

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ
АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 519.958:531.33.1:535.4

ПРЕПЯТСТВИЯ В АКУСТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ, СТАНОВЯЩИЕСЯ
“НЕВИДИМЫМИ” НА ЗАДАННЫХ ЧАСТОТАХ

© 2013 г. А.-С. Боннэ-Бен Диа, С. А. Назаров

POEMS (UMR 7231 CNRS-ENSTA-INRIA),

ENSTA, 828 Boulevard des Maréchaux, Palaiseau, France

E-mail: anne-sophie.bonnet-bendhia@ensta-paristech.fr

Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет,
198504, Россия, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 28

E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступила в редакцию 11.02.2013 г.

Установлено существование пологих возмущений стенок акустического волновода—полосы, для которых несколько волн на заданных частотах преодолевают образованное препятствие без какого-либо искажения или только со сдвигом фазы.

Ключевые слова: акустический волновод, рассеяние, невидимое препятствие, асимптотический анализ.

DOI: 10.7868/S0320791913050043

ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о том, может ли препятствие стать “невидимым” по крайней мере на некоторых заданных частотах, имеет большой интерес в приложениях. С одной стороны, интенсивные исследования посвящены практическому созданию “шапки—невидимки” посредством искусно подобранных композитных материалов, которые действуют на волну как искажатель пространства (ср. [1, 2] и [3]). С другой стороны, этот вопрос возникает и в обратных задачах рассеяния, так как, например, Linear Sampling Method, призванный восстановить форму препятствия по полным данным рассеяния, перестает работать, как только препятствие становится невидимым хотя бы для одной частоты (см. [4]).

В данной статье рассматриваются гармонические во времени акустические волны, распространяющиеся в двумерном акустическом волноводе с жесткими стенками, а целью работы является построение локальных возмущений стенок, становящимися “невидимыми” на заранее зафиксированных частотах. При этом “невидимость” означает, что рассеянные поля, порожденные всеми распространяющимися волнами с указанными частотами, быстро затухают при удалении от препятствия, т.е. введенные возмущения не сказываются на дальнем поле. При этом существенно используется тот факт, что на фиксированной частоте имеется только конечный набор распространяющихся волн и, как следствие, невидимость препятствия достигается пу-

тем обращения в нуль конечного числа коэффициентов рассеяния.

Распространение волн в двумерном акустическом волноводе

$$\Pi^\varepsilon = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{2} - \varepsilon h_-(x) < y < \frac{1}{2} + \varepsilon h_+(x) \right\} \quad (1)$$

со слабо деформированными жесткими стенками (рис. 1) описывается при помощи решений задачи Неймана для уравнения Гельмгольца

$$-\Delta u^\varepsilon(x, y) = \lambda u^\varepsilon(x, y), \quad (x, y) \in \Pi^\varepsilon, \quad (2)$$

$$\partial_n u^\varepsilon(x, y) = 0, \quad x \in \partial \Pi^\varepsilon. \quad (3)$$

Здесь u^ε — давление в среде, заполняющей волновод, λ — спектральный параметр, пропорциональный квадрату частоты гармонических колебаний, Δ — оператор Лапласа, ∂_n — производная вдоль внешней нормали, а в формуле (1) фигурируют малый положительный параметр ε и гладкие профильные функции h_\pm , имеющие, по предположению, носители на отрезке $(-l, l)$ с длиной $2l > 0$, т.е. обращающиеся в нуль при $|x| \geq l$. Мас-

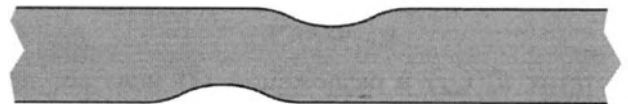


Рис. 1. Волновод с искривленными стенками.

штабированием ширина прямой полосы Π^0 (невозмущенного волновода) сведена к единице, т.е. декартовы координаты x , y и все геометрические параметры сделаны безразмерными.

При $\lambda \in (\pi^2, 4\pi^2)$, т.е. между первым и вторым положительными порогами непрерывного спектра $\sigma_c = \overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty)$ задачи (2), (3), в единичной полосе Π^0 существуют осциллирующие волны

$$w_0^\alpha(x) = (2\sqrt{\lambda})^{-1/2} e^{i\alpha\sqrt{\lambda}x}, \quad (4)$$

$$w_1^\alpha(x, y) = (\lambda - \pi^2)^{-1/4} e^{i\alpha\sqrt{\lambda - \pi^2}x} \sin(\pi y), \quad (5)$$

причем $\alpha = \pm$, а нормирующие множители подобраны так, чтобы потом матрица рассеяния оказалась унитарной. Волны w_0^+ и w_1^+ бегут вдоль волновода в положительном направлении оси x , но при наличии препятствия — деформированных стенок — подвержены рассеянию. Одна из целей статьи — показать, что при малом $\varepsilon > 0$ и любом, но заранее зафиксированном параметре $\lambda \in (\pi^2, 4\pi^2)$ существуют нетривиальные профили $\pm\varepsilon h_\pm(x)$, при которых задача (2), (3) в волноводе (1) имеет решение

$$u_1^\varepsilon(x, y) = w_1^+(x, y) + \hat{u}_1^\varepsilon(x, y), \quad (6)$$

отличающееся от самой волны $w_1^+(x, y)$ лишь слагаемым $\hat{u}_1^\varepsilon(x, y)$, экспоненциально затухающим в обоих рукавах волновода

$$\Pi_\pm = \{(x, y) : \pm x > l, |y| < 1/2\}.$$

Иными словами, акустическое поле (6) инициировано приходящей из рукава Π_- волной w_1^+ , которая без отражения и какого-либо существенного искажения проникает в рукав Π_+ , так как возмущение $\hat{u}_1^\varepsilon(x, y)$ экспоненциально затухает на бесконечности. Таким образом, для наблюдателя, удаленного на большое расстояние в рукаве Π_+ , волна w_1^+ с заданной частотой не позволяет обнаружить искривление стенок.

