

ОБРАБОТКА АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ.  
КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 534.2 : 517.9

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ  
АКУСТИЧЕСКОЙ ТОМОГРАФИИ ДЛЯ ДАННЫХ ОТ КВАЗИТОЧЕЧНЫХ  
ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

© 2013 г. В. А. Буров, А. С. Шуруп, Д. И. Зотов, О. Д. Румянцева

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет  
119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы

Тел.: (495) 939-30-81; Факс: (495) 932-88-20 E-mail: burov@phys.msu.ru

Поступила в редакцию 02.12.2012 г.

Обсуждаются и численно реализуются два варианта функционально-аналитического алгоритма, предназначенного для решения обратных задач томографического типа. Экспериментальными данными являются акустические поля, излученные и принятые преобразователями, эквивалентными точечным; по этим данным рассчитывается классическая или обобщенная амплитуда рассеяния, и далее восстанавливаются характеристики рассеивателя. Алгоритм не требует ни линеаризации модели, ни итераций для уточнения оценок рассеивателей, что делает его привлекательным для решения задач акустической томографии в различных приложениях. Представляются результаты численного восстановления неоднородностей скорости звука и поглощения в среде.

*Ключевые слова:* обратная задача, акустическая томография, функциональный алгоритм, рефракционно-поглощающий рассеиватель.

DOI: 10.7868/S0320791913030040

ВВЕДЕНИЕ

Акустическая томография позволяет исследовать объекты, в которых могут распространяться звуковые волны, а непосредственное измерение внутренних характеристик этих объектов затруднительно или невозможно. В частности, методы акустической томографии находят применение в медицинской диагностике, в томографии океанической среды, при неразрушающем контроле твердотельных конструкций. Однако большинство известных методов решения задач акустической томографии являются приближенными. Так, например, в томографии океана [1], как правило, пользуются линейным приближением, позволяющим установить простую связь между искомыми характеристиками исследуемой акватории и параметрами акустических сигналов, прошедшими через нее, а при существенном отклонении ситуации от линейного приближения применяют итерационные процедуры. В общем случае, использование того или иного приближения накладывает ограничения на область применимости томографических схем. В связи с этим актуальны разработка и реализация новых подходов, опирающихся на методы математической физики и позволяющих получить решение томографических задач для объектов (рассеивателей), достаточно сильно искажающих первичное поле, падающее на них.

Акустическая томография может рассматриваться как частный случай более общего класса обратных задач рассеяния. Известны методы решения обратных задач, которые позволяют получить решение, обладающее математической строгостью (по крайней мере, для достаточно широкого класса рассеивателей), – это так называемые функционально-аналитические методы. Изначально функционально-аналитические методы разрабатывались для квантовомеханических приложений. Достаточно подробный исторический обзор дан, например, в [2–4]. Впервые возможность применения этих методов в акустических обратных задачах была проанализирована в [5] и позже в [6] на примере двумерного монохроматического алгоритма Новикова–Гриневича–Мананова (НГМ-алгоритм) [7–9]. Впоследствии НГМ-алгоритм был модифицирован Р.Г. Новиковым [10, 11]. Как НГМ-алгоритм, так и его модифицированный вариант обеспечивают безытерационное решение обратной двумерной монохроматической задачи с учетом эффектов многократного рассеяния волн. Для рассеивателей, не создающих рассеяния назад, это решение является строгим, хотя нарушение условия отсутствия рассеяния назад не влечет принципиальных ограничений для практического применения алгоритмов [6]. Однако при увеличении силы рассеивателя возможно возникновение неустойчивости решения, и устранение данной трудности неиз-

бежно требует перехода к многочастотному или импульсному режиму зондирования [12].

В трехмерном пространстве возникают свои особенности решения обратной задачи функционально-аналитическими методами. Для акустических томографических задач представляется перспективным трехмерный монохроматический алгоритм [13, 14], работоспособность которого подтверждена численным моделированием [15].

