)$$

$$\psi = \varphi - \varphi',$$

где

$$S_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-ikR - im\psi)}{kR} d\psi. \quad (20)$$

Заметим, что в случае сферических координат мы обозначили $\alpha = \ln r$ и $\beta = \theta$. В результате подстановки формул (18) и (19) в уравнение (5) получим бесконечную систему одномерных интегральных уравнений (СИУ) первого рода относительно неизвестных гармоник неизвестной функции $j(\beta', \varphi')$:

$$\int_0^{\pi} K_m(\beta, \beta') I_m(\beta') d\beta' = B_m(\beta), \quad (21)$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \beta \in [0, \pi].$$

Мы не выписываем выражений для ядер и правых частей уравнений (21).

СИУ (21) решалась методом коллокации [6, 10]. В соответствии с этим методом мы разбиваем интервал изменения переменной β точками

$\beta_n \equiv \frac{\pi}{N}(n - 1/2)$, где $n = 1, 2, \dots, N$. Далее заменяем интегралы в (21) суммами Римана и приравняем левую и правую части в полученной системе уравнений в точках коллокации, которые выбираем в точках $\beta = \beta_n$. Тем самым мы переходим от интегрального представления поля к дискретным источникам, расположенным на контуре осевого сечения вспомогательной поверхности тела. Заметим, что, как было указано во введении, в случае применения конформного отображения единичного круга в плоскости t на контур осевого сечения тела мы получаем подход, близкий к методу адаптивной коллокации. В этом алгоритме точки коллокации также выбирались при помощи конформного отображения контура сечения тела на единичную окружность. Однако при таком подходе не находили самого конформного отображения, а использовались лишь некоторые его свойства [12, 13].

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Сделаем замечание относительно выбора вспомогательной поверхности для тел, имеющих изломы границы (таких как конус, полусфера и др.). Как показывают численные эксперименты, нужно выбирать параметр δ максимально большим, то есть должно быть $\delta \approx \alpha_0$, причем $\delta < \alpha_0$. На практике мы брали $\delta = (1 - 10^{-6})\alpha_0$. Таким образом, для получения наиболее точных результатов вспомогательная поверхность должна практически совпадать с исходной границей рассеивателя.

Вначале сравним результаты, получаемые при помощи разработанного метода и метода продолженных граничных условий (МПГУ), предложенного в работах [15, 16]. Заметим, что в рассматриваемом случае оба метода являются приближенными, так как при использовании ММДИ мы аппроксимировали контур сечения конуса так, как это описано выше, а МПГУ является приближенным подходом. В таблице 1 представлены значения модуля диаграммы рассеяния $g(\theta, \varphi)$ на идеально отражающем конусе (на поверхности тела выполнены условия Дирихле) с сечением равностороннего треугольника со стороной $2ka \approx 20$, полученные при помощи ММДИ и МПГУ. Плоская волна падала перпендикулярно оси вращения тела. Диаграмма рассеяния получена при $\varphi = 0$. Параметр α_0 при использовании ММДИ был выбран равным 0.001, 0.005 и 0.01. Отметим, что размеры тела задаются приближенно и будут тем точнее, чем меньше параметр α_0 . Например, если выбрать $\alpha_0 = 0.01$, то линейные размеры тела, аппроксимирующего конус, задаются с относительной погрешностью, не превышающей 5×10^{-3} (по отношению к размерам аппроксимируемого конуса). Как видно из табл. 1, относительная разность результатов, полученных при помощи ММДИ и МПГУ, не превосходит 5×10^{-3} при $\alpha_0 = 0.001$. Видно также, что результаты сближаются при уменьшении α_0 .

Для контроля точности получаемых результатов была проведена проверка выполнения оптической теоремы для трех тел: полусферы, конуса и цилиндра. Как известно, оптическая теорема имеет вид

$$-\text{Im} g(\theta_0, 0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |g(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (22)$$

Для аппроксимации контуров осевого сечения полусферы и конуса использовались методы, описанные выше, причем мы брали $\alpha_0 = 0.01$.