Для “поршневой” моды $w_0^+(x)$, постоянной на поперечном сечении волновода Π^0 , полученный далее результат оказывается несколько иным: аналогичное (6) акустическое поле принимает вид

$u_0^\varepsilon(x, y) = \chi_-(x)w_0^+(x, y) + \chi_+(x)e^{i\psi_\varepsilon}w_0^+(x, y) + \hat{u}_0^\varepsilon(x, y)$, (7) т.е. по прохождению деформированных участков стенок волна претерпевает сдвиг фазы с показателем

$$\psi_\varepsilon = O(\varepsilon^2). \quad (8)$$

Остаток $\hat{u}_0^\varepsilon(x, y)$ в разложении (7) исчезает при $x \rightarrow \pm\infty$ с экспоненциальной скоростью, а χ_\pm — гладкие срезающие функции,

$$\chi_\pm(x) = 1 \text{ при } \pm x > 2l \text{ и } \chi_\pm(x) = 0 \text{ при } \pm x < l. \quad (9)$$

Иными словами, если наблюдатель способен измерять только амплитуду колебаний среды, то препятствие не наблюдается и при помощи волны w_0^+ .

Представленный далее метод построения искомого профиля $\varepsilon h_\pm(x)$ в значительной мере происходит от техники [5, 6] обеспечения принудительной устойчивости собственных чисел, вкрапленных в непрерывный спектр, и оказывается пригодным для изучения распространения волн с разнообразными частотными характеристиками, однако для упрощения изложения и сокращения сопутствующих выкладок ограничиваемся рассмотрением двух ситуаций. Во-первых, находим профильные функции h_\pm , для которых при любых заданных наперед значениях спектрального параметра

$$0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_N < \pi^2 \quad (10)$$

задача (2), (3) имеет решения вида (7) в количестве N штук. Во-вторых, при уже упоминавшемся ограничении

$$\lambda \in (\pi^2, 4\pi^2) \quad (11)$$

и дополнительно при $\lambda \neq 9\pi^2/8$ подбираем функции h_\pm так, чтобы были соблюдены оба требования (7) и (6), однако только на одной частоте.

ЧАСТОТЫ ИЗ ПЕРВОГО СЕГМЕНТА НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА

Зафиксируем значения (10) спектрального параметра. При произвольной форме стенок на участке $(-l, l) \ni x$ рассеяние волны $w_0^+(x; \lambda_p)$, приходящей из рукава Π_- , описывается разложением

$$u_0^\varepsilon(x, y; \lambda_p) = \chi_-(x)w_0^+(x; \lambda_p) + \chi_-(x)s_-^\varepsilon(\lambda_p)w_0^-(x; \lambda_p) + \chi_+(x)s_+^\varepsilon(\lambda_p)w_0^+(x; \lambda_p) + \hat{u}_0^\varepsilon(x, y; \lambda_p). \quad (12)$$

Здесь $p = 1, \dots, N$, а функции χ_\pm и w_0^\pm заданы формулами (9) и (4), причем в последних произведена замена $\lambda \mapsto \lambda_p$. Как обычно, закон сохранения энергии устанавливает следующую связь коэффициентов отражения $s_-^\varepsilon(\lambda_p)$ и прохождения $s_+^\varepsilon(\lambda_p)$:

$$\left|s_-^\varepsilon(\lambda_p)\right|^2 + \left|s_+^\varepsilon(\lambda_p)\right|^2 = 1. \quad (13)$$

В силу этого соотношения для придания формулам (12) вида (7) с некоторыми $\psi_p^\varepsilon \in [0, 2\pi)$ достаточно добиться выполнения равенств

$$s_-^\varepsilon(\lambda_p) = 0, \quad p = 1, \dots, N. \quad (14)$$

Кроме того, известно (см., например, [7]), что матрица рассеяния размером 2×2 унитарная и симметричная, т.е. приобретает вид

$$\begin{pmatrix} s_-^\varepsilon(\lambda_p) & s_+^\varepsilon(\lambda_p) \\ s_+^\varepsilon(\lambda_p) & -(s_+^\varepsilon(\lambda_p))^{-1}s_+^\varepsilon(\lambda_p)s_-^\varepsilon(\lambda_p) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Следовательно, если поле $u^\varepsilon(x, y; \lambda_p)$ приобретает вид (7), то

$$e^{i\psi_p^e} \overline{u_0^e(x, y; \lambda_p)} = \chi_+(x) w_0^-(x; \lambda_p) + \chi_-(x) e^{i\psi_p^e} \overline{w_0^-(x; \lambda_p)} + e^{i\psi_p^e} \overline{u_0^e(x, y; \lambda_p)},$$

а значит, волна w_0^- , приходящая из рукава Π_+ , также преодолевает препятствие без отражения и с тем же сдвигом фазы ψ_p^e , а матрица рассеяния (15) становится антидиагональной с одинаковыми элементами $e^{i\psi_p^e}$.