В упомянутых двумерных и трехмерных алгоритмах и их численных реализациях, направленных на применение функционально-аналитических алгоритмов в акустических приложениях, в качестве исходных данных выступает амплитуда рассеяния, которая является характеристикой результата рассеяния на исследуемом объекте плоской волны и регистрации рассеянного поля плоскими приемниками. А именно, когда рассеиватель облучается падающим полем в виде классической<sup>1</sup> плоской запаздывающей волны  $u_0^{\text{cl}}(\mathbf{z}, \mathbf{k}; \omega_j) = \exp(i\mathbf{kz})$ , характеризуемой волновым вектором  $\mathbf{k}$  ( $\mathbf{z}$  – произвольная точка пространства), полное запаздывающее поле  $u^{\text{cl}}(\mathbf{z}, \mathbf{k}; \omega_j)$  в дальней зоне имеет асимптотику

$$u^{\text{cl}}(\mathbf{z}, \mathbf{k}; \omega_j) = \exp(i\mathbf{kz}) + C_D \frac{\exp(ik_{0j}|\mathbf{z}|)}{\sqrt{|\mathbf{z}|^{D-1}}} \times f(\mathbf{k}, I = k_{0j} \frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|}; \omega_j) + o\left(\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{z}|^{D-1}}}\right), \quad |\mathbf{z}| \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где  $C_D = -\frac{\pi\sqrt{\pi}(1+i)}{\sqrt{k_0}}$  при  $D = 2$ ;  $C_D = -2\pi^2$  при  $D = 3$ ;

$D$  – размерность пространства. В данном соотношении фигурирует классическая амплитуда рассеяния для запаздывающих полей  $f(\mathbf{k}, I; \omega_j)$ , где  $k_{0j} = \omega_j/c_0$  – волновое число;  $I$  – волновой вектор рассеянной волны  $u^{\text{cl}}(\mathbf{z}, \mathbf{k}; \omega_j) = \exp(i\mathbf{kz})$  в дальней зоне;  $\mathbf{k}, I \in \mathbb{R}^D$ ,  $\mathbf{k}^2 = I^2 = (k_{0j})^2$ . В то же время, на практике в томографических схемах более удобно использовать излучающие и приемные преобразователи, которые эквивалентны точечным преобразователям (такие преобразователи будут ниже называться квазиточечными). В связи с этим в настоящей работе подробно обсуждается предложенный в [16, 17] функционально-аналитический способ нахождения классической и обобщенной амплитуд рассеяния на основе исходных данных от приемоизлучающих квазиточечных преобразователей. Этот способ может быть реализован как в терминах углов, задающих положение преобразователей, так и в терминах угловых

гармоник, что более удобно при численной реализации [18].

## НАХОЖДЕНИЕ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ ПО ДАННЫМ ОТ КВАЗИТОЧЕЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

В  $D$ -мерном пространстве рассматривается область  $V_S$  с достаточно гладкой границей  $S$  – поверхностью в трехмерном пространстве или контуром в двумерном пространстве. Внутри области  $V_S$  находится неоднородность (рассеиватель), распределение параметров которой описывается функцией  $v(\mathbf{r}, \omega_j)$ ,  $\mathbf{r} \in V_S$ . Функция рассеивателя  $v(\mathbf{r}, \omega_j)$  отлична от нуля внутри области рассеяния  $\mathfrak{R}$ , целиком лежащей внутри области  $V_S$ , т.е.  $\mathfrak{R} \subset V_S$ . Индекс  $j$  задает значение конкретной частоты  $\omega_j$ , имея в виду возможное обобщение излагаемого ниже алгоритма пересчета амплитуды рассеяния из данных от квазиточечных преобразователей и последующего алгоритма восстановления распределения рассеивающих неоднородностей на полихроматический режим зондирования. Общее выражение для  $v(\mathbf{r}, \omega_j)$  имеет вид

$$v(\mathbf{r}, \omega_j) = \omega_j^2 \left( \frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(\mathbf{r})} \right) + \sqrt{\rho(\mathbf{r})} \nabla^2 \left( \frac{1}{\sqrt{\rho(\mathbf{r})}} \right) - i2\omega_j \frac{\alpha(\mathbf{r}, \omega_j)}{c(\mathbf{r})}, \quad (2)$$