Таблица 1. Сравнение результатов, полученных при помощи ММДИ и МПГУ

Угол θ , град	ММДИ			МПГУ
	$\alpha_0 = 0.01$	$\alpha_0 = 0.005$	$\alpha_0 = 0.001$	
0	0.6419	0.6938	0.7552	0.7575
60	4.8270	4.8169	4.8092	4.7958
90	43.950	43.489	43.080	42.999
150	4.0010	3.9547	3.9191	3.9152
180	1.9158	1.8755	1.8408	1.8440
240	1.3153	1.2849	1.2600	1.2636
270	1.4289	1.3846	1.3444	1.3481
330	12.170	12.161	12.146	12.127

Таблица 2. Точность выполнения оптической теоремы для полусферы, конуса и цилиндра

	Полусфера ($N = 500$)	Конус ($N = 600$)	Цилиндр ($N = 500$)
$W = 0$	8.24×10^{-12}	3.36×10^{-10}	1.22×10^{-10}
$W = 4$	2.22×10^{-7}	1.13×10^{-6}	3.86×10^{-7}
$W = 1000$	1.41×10^{-7}	1.09×10^{-6}	8.51×10^{-7}

Для аппроксимации цилиндра использовали суперэллипсоид вращения с параметром $l = 15$. Размеры тел имели значения: радиус основания конуса $ka \approx 10$ и угол при основании 75° , радиус полусферы 10. Размеры полуосей суперэллипсоида $ka = 10$ и $kb = 1$ соответственно. Плоская волна падала вдоль оси вращения тела. В таблице 2 представлена относительная разность значений правой и левой части в формуле (22) для указанных тел для трех значений импеданса рассеивателя. Как видно из таблицы, приближенная краевая задача решается с высокой точностью, так как относительная ошибка выполнения оптической теоремы не превосходит 5×10^{-6} .

На рис. 1–3 изображены зависимости модуля невязки краевого условия на контуре осевого сечения рассеивателя в виде полусферы, конуса и цилиндра, рассмотренные выше. Импеданс тела был выбран равным $W = 4$. Сплошные кривые на рисунках иллюстрируют поведение невязки в том случае, когда число дискретных источников составляло $N = 500$ для полусферы и цилиндра и 600 для конуса. Штриховыми кривыми изображены зависимости невязки для количества источни-

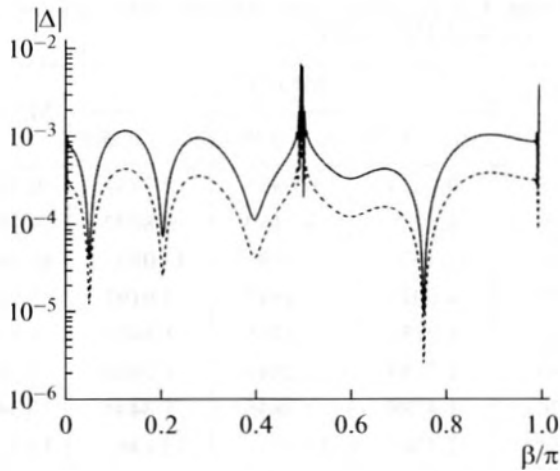


Рис. 1. Распределение невязки краевого условия для полусферы.

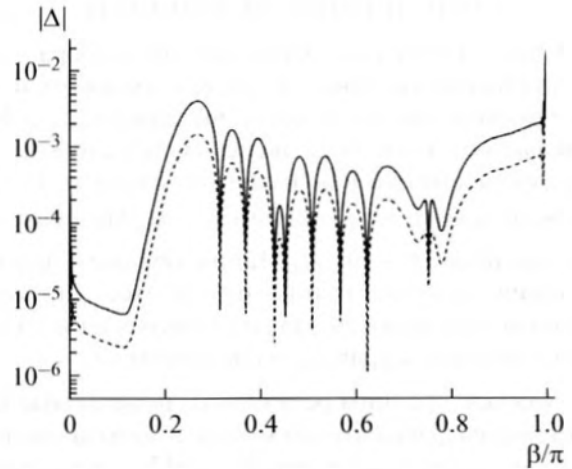


Рис. 2. Распределение невязки краевого условия для конуса.

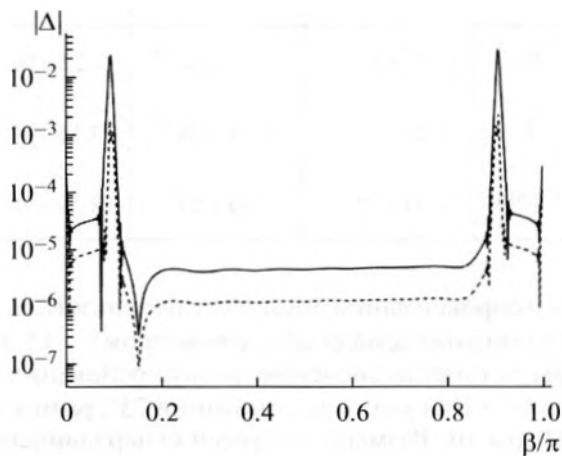


Рис. 3. Распределение невязки краевого условия для цилиндра.