Построим асимптотику решения $u_0^e(x, y; \lambda_p)$ задачи (2), (3). Примем простейший анзац, соответствующий регулярному возмущению границы области [8; гл. 5],

$$u_0^e(x, y; \lambda_p) = w_0^+(x; \lambda_p) + \varepsilon u_0^+(x, y; \lambda_p) + \dots, \quad (16)$$

где поправка $u_0^+(x, y; \lambda_p)$ подлежит определению, а многоточие заменяет младшие члены, несущественные для предприняемого асимптотического анализа. Подчеркнем, что функции w_0^+ и u_0^+ изначально заданы в прямой полосе Π^0 , но продолжены при сохранении гладкости за ее пределы и потому определены всюду в возмущенной полосе Π^e . Понятно, что нужно выполнить уравнение Гельмгольца

$$\Delta u_0^+(x, y; \lambda_p) = \lambda_p u_0^+(x, y; \lambda_p), \quad (x, y) \in \Pi^0. \quad (17)$$

С целью найти краевые условия напомним формулу

$$\partial_n = (1 + \varepsilon^2 |\partial_x h_\pm(x)|^2)^{-1/2} (\pm \partial_y - \varepsilon \partial_x h_\pm(x) \partial_x) \quad (18)$$

для производной вдоль внешней нормали на искривленных стенках волновода (1) и получим, что

$$\begin{aligned} \partial_n u_0^e \left(x, \pm \frac{1}{2} \pm \varepsilon h_\pm(x); \lambda_p \right) &= \\ &= \pm \partial_y w_0^+(x; \lambda_p) - \varepsilon \partial_x h_\pm(x) \partial_x w_0^+(x; \lambda_p) + \dots \\ &\dots \pm \varepsilon \partial_y u_0^+ \left(x, \pm \frac{1}{2} \pm \varepsilon h_\pm(x); \lambda_p \right) + \\ &+ \dots \varepsilon \left(\pm \partial_y u_0^+ \left(x, \pm \frac{1}{2}; \lambda_p \right) - \partial_x h_\pm(x) \partial_x w_0^+(x; \lambda_p) \right) + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

В результате краевые условия на спрямленной границе выглядят так:

$$\pm \partial_y u_0^+ \left(x, \pm \frac{1}{2}; \lambda_p \right) = \partial_x h_\pm(x) \partial_x w_0^+(x; \lambda_p), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (20)$$

Задача (17), (20) имеет единственное решение, подчиненное условиям излучения

$$u_0^+(x, y; \lambda_p) = \sum_{\pm} \chi_{\pm}(x) s_{\pm}^+(\lambda_p) w_0^{\pm}(x; \lambda_p) + O\left(e^{-|x|\sqrt{\pi^2 - \lambda_p}}\right), \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (21)$$

Коэффициенты $s_{\pm}^+(\lambda_p)$ в разложении (21) зависят от правых частей (20). Для их вычисления подставим функции u_0^+ и w_0^{α} , $\alpha = \pm$, в формулу Грина

на длинном ($R \rightarrow +\infty$) прямоугольнике $\Pi^0(R) = (-R, R) \times (-1/2, 1/2)$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\pm} \int_{-l}^l \overline{w_0^{\alpha}(x; \lambda_p)} \partial_x h_{\pm}(x) \partial_x w_0^+(x; \lambda_p) dx &= \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{\pm} \int_{-R}^R \overline{w_0^{\alpha}(x; \lambda_p)} \partial_y u_0^+ \left(x, \pm \frac{1}{2}; \lambda_p \right) dx = \\ &= - \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{\pm} \int_{-1/2}^{1/2} \left(\overline{w_0^{\alpha}(\pm R; \lambda_p)} \partial_x u_0^+(\pm R, y; \lambda_p) - \right. \\ &\quad \left. - u_0^+(\pm R, y; \lambda_p) \overline{\partial_x w_0^{\alpha}(\pm R; \lambda_p)} \right) dx = -i s_{\alpha}^+(\lambda_p), \end{aligned} \quad (22)$$

а значит,

$$\begin{aligned} s_{\pm}^+(\lambda_p) &= -\frac{1}{2} \sum_{\pm} \int_{-l}^l \partial_x h_{\pm}(x) dx = 0, \\ s_{\pm}^-(\lambda_p) &= -\frac{1}{2} \sum_{\pm} \int_{-l}^l e^{2i\sqrt{\lambda_p}x} \partial_x h_{\pm}(x) dx i \sqrt{\lambda_p} \times \\ &\quad \times \int_{-l}^l e^{2i\sqrt{\lambda_p}x} h_{\oplus}(x) dx, \end{aligned} \quad (23)$$

причем

$$h_{\oplus}(x) = h_+(x) + h_-(x), \quad h_{\ominus}(x) = h_+(x) - h_-(x). \quad (24)$$

Отметим, что первое выражение (23) получено при учете требования $h_{\pm}(l) = h_{\pm}(-l) = 0$.

АЛГОРИТМ ПОИСКА НУЖНОГО ПРОФИЛЯ

При помощи формул (23) нетрудно подобрать h_{\pm} так, чтобы все коэффициенты $s_{\pm}^e(\lambda_p)$ обратились в нуль, однако такие профили $h_{\pm} = h_{\pm}^0$ в свою очередь порождают возмущения следующего порядка малости ε^2 в коэффициентах отражения. С целью добиться полного уничтожения этих коэффициентов добавим к h_{\pm}^0 поправки, т.е. положим

$$h_{\pm}(x) = h_{\pm}^0(x) + \sum_{j=1,2} \sum_{k=1}^N \tau_{jk} h_{\pm}^{jk}(x). \quad (25)$$

Здесь τ_{jk} – новые малые параметры, собранные в вектор

$$\tau = (\tau_{11}, \tau_{21}, \dots, \tau_{1N}, \tau_{2N}) \in \mathbb{R}^{2N}, \quad (26)$$