при предполагаемой временной зависимости полей  $\sim \exp(-i\omega_j t)$ . Эта функция характеризует пространственные неоднородности фазовой скорости звука  $c(\mathbf{r})$  и плотности среды  $\rho(\mathbf{r})$  по сравнению с их значениями  $c_0$  и  $\rho_0$  в однородной фоновой непоглощающей среде. Кроме того, в ряде прикладных задач (например, с медицинской направленностью) нужно учитывать также присутствие поглощения в рассеивателе, имеющего амплитудный коэффициент поглощения  $\alpha(\mathbf{r}, \omega_j)$  на частоте  $\omega_j$ . Произвольное классическое падающее монохроматическое поле  $u_0(\mathbf{z}, \alpha_{\text{inc}}; \omega_j)$  в произвольной точке  $\mathbf{z}$  пространства без рассеивателя возбуждается источниками этого поля  $F_0(\mathbf{z}, \alpha_{\text{inc}}; \omega_j)$ , которые находятся вне  $V_S$ :

$$\nabla^2 u_0(\mathbf{z}, \alpha_{\text{inc}}; \omega_j) + k_{0j}^2 u_0(\mathbf{z}, \alpha_{\text{inc}}; \omega_j) = F_0(\mathbf{z}, \alpha_{\text{inc}}; \omega_j); \\ F_0(\mathbf{z}, \alpha_{\text{inc}}; \omega_j) \equiv 0 \text{ при } \mathbf{z} \in V_S.$$

Здесь  $\alpha_{\text{inc}}$  – параметр падающего поля, определяющий его конфигурацию; у этого параметра дописывается нижний индекс “inc” (от “incident” – “падающий”) для отличия от коэффициента поглощения  $\alpha$ . В присутствии рассеивателя, за счет

<sup>1</sup> Под термином “классические” здесь и далее будут подразумеваться обычно используемые в акустике волновые величины, в отличие от вводимых далее обобщенных величин.

рассеяния поля  $u_0$  в области  $\mathfrak{R}$ , создается поле  $u(\mathbf{z}, \alpha_{\text{inc}}; \omega_j)$ , удовлетворяющее уравнению

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(\mathbf{z}, \alpha_{\text{inc}}; \omega_j) + k_{0j}^2 u(\mathbf{z}, \alpha_{\text{inc}}; \omega_j) = \\ = F_0(\mathbf{z}, \alpha_{\text{inc}}; \omega_j) + v(\mathbf{z}, \omega_j) u(\mathbf{z}, \alpha_{\text{inc}}; \omega_j). \end{aligned} \quad (3)$$

Ниже вид полей  $u_0$  и  $u$  будет оговариваться конкретно, в зависимости от текущего контекста.

В работе [16] данные рассеяния задаются в виде оператора  $\hat{\mathcal{F}}(\omega_j)$ , связывающего значения волнового поля  $u(\mathbf{z}', \alpha_{\text{inc}}; \omega_j)$  на границе  $S$  области  $V_S$ , содержащей рассеиватель, и значения нормальной производной этого поля на той же границе:

$$\frac{\partial u}{\partial n_S} = \hat{\mathcal{F}}(\omega_j)(u|_S). \quad (4)$$

При этом внутри области  $V_S$  рассматриваемые волновые поля должны удовлетворять уравнению (3) при  $F_0 = 0$ . В явном виде соотношение (4) записывается как

$$\frac{\partial u(\mathbf{z}', \alpha_{\text{inc}}; \omega_j)}{\partial n_{\mathbf{z}'}} = \int_S \mathcal{F}(\mathbf{z}', \mathbf{z}''; \omega_j) u(\mathbf{z}'', \alpha_{\text{inc}}; \omega_j) dz''; \quad (5)$$