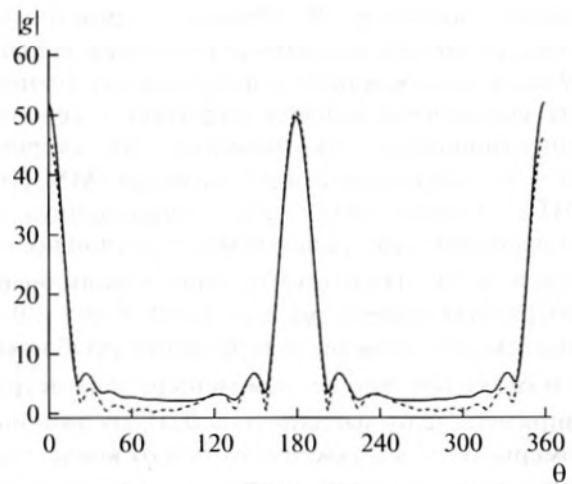


Рис. 4. Угловая зависимость диаграммы рассеяния для конуса (осевое падение волны).

ков соответственно 550 для полусферы и цилиндра и 650 для конуса. Как видно из рисунков, уровень невязки становится меньше при увеличении числа источников.

На рис. 4, 5 представлены угловые зависимости модуля диаграммы рассеяния для задачи дифракции на конусе и усеченном конусе соответственно. Размеры усеченного конуса: радиусы оснований $ka \approx 10$ и $kb \approx 5$, угол при нижнем основании 75° . Размеры конуса выбраны так, что конус вписан в усеченный конус и радиусы нижних оснований обоих тел одинаковы. Волна падала вдоль оси вращения тела. Сплошные кривые на рисунках соответствуют нулевому импедансу тела, а штриховыми кривыми изображены зави-

симости модуля диаграммы для $W = 1000$ (акустически жесткое тело). Как видно из рисунков, значения диаграммы рассеяния в направлении распространения волны при разных значениях импеданса отличаются для усеченного конуса примерно в 1.5 раза, в то время как у конуса они отличаются незначительно. Отметим, что для аппроксимации контуров осевого сечения тел мы брали во всех случаях параметр $\alpha_0 = 0.01$. Число дискретных источников составляло $N = 600$.

Рисунки 6 и 7 иллюстрируют поведение диаграммы рассеяния для указанных выше тел с теми же размерами и теми же значениями импеданса, но при условии, что плоская волна падала перпендикулярно оси вращения, то есть $\theta_0 = 90^\circ$.

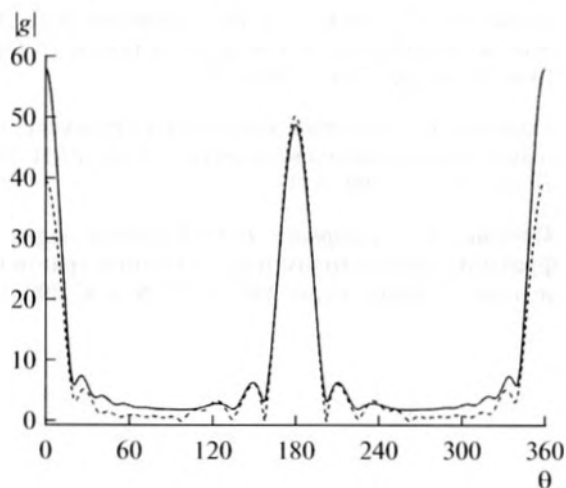


Рис. 5. Угловая зависимость диаграммы рассеяния для усеченного конуса (осевое падение волны).

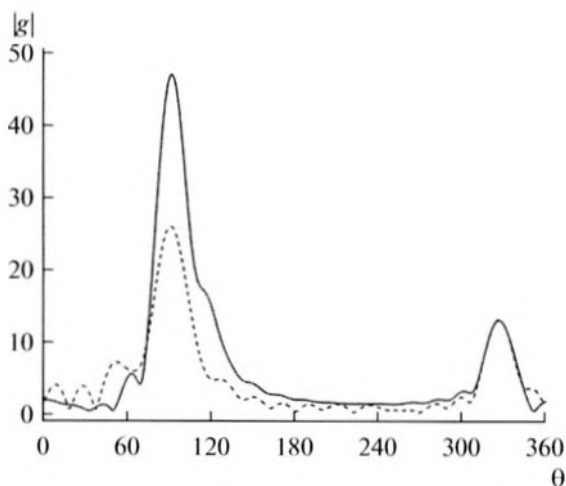


Рис. 6. Угловая зависимость диаграммы рассеяния для конуса (падение волны перпендикулярно оси вращения).