а h_{\pm}^0 и h_{\pm}^{jk} – гладкие функции, опять-таки аннулирующиеся при $|x| \geq l$, но подчиненные условиям ортогональности и нормировки

$$\int_{-l}^l \cos(2\sqrt{\lambda_p}x) h_{\oplus}^0(x) dx = \int_{-l}^l \sin(2\sqrt{\lambda_p}x) h_{\oplus}^0(x) dx = 0, \quad (27)$$

$$\int_{-l}^l \cos(2\sqrt{\lambda_p}x) h_{\oplus}^{jq}(x) dx = \delta_{j,1} \delta_{p,q},$$

$$\int_{-l}^l \sin(2\sqrt{\lambda_p}x) h_{\oplus}^{jq}(x) dx = \delta_{j,2} \delta_{p,q}. \tag{28}$$

При этом $j = 1, 2, p, q = 1, \dots, N$, и $\delta_{j,k}$ – символ Кронекера. Введенные ограничения понятным образом согласованы с формулами (23) для главных поправок в асимптотических представлениях коэффициентов прохождения и отражения

$$s_+^{\varepsilon}(\lambda_p) = 1 + \varepsilon 0 + \varepsilon^2 \tilde{s}_+^{\varepsilon}(\lambda_p),$$

$$s_-^{\varepsilon}(\lambda_p) = 0 + \varepsilon s'_-(\lambda_p) + \varepsilon^2 \tilde{s}_-^{\varepsilon}(\lambda_p). \tag{29}$$

Именно, в силу равенств (27), (28) и (23) получаем, что

$$s'_-(\lambda_p) = i\sqrt{\lambda_p}(\tau_{1p} + i\tau_{2p}), \quad p = 1, \dots, N. \tag{30}$$

Условия ортогональности (27) придают поправкам $\varepsilon s'_-(\lambda_p)$ очередной порядок малости $\varepsilon|\tau|$, а условия (28) привносят в выражение (30) слагаемые $i\sqrt{\lambda_p}\tau_{1p}$ и $-\sqrt{\lambda_p}\tau_{2p}$, позволяющие компенсировать остаток $\varepsilon^2 \tilde{s}_+^{\varepsilon}(\lambda_p)$, который слабо поддается контролю.

Оценки $|\tilde{s}_+^{\varepsilon}(\lambda_p)| \leq c_p$, справедливые при $|\tau| \leq \rho$ с некоторым $\rho > 0$ и тем самым обосновывающие асимптотические разложения (29), выводятся по стандартной схеме (см., например, [9, 5]) и поэтому обсуждаться не будут. Остановимся более подробно на другом, исключительно важном, обстоятельстве. Замена координат

$$(x, y) \mapsto (X, Y) = \left(x, (1 + \varepsilon h_{\oplus}(x))^{-1} \left(y - \frac{1}{2} \varepsilon h_{\ominus}(x)\right)\right) \tag{31}$$

спрямляет границу $\partial\Pi^{\varepsilon}$, т.е. переводит деформированную полосу Π^{ε} в прямую полосу Π^0 . Замена (31) оказывается неособенной при малом ε и к тому же “почти тождественной”. В результате дифференциальное уравнение (2) и краевые условия (3), записанные в криволинейных координатах (X, Y) и поставленные в полосе $\Pi^0 = \mathbb{R} \times (-1/2, 1/2)$ и на ее сторонах $\mathbb{R} \times \{\pm 1/2\}$, мало отличаются от оператора Гельмгольца $-(\partial_X^2 + \partial_Y^2) - \lambda_p$ и производных $\pm \partial_Y$ соответственно, причем малые поправки аналитически зависят от параметров ε и τ . Полученная регулярно возмущенная краевая задача в Π^0 допускает формулировку в весовых функциональных пространствах с отделенной асимптотикой (подробности см., например, в монографии [10; гл. 5] и обзорах [11, 12]), т.е. общие результаты теории операторов (ср. [13; гл. 7 и 8] и [14; гл. 4]) передают свойства аналитичности¹ многим

¹ Для целей данной работы достаточно свойства гладкости.

функционалам, вычисленным на решении $u_0^{\varepsilon}(x, y; \lambda_p, \tau)$, в частности,

$$s_{\pm}^{\varepsilon}(\lambda_p, \tau) = (2\sqrt{\lambda_p})^{1/2} \left(\int_{-1/2}^{1/2} u_0^{\varepsilon}(\pm 2l, y; \lambda_p, \tau) dy - \delta_{\pm,-} \right). \tag{32}$$

Отметим, что $Y = y$ при $|x| > l$ в силу определения (31), а равенства (32) вытекают из разложения решения в ряд Фурье на удалении от зоны возмущения волновода. Кроме того, теперь в обозначениях решения (12) и коэффициентов (29) указана зависимость от параметров (26).

Согласно формулам (29) и (30) соотношения (14) принимают вид системы трансцендентных уравнений

$$\tau_{1p} = -\varepsilon(\lambda_p)^{-1/2} \text{Im} \tilde{s}_-^{\varepsilon}(\lambda_p, \tau),$$

$$\tau_{2p} = \varepsilon(\lambda_p)^{-1/2} \text{Re} \tilde{s}_-^{\varepsilon}(\lambda_p, \tau), \quad p = 1, \dots, N, \tag{33}$$