$\mathbf{z}', \mathbf{z}'' \in S,$

где  $\frac{\partial u(\mathbf{z}', \cdot)}{\partial n_{\mathbf{z}'}}$  — производная по внешней (по отношению к области  $V_S$ ) нормали  $\mathbf{n}_{\mathbf{z}'}$  в точке  $\mathbf{z}'$ ;  $dz''$  — элемент границы  $S$  для соответствующей переменной  $\mathbf{z}''$ . Значение  $\alpha_{\text{inc}}$  в (5) выступает в роли произвольного параметра падающего поля. Оператор  $\hat{\mathcal{F}}_0(\omega_j)$  с ядром  $\mathcal{F}_0(\mathbf{z}', \mathbf{z}''; \omega_j)$  определяется аналогично (4), (5), но в отсутствие рассеивателя ( $v \equiv 0$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial n_S} = \hat{\mathcal{F}}_0(\omega_j)(u_0|_S), \text{ т.е.} \\ \frac{\partial u_0(\mathbf{z}', \alpha_{\text{inc}}; \omega_j)}{\partial n_{\mathbf{z}'}} = \int_S \mathcal{F}_0(\mathbf{z}', \mathbf{z}''; \omega_j) u_0(\mathbf{z}'', \alpha_{\text{inc}}; \omega_j) dz''; \quad (6) \\ \mathbf{z}', \mathbf{z}'' \in S. \end{aligned}$$

В [16] показана взаимная эквивалентность такой формы определения данных рассеяния в виде  $\hat{\mathcal{F}}(\omega_j)$  с более распространенной формой — заданием амплитуды рассеяния  $f(\mathbf{k}, l; \omega_j)$ , а также с заданием данных рассеяния в виде спектра собственных значений краевой задачи Дирихле и нормальных производных ортонормированных собственных функций.

Далее будет рассматриваться другая эквивалентная форма данных рассеяния — в виде полей, излучаемых и принимаемых квазиточечными преобразователями. При этом предполагается, что акустические поля создаются квазиточечными излучателями, расположенными на некоторой границе  $\mathcal{X}$  в точках  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ , причем  $\mathcal{X} \cap V_S = \emptyset$ . В отсутствие или в присутствии рассеивателя эти поля являются классическими запаздывающими

функциями Грина  $G_0^{\text{cl}}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; \omega_j)$  или  $G^{\text{cl}}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; \omega_j)$  соответственно. Для однородного изотропного непоглощающего  $D$ -мерного пространства с волновым числом  $k_{0j} = \omega_j/c_0$  функция Грина  $G_0^{\text{cl}}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; \omega_j) = G^{\text{cl}}(\mathbf{z} - \mathbf{x}; \omega_j)$  в произвольных точках  $\mathbf{z}, \mathbf{x}$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \nabla^2 G_0^{\text{cl}}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; \omega_j) + k_{0j}^2 G_0^{\text{cl}}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; \omega_j) = \\ = \delta(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{z}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^D; \end{aligned}$$

тогда  $G_0^{\text{cl}}(\mathbf{z} - \mathbf{x}; \omega_j) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_{0j}|\mathbf{z} - \mathbf{x}|)$  при  $D = 2$ ;

$G_0^{\text{cl}}(\mathbf{z} - \mathbf{x}; \omega_j) = -\frac{\exp(ik_{0j}|\mathbf{z} - \mathbf{x}|)}{4\pi|\mathbf{z} - \mathbf{x}|}$  при  $D = 3$ . Для неоднородного пространства в виде совокупности однородного пространства и рассеивателя функция Грина  $G^{\text{cl}}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; \omega_j)$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \nabla^2 G^{\text{cl}}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; \omega_j) + k_{0j}^2 G^{\text{cl}}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; \omega_j) = \\ = \delta(\mathbf{z} - \mathbf{x}) + v(\mathbf{z}, \omega_j) G^{\text{cl}}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; \omega_j) \quad (7) \\ \forall \mathbf{z}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^D. \end{aligned}$$