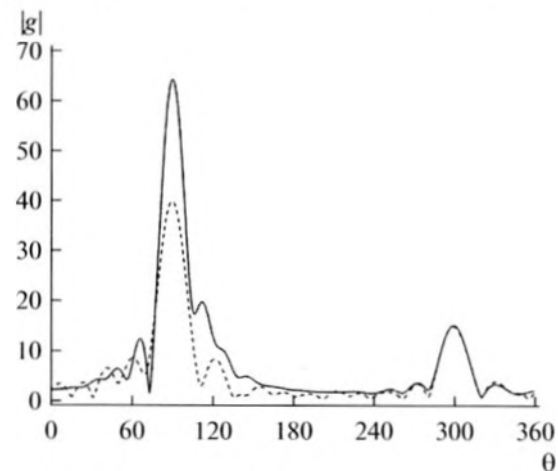


Рис. 7. Угловая зависимость диаграммы рассеяния для усеченного конуса (падение волны перпендикулярно оси вращения).

Диаграмма на рисунках построена для углов наблюдения $\varphi = 0$ и $\varphi = 180^\circ$. Обозначения кривых те же, что и в случае рис. 4 и 5. Как следует из рисунков, значение диаграммы в направлении распространения волны примерно в 1.5–2 раза больше для акустически мягкого тела.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 12-02-00062, 11-02-01280).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Купрадзе В.Д., Алексидзе М.А. Метод функциональных уравнений для приближенного решения некоторых граничных проблем // ЖВММФ. 1963. Т. 4. № 4. С. 683–715.
2. Купрадзе В.Д. О приближенных методах решения задач математической физики // Успехи мат. наук. 1967. Т. 22. № 2. С. 59–107.
3. Бобровицкий Ю.И., Томилина Т.М. Применение метода вспомогательных источников для расчета излучения ограниченных упругих тел // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 5. С. 737–750.
4. Кюркчан А.Г., Минаев С.А., Соловейчик А.Л. Модификация метода дискретных источников на основе априорной информации об особенностях дифракционного поля // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46. № 6. С. 666–672.
5. Anioutine A.P., Kyurkchan A.G., Minaev S.A. About a universal modification to the method of discrete sources and its application // J. Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer. 2003. V. 79–80. P. 509–520.
6. Кюркчан А.Г., Маненков С.А., Негорожина Е.С. Решение задачи дифракции электромагнитного поля на телах вращения при помощи модифицированного метода дискретных источников // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51. № 11. С. 1285–1293.
7. Anyutine A.P., Kyurkchan A.G., Manenkov S.A., Minaev S.A. About 3D solution of diffraction problems by MMDS // J. Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2006. V. 100. P. 26–40.
8. Кюркчан А.Г., Маненков С.А., Негорожина Е.С. Моделирование рассеяния волн группой близко расположенных тел // Радиотехника и электроника. 2008. Т. 53. № 3. С. 276–285.
9. Kyurkchan A.G., Manenkov S.A. The application of a modified method of discrete sources for solving the problem of wave scattering by group of bodies // J. Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer. 2008. V. 109. P. 1430–1439.
10. Kyurkchan A.G., Manenkov S.A. Application of different orthogonal coordinates using modified method of discrete sources for solving a problem of wave diffraction on a body of revolution // J. Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer. 2012. V. 113. P. 2368–2378.

11. Кюркчан А.Г., Маненков С.А. Применение различных ортогональных систем координат для моделирования рассеяния волн группой тел // Радиотехника и электроника. 2012. Т. 57. № 9. С. 987–995.
12. Клеев А.И., Маненков А.Б. Метод адаптивной коллокации в двумерных задачах дифракции // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 5. С. 557–565.
13. Kleev A.I., Manenkov A.B. The Convergence of Point-Matching Techniques // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1989. V. 37. № 1. P. 50–54.
14. Кюркчан А.Г., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е. Особенности продолжения волновых полей // УФН. 1996. Т. 166. № 12. С. 1285–1308.
15. Кюркчан А.Г., Анютин А.П. Метод продолженных граничных условий и вейвлеты // Докл. РАН. 2002. Т. 385. № 3. С. 309–313.
16. Кюркчан А.Г., Смирнова Н.И. Решение задач дифракции волн методом продолженных граничных условий // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 4. С. 490–499.