причем благодаря аналитичности функций $(\varepsilon, \tau) \mapsto s_-^{\varepsilon}(\lambda_p, \tau)$ оператор из правых частей (33), действующий в евклидовом пространстве \mathbb{R}^{2N} , оказывается сжимающим в шаре $\mathbb{B}(\rho) = \{\tau \in \mathbb{R}^{2N} : |\tau| \leq \rho\}$ при малом $\varepsilon > 0$ и некотором радиусе $\rho > 0$. В итоге принцип Банаха сжимающих отображений представляет такие положительные величины ε_0, ρ_0 и c_0 , что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ система (33) приобретает единственное решение $\tau \in \mathbb{B}(\rho_0)$, удовлетворяющее оценке

$$|\tau| \leq c_0 \varepsilon. \tag{34}$$

Поскольку равенства (33) обеспечивают условия (14), связь (13) коэффициентов прохождения и отражения показывает, что $|s_+^{\varepsilon}(\lambda_p, \tau)| = 1$, а значит, при $p = 1, \dots, N$ акустические поля $u_0^{\varepsilon}(x, y; \lambda_p, \tau)$, порожденные приходящими из рукава Π_- волнами $w_0^+(x, y; \lambda_p)$, принимает вид (7) с коэффициентами прохождения $e^{i\psi_p^{\varepsilon}}$, причем в силу первых формул (23) и (29) верны оценки

$$|\psi_p^{\varepsilon}| \leq c_0 \varepsilon^2, \quad p = 1, \dots, N.$$

Профили h_{\pm} с нужными свойствами построены. Выбор основных составляющих h_{\pm}^0 в их разложениях (25) остается весьма свободным: $2N$ условий ортогональности (27) наложены только на их сумму $h_{\oplus}^0 = h_+^0 + h_-^0$. В частности, можно считать, что $h_+(x) = 0$, т.е. у волновода (1) искривлена лишь одна стенка. В силу оценки (34) поправки $\varepsilon \tau_{jq} h_{\pm}^{jq}(x)$ приобретают следующий порядок малости ε^2 в сравнении с $\varepsilon h_{\pm}^0(x)$.

ЧАСТОТА ИЗ ВТОРОГО СЕГМЕНТА
НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА

Зафиксируем одно значение (11) спектрального параметра. Не накладывая каких-либо ограничений на форму стенок волновода (1), рассмотрим два акустических поля

$$u_0^\varepsilon(x, y) = \chi_-(x)w_0^+(x) + \sum_{\pm} \chi_{\pm}(x)(s_{0,0\pm}^\varepsilon w_0^\pm(x) + s_{0,1\pm}^\varepsilon w_1^\pm(x, y)) + \tilde{u}_0^\varepsilon(x, y), \quad (35)$$

$$u_1^\varepsilon(x, y) = \chi_-(x)w_1^+(x, y) + \sum_{\pm} \chi_{\pm}(x)(s_{1,0\pm}^\varepsilon w_0^\pm(x) + s_{1,1\pm}^\varepsilon w_1^\pm(x, y)) + \tilde{u}_1^\varepsilon(x, y), \quad (36)$$

порожденных волнами (4) и (5), $\alpha = +$, приходящими из левого рукава Π_- . Из коэффициентов $s_{j,0\pm}^\varepsilon$ и $s_{j,1\pm}^\varepsilon$ составим две столбца общей матрицы рассеяния S^ε размером 4×4 – еще два столбца образованы коэффициентами прохождения и отражения волн (4) и (5) с индексом $\alpha = -$, инициированных в рукаве Π_+ . Как известно (см., например, [7] и [5]), матрица S^ε является унитарной и симметричной, а значит, верны равенства

$$\sum_{\pm} \left(s_{j,0\pm}^\varepsilon \overline{s_{k,0\pm}^\varepsilon} + s_{j,1\pm}^\varepsilon \overline{s_{k,1\pm}^\varepsilon} \right) = \delta_{j,k}, \quad j, k = 0, 1, \quad (37)$$

$$s_{1,0-}^\varepsilon = s_{0,1-}^\varepsilon. \quad (38)$$

Покажем, что решения (35) и (36) примут вид (7) и (6) соответственно, если удастся соблюсти пять (а не семь, как кажется на первый взгляд) условий

$$s_{0,0-}^\varepsilon = 0, \quad s_{0,1+}^\varepsilon = 0, \quad s_{0,1-}^\varepsilon = 0, \quad (39)$$

$$\text{Im } s_{1,1+}^\varepsilon = 0, \quad s_{1,1-}^\varepsilon = 0. \quad (40)$$

Равенства (39) вместе с (37) при $j = k = 0$ означают, что $|s_{0,0+}^\varepsilon| = 1$, т.е. $s_{0,0+}^\varepsilon = e^{i\theta^\varepsilon}$. Теперь формула (37) с $j = 0$ и $k = 1$ влечет за собой соотношение $s_{1,0+}^\varepsilon = 0$, а формула (38) при учете (39) означает, что $s_{1,0-}^\varepsilon = 0$. Наконец, соотношение (37) с индексами $j = k = 1$ приводит к равенству $|s_{1,1+}^\varepsilon| = 1$, а значит, первое требование (40) вместе с проверяемой далее асимптотикой $s_{1,1+}^\varepsilon = 1 + O(\varepsilon)$ обеспечивает последнюю из нужных формул $s_{1,1+}^\varepsilon = 1$.