Квазиточечные приемники полей находятся на границе  $\Upsilon$  в точках  $\mathbf{y} \in \Upsilon$ ;  $\Upsilon \cap V_S = \emptyset$ . Тем самым, роль параметра  $\alpha_{\text{inc}}$  здесь играет радиус-вектор  $\mathbf{x}$  квазиточечного излучателя, а роль полей  $u(\mathbf{y}, \alpha_{\text{inc}}; \omega_j)$  в (4), (5) и  $u_0(\mathbf{y}, \alpha_{\text{inc}}; \omega_j)$  в (6) играют  $G^{\text{cl}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j)$  и  $G_0^{\text{cl}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j)$ , где  $\mathbf{y}$  — радиус-вектор квазиточечного приемника. Требуется найти амплитуду рассеяния и затем, в конечном счете, восстановить функцию рассеивателя  $v(\mathbf{r}, \omega_j)$ ,  $\mathbf{r} \in \mathfrak{R}$ , на основе экспериментально измеряемых полей  $G^{\text{cl}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j)$ . В частности, граница излучения  $\mathcal{X}$  и граница приема  $\Upsilon$  могут совпадать друг с другом и с границей  $S$  области  $V_S$ :  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Upsilon$ , где  $\mathcal{X} \equiv \Upsilon \equiv S$ .

Обратная задача восстановления функции рассеивателя  $v(\mathbf{r}, \omega_j)$  решается в три этапа. На первом этапе находится функция  $(\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; \omega_j)$ , где  $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in \Upsilon$ , по известным данным  $G^{\text{cl}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j)$ , где  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Upsilon$ ; на втором этапе из  $(\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; \omega_j)$  находится классическая или обобщенная амплитуда рассеяния; на третьем этапе восстанавливается собственно  $v(\mathbf{r}, \omega_j)$  при  $\mathbf{r} \in V_S$  одним из алгоритмов.

*Выражения в пространстве координат преобразователей и волновых векторов*

*Первый этап* посвящен процедуре расчета функции ядра оператора  $(\hat{\mathcal{F}} - \hat{\mathcal{F}}_0)(\omega_j)$ , определенного в (4)–(6), исходя из данных от квазиточечных преобразователей. В общем случае уравнение, связывающее функцию ядра с измеряемыми монохроматическими полями, можно получить следующим образом. Выше



была введена область  $V_S$  с границей  $S$ ; область рассеяния  $\mathfrak{R}$  целиком лежит внутри области  $V_S$ , т.е.  $\mathfrak{R} \subset V_S$ . Тогда принцип Гюйгенса для области, внешней по отношению к  $V_S$ , имеет вид:

$$u(\mathbf{z}, \alpha_{\text{inc}}; \omega_j) - u_0(\mathbf{z}, \alpha_{\text{inc}}; \omega_j) = \int_S \left[ G_0^{\text{cl}}(\mathbf{z} - \mathbf{z}'; \omega_j) \frac{\partial u(\mathbf{z}', \alpha_{\text{inc}}; \omega_j)}{\partial n_{z'}} - \frac{\partial G_0^{\text{cl}}(\mathbf{z} - \mathbf{z}'; \omega_j)}{\partial n_{z'}} u(\mathbf{z}', \alpha_{\text{inc}}; \omega_j) \right] dz', \quad \mathbf{z} \notin V_S. \quad (8)$$