Построим асимптотику коэффициентов $s_{j,k\pm}^\varepsilon$. Примем аналогичные (16) асимптотические анзацы

$$u_j^\varepsilon(x, y) = w_j^+(x, y) + \varepsilon u_j'(x, y) + \dots$$

и найдем поправки u_j' как решения задач

$$\Delta u_j'(x, y) = \lambda u_j'(x, y), \quad (x, y) \in \Pi^0, \quad \pm \partial_y u_j' \left(x, \pm \frac{1}{2} \right) g_j^\pm(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (41)$$

с условиями излучения

$$u_j'(x, y) = \sum_{\pm} \chi_{\pm}(x) (s'_{j,0\pm} w_0^\pm(x) + s'_{j,1\pm} w_1^\pm(x, y)) + O \left(e^{-|x|\sqrt{4\pi^2 - \lambda}} \right), \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (42)$$

Правые части условий Неймана принимают вид

$$g_0'(x) = \partial_x h_{\pm}(x) \partial_x w_0^\pm(x), \quad (43)$$

$$g_1'(x) = \partial_x \left(h_{\pm}(x) \partial_x w_1^\pm \left(x, \pm \frac{1}{2} \right) \right) + \lambda h_{\pm}(x) w_1^\pm \left(x, \pm \frac{1}{2} \right). \quad (44)$$

Выражение (43) уже возникло в краевом условии (20) благодаря соотношению (18) и выкладке (19), которая использует равенства (18) и нуждается в следующей модификации при выводе выражения (44):

$$\begin{aligned} \partial_n u_1^\varepsilon \left(x, \pm \frac{1}{2} \pm \varepsilon h_{\pm}(x) \right) &= \pm \partial_y w_1^\pm \left(x, \pm \frac{1}{2} \pm \varepsilon h_{\pm}(x) \right) - \\ &- \varepsilon \partial_x h_{\pm}(x) \partial_x w_1^\pm \left(x, \pm \frac{1}{2} \pm \varepsilon h_{\pm}(x) \right) \pm \\ &\pm \varepsilon \partial_y u_1' \left(x, \pm \frac{1}{2} \pm \varepsilon h_{\pm}(x) \right) + \dots = \\ &= \pm \partial_y w_1^\pm \left(x, \pm \frac{1}{2} \right) + \varepsilon h_{\pm}(x) \partial_y^2 w_1^\pm \left(x, \pm \frac{1}{2} \right) - \\ &- \varepsilon \partial_x h_{\pm}(x) \partial_x w_1^\pm \left(x, \pm \frac{1}{2} \right) \pm \varepsilon \partial_y u_1' \left(x, \pm \frac{1}{2} \right) + \dots = \\ &= 0 + \varepsilon \left(\pm \partial_y u_1' \left(x, \pm \frac{1}{2} \right) - \partial_x \left(h_{\pm}(x) \partial_x w_1^\pm \left(x, \pm \frac{1}{2} \right) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \lambda h_{\pm}(x) w_1^\pm \left(x, \pm \frac{1}{2} \right) \right) + \dots \end{aligned}$$

При этом были учтены формула Тейлора по переменной y для функции w_1^\pm , а также уравнение Гельмгольца $\partial_y^2 w_1^\pm = -\partial_x^2 w_1^\pm - \lambda w_1^\pm$.

Коэффициенты $s'_{j,k\pm}$ в разложениях (42) решенной задачи (41) вычисляются по прежней схеме. Так, формулы (23) остаются без изменений:

$$s'_{0,0+} = 0, \quad s'_{0,0-} = i\sqrt{\lambda} \int_{-l}^l e^{2i\sqrt{\lambda}x} h_{\oplus}(x) dx. \quad (45)$$

Кроме того, повторив вычисления (22) с заменой $w_0^\alpha \mapsto w_1^\alpha$, приходим к равенству

$$\begin{aligned} -i s'_{0,1\alpha} &= \sum_{\pm} \int_{-l}^l w_1^\alpha \left(x, \pm \frac{1}{2} \right) \partial_x h_{\pm}(x) \partial_x w_0^\pm(x) dx = \\ &= \frac{i\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda - \pi^2}^{1/2}} \int_{-l}^l e^{-i\alpha\sqrt{\lambda - \pi^2}x} \partial_x h_{\odot}(x) e^{i\sqrt{\lambda}x} dx, \end{aligned}$$

а значит,

$$s'_{0,1\pm} = i \frac{\lambda^{1/4}}{(\lambda - \pi^2)^{1/4}} \frac{\sqrt{\lambda} \mp \sqrt{\lambda - \pi^2}}{\sqrt{2}} \int_{-l}^l e^{i(\sqrt{\lambda} \mp \sqrt{\lambda - \pi^2})x} h_{\odot}(x) dx.$$

Напоминаем, что h_{\oplus} и h_{\odot} – функции (24).

Теперь в формулу Грина на длинном прямоугольнике $\Pi^0(R)$ подставим функции u'_\pm и w_1^α , $\alpha = \pm$. Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{\pm} \int_{-l}^l h_{\pm}(x) \left(\lambda w_1^+ \left(x, \pm \frac{1}{2} \right) \overline{w_1^\alpha \left(x, \pm \frac{1}{2} \right)} - \right. \\ & \left. - \partial_x w_1^+ \left(x, \pm \frac{1}{2} \right) \overline{\partial_x w_1^\alpha \left(x, \pm \frac{1}{2} \right)} \right) dx = \\ & = \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{\pm} \int_{-R}^R w_1^\alpha \left(x, \pm \frac{1}{2} \right) \overline{\partial_y u'_0 \left(x, \pm \frac{1}{2} \right)} dx = \\ & = - \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{\pm} \int_{-l/2}^{l/2} \left(w_1^\alpha(\pm R, y) \overline{\partial_x u'_0(\pm R, y)} - \right. \\ & \left. - u'_0(\pm R, y) \overline{\partial_x w_1^\alpha(\pm R, y)} \right) dx = -is'_{1,1\alpha}. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что слева было произведено интегрирование по частям, а справа приняты во внимание формулы (42) и (5). В результате обнаруживаем, что

$$\begin{aligned} s'_{1,1+} &= \frac{i\pi^2}{\sqrt{\lambda - \pi^2}} \int_{-l}^l h_{\oplus}(x) dx, \\ s'_{1,1-} &= \frac{i(2\lambda - \pi^2)}{\sqrt{\lambda - \pi^2}} \int_{-l}^l e^{2i\sqrt{\lambda - \pi^2}x} h_{\oplus}(x) dx. \end{aligned} \tag{46}$$