Поле  $u_0(\mathbf{z}, \alpha_{\text{inc}}; \omega_j)$  в произвольной точке  $\mathbf{z} \notin V_S$  в левой части (8) возникает по той причине, что вне  $V_S$  находятся только источники падающего поля (вторичные источники  $\nu u$ , порождающие рассеянное поле, находятся внутри  $\mathfrak{R}$ ), и тогда

$$\int_{z \notin V_S} G_0^{\text{cl}}(\mathbf{z} - \mathbf{z}'; \omega_j) F_0(\mathbf{z}', \alpha_{\text{inc}}; \omega_j) dz' = u_0(\mathbf{z}, \alpha_{\text{inc}}; \omega_j).$$

Определение (5), (6) ядер операторов  $\hat{\mathcal{F}}$  и  $\hat{\mathcal{F}}_0$  дает:

$$\frac{\partial u(\mathbf{z}', \alpha_{\text{inc}}; \omega_j)}{\partial n_{z'}} = \int_S \mathcal{F}(\mathbf{z}', \mathbf{z}''; \omega_j) u(\mathbf{z}'', \alpha_{\text{inc}}; \omega_j) dz'';$$

$$\frac{\partial G_0^{\text{cl}}(\mathbf{z} - \mathbf{z}'; \omega_j)}{\partial n_{z'}} = \int_S \mathcal{F}_0(\mathbf{z}', \mathbf{z}''; \omega_j) G_0^{\text{cl}}(\mathbf{z} - \mathbf{z}''; \omega_j) dz'';$$

$\mathbf{z}', \mathbf{z}'' \in S.$

В последнем выражении можно рассматривать значение  $\mathbf{z}$  как фиксированный параметр и трактовать  $G_0^{\text{cl}}$  как  $G_0^{\text{cl}}(\mathbf{z} - \mathbf{z}'; \omega_j) = G_0^{\text{cl}}(\mathbf{z}', \mathbf{z}; \omega_j)$ ,  $G_0^{\text{cl}}(\mathbf{z} - \mathbf{z}''; \omega_j) = G_0^{\text{cl}}(\mathbf{z}'', \mathbf{z}; \omega_j)$ . С учетом этих выражений и равенства  $\mathcal{F}_0(\mathbf{z}', \mathbf{z}''; \omega_j) = \mathcal{F}_0(\mathbf{z}'', \mathbf{z}'; \omega_j)$ , правая часть в (8) преобразуется к виду

$$\int_S \left[ G_0^{\text{cl}}(\mathbf{z} - \mathbf{z}'; \omega_j) \frac{\partial u(\mathbf{z}', \alpha_{\text{inc}}; \omega_j)}{\partial n_{z'}} - \frac{\partial G_0^{\text{cl}}(\mathbf{z} - \mathbf{z}'; \omega_j)}{\partial n_{z'}} u(\mathbf{z}', \alpha_{\text{inc}}; \omega_j) \right] dz' = \int_S \int_S dz'' G_0^{\text{cl}}(\mathbf{z} - \mathbf{z}'; \omega_j) \times (\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)(\mathbf{z}', \mathbf{z}''; \omega_j) u(\mathbf{z}'', \alpha_{\text{inc}}; \omega_j).$$

Подстановка этого соотношения в правую часть (8) приводит к итоговому выражению

$$u(\mathbf{z}, \alpha_{\text{inc}}; \omega_j) - u_0(\mathbf{z}, \alpha_{\text{inc}}; \omega_j) = \int_S \int_S dz'' G_0^{\text{cl}}(\mathbf{z} - \mathbf{z}'; \omega_j) \times (\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)(\mathbf{z}', \mathbf{z}''; \omega_j) u(\mathbf{z}'', \alpha_{\text{inc}}; \omega_j), \quad \mathbf{z} \notin V_S, \quad (9)$$

справедливым, в том числе, в предельном случае  $\mathbf{z} \in S$ . Уравнение (9) позволяет найти  $(\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)(\mathbf{z}', \mathbf{z}''; \omega_j)$  по значениям  $u(\mathbf{z}'', \alpha_{\text{inc}}; \omega_j)$ ,  $\mathbf{z}'' \in S$ , измерен-

ным на границе  $S$ . При этом значения  $u(\mathbf{