Основные поправки (45) и (46) в асимптотических разложениях

$$s_{j,k\pm}^\varepsilon = s_{j,k\pm}^0 + \varepsilon s'_{j,k\pm} + \varepsilon^2 \tilde{s}_{j,k\pm}^\varepsilon$$

найденны, и теперь по прежней схеме можно соблюсти требования (39) и (40) путем подбора малых параметров

$$\begin{aligned} \tau &= (\tau_{1,1+}, \tau_{10,1+}, \tau_{20,1+}, \tau_{10,1-}, \tau_{20,1-}, \\ & \tau_{10,0-}, \tau_{20,0-}, \tau_{11,1-}, \tau_{21,1-}) \in \mathbb{R}^9 \end{aligned} \tag{47}$$

в следующих представлениях профильных функций:

$$\begin{aligned} h_{\pm}(x) &= h_{\pm}^0(x) + \tau_{1,1+} h_{\pm}^{1,1+}(x) + \\ & + \sum_{j=1,2} \left(\sum_{\alpha=\pm} \tau_{j,0,\alpha} h_{\pm}^{j,0,\alpha}(x) + \sum_{l=0,1} \tau_{j,l,l} h_{\pm}^{j,l,l-}(x) \right). \end{aligned} \tag{48}$$

Эти громоздкие формулы нуждаются в пояснениях. Размерность девять вектора (47) соотносится с количеством связей (39) и (40) (четыре комплексных плюс одна вещественная), обеспечивающих нужные свойства решений (35) и (36). В соответствии с формулами (45) и (46) главные составляющие h_{\pm}^0 профильных функций (48) требуются подчинить следующим девяти условиям ортогональности:

$$\begin{aligned} & \int_{-l}^l \cos(2\sqrt{\lambda}x) h_{\oplus}(x) dx \int_{-l}^l \sin(2\sqrt{\lambda}x) h_{\oplus}(x) dx = 0, \\ & \int_{-l}^l \cos((\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{\lambda - \pi^2})x) h_{\oplus}(x) dx = \\ & = \int_{-l}^l \sin((\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{\lambda - \pi^2})x) h_{\oplus}(x) dx = 0, \\ & \int_{-l}^l \cos(2\sqrt{\lambda - \pi^2}x) h_{\oplus}(x) dx = \\ & = \int_{-l}^l \sin(2\sqrt{\lambda - \pi^2}x) h_{\oplus}(x) dx = 0, \quad \int_{-l}^l h_{\oplus}(x) dx = 0. \end{aligned} \tag{49}$$

Соотношения (49) вполне аналогичны соотношениям (27), введенным ранее в ситуации (10), и имеют то же назначение: сделать основные поправки $\varepsilon s_{j,k\pm}^\varepsilon$ бесконечно малыми $O(\varepsilon|\tau|)$. Условия ортогональности и нормировки, которым следует подчинить младшие члены $\tau_{j,l,l} h_{\pm}^{j,l,l-}(x)$ в представлении (48), вводятся по тому же принципу, что и ранее условия (28), однако для линейной независимости всех возникших тригонометрических функций приходится предположить, что $\lambda \neq 9\pi^2/8$. Не будем выписывать их явно, но заметим, что благодаря требованию (11) девять весовых тригонометрических функций, фигурирующих в интегралах (49), линейно независимы, т.е. добиться выполнения нужных требований можно и нетрудно. В результате равенства (39) и (40) превращаются в систему трансцендентных уравнений

$$\tau = \varepsilon T^\varepsilon(\tau) \in \mathbb{R}^9 \tag{50}$$

(ср. систему (33) в ситуации (10)). В силу уже упоминавшейся аналитичности элементов $(\varepsilon, \tau) \mapsto s_{j,k\pm}^\varepsilon(\varepsilon, \tau)$ матрицы рассеяния S^ε , оператор T^ε становится сжимающим при малых ε и $|\tau|$, а система (50) приобретает единственное решение, подчиненное оценке (34). Как уже пояснялось, в волноводе (1) с профилями стенок (48) акустические поля (35) и (36), инициированные входящими из рукава Π_- волнами w_0^+ и w_1^+ , имеют специфический вид (7) и (6), а сдвиг фазы ψ_ε удовлетворяет соотношению (8).

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

1. Ни в одной из рассмотренных ситуаций не удалось соблюсти требование $\psi_\varepsilon = 0$ в формуле (7), т.е. добиться полного отсутствия искажения поршневой моды (4) препятствием. Причина кроется в том, что для гладких функций h_{\pm} , обращаясь в нуль вне интервала $(-l, l) \ni x$, выражения (23) и (45) обязательно аннулируются. В

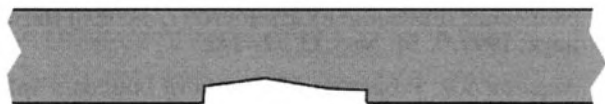


Рис. 2. Возмущение стенки в виде уступа.

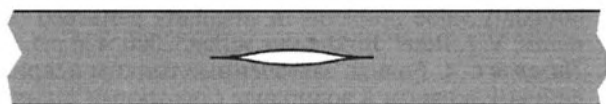


Рис. 3. Внутреннее препятствие.

принципе, этот недостаток реализованной схемы построения “невидимых” препятствий можно устранить двумя способами. Во-первых, путем построения младших, порядка ε^2 , членов разложений коэффициентов $s_+^\varepsilon(\lambda_p)$ и $s_-^\varepsilon(\lambda_p)$, однако соответствующие асимптотические конструкции становятся весьма громоздкими и потому противоречащими основной цели статьи. Во-вторых, возмущениям стенок волновода можно придать форму уступов (рис. 2), т.е. снять требования гладкости функций h_\pm . В таком случае удастся добиться равенства $s_+^\varepsilon(\lambda_p) = 1$, однако исчезает возможность пользоваться результатами [13; § 7.6] о регулярном возмущении границы, а проверка нужных свойств оператора T^ε в системе (50) становится несоизмеримо более сложной и требует применения методов асимптотического анализа краевых задач в областях с сингулярно возмущенными границами [8; гл. 5].

2. Построение асимптотики коэффициентов $s_{j,k\pm}^\varepsilon$ в акустическом поле (12) основано на том, что волны $w_j^+(x, y)$ оставляют малые невязки в краевом условии Неймана на слабо деформированных участках стенок. Этот же эффект (однако только для первой моды $w_0^+(x)$) наблюдается и в случае волновода-полосы Π^0 с узким внутренним препятствием (рис. 3)

$$\Xi^\varepsilon = \{(x, y) : x \in [-l, l], -\varepsilon h_-(x) \leq y - d \leq \varepsilon h_+(x)\}; \quad (51)$$

здесь $d \in (-1/2, 1/2)$, h_\pm – гладкие функции, $h_\pm(\pm l) = h_\pm(\pm l) = 0$, и ε – по-прежнему малый положительный параметр. Каких-либо новых технических моментов при рассмотрении препятствия (51) не возникает (ср. выкладки в статье [9] для иной геометрической ситуации), так как волны (4) удовлетворяют предельной задаче в полосе Π^0 с одномерным разрезом $\Xi^0 = \{(x, y) : |x| \leq l, y = d\}$. Вместе с тем, при решении системы уравнений (33) нужно позаботиться о выполнении условия

$$h(x) = h_+(x) + h_-(x) \geq 0, \quad x \in (-l, l),$$

взаимного непроникновения возмущенных берегов разреза. Внутренне препятствие будет изучено в другой публикации авторов.

3. Можно попытаться сделать препятствие невидимым и на более высоких частотах, т.е. при $\lambda \in (m^2\pi^2, (m+1)^2\pi^2)$ с натуральным $m > 1$. Однако в этом случае весовые тригонометрические функции, возникающие в условиях ортогональности и

нормировки для дополнительных членов анзаца профильных функций h_\pm , могут оказаться линейно зависимыми, т.е. соблюсти эти условия никак нельзя (именно поэтому ранее было введено условие $\lambda \neq 9\pi^2/8$). Пример линейной зависимости при $m = 2$ выглядит так:

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda - \pi^2} &= 2\sqrt{\lambda - 4\pi^2} \text{ при} \\ \lambda &= \frac{225}{56}\pi^2 \in (4\pi^2, 9\pi^2). \end{aligned}$$

Аналогичные неприятности способны появиться и при рассмотрении нескольких чисел $\lambda_1 < \dots < \lambda_N$ из второго интервала $(\pi^2, 4\pi^2)$ непрерывного спектра. Первая формула (46) показывает, что в любом случае добиться полного прохождения волны $w_1^+(x, y; \lambda_p)$ удастся при помощи разработанного метода лишь на одной из выбранных частот.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-00348).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бобровницкий Ю.И. Новое решение задачи об акустически прозрачном теле // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 6. С. 751–755.
2. Бобровницкий Ю.И. Теория новых поглощающих и нерассеивающих покрытий повышенной эффективности // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 5. С. 613–624.
3. Greenleaf A., Kurylev Ya., Lassas M., Uhlmann G. Invisibility and inverse problems // Bull. Amer. Math. Soc. 2009. V. 46. № 1. P. 55–97.
4. Bourgeois L., Lunéville E. The Linear Sampling Method in a waveguide: a modal formulation // Inverse Problems. 1999. 2008. V. 24. 015018.
5. Назаров С.А. Асимптотика собственных чисел на непрерывном спектре регулярно возмущенного квантового волновода // Теоретическая и математическая физика. 2011. Т. 167. № 2. С. 239–262.
6. Назаров С.А. Захваченные волны в коленчатом волноводе с жесткими стенками // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 6. С. 746–754.
7. Pagneux V., Maurel A. Scattering matrix properties with evanescent modes for waveguides in fluids and solids // J. Acoust. Soc. Am. 2004. V. 116. № 4. P. 1913–1920.
8. Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении области. Тбилиси: изд-во ТГУ, 1981. 208 с. (Немецкий перевод: Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. 1. Berlin: Akademie-Verlag. 1991. 432 S.; английский перевод: Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B. Asymptotic theory of elliptic

- boundary value problems in singularly perturbed domains. V. 1. Basel: Birkhäuser Verlag, 2000. 435 p.).
9. Назаров С.А. Волны, захваченные тонким искривленным экраном в волноводе с жесткими стенками // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 6. С. 683–691.
 10. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991. С. 336. (Английский перевод: Nazarov S.A., Plamenevsky B.A. Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin, New York: Walter de Gruyter. 1994. 525 p.).
 11. Назаров С.А. Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // Успехи матем. наук. 1999. Т. 54. № 5. С. 77–142.
 12. Nazarov S.A. Properties of spectra of boundary value problems in cylindrical and quasicylindrical domains // Sobolev Spaces in Mathematics. V. II (Maz'ya V., Ed.) International Mathematical Series, V. 9. New York: Springer, 2008. P. 261–309.
 13. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
 14. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы М.: ИЛ, 1962. 830 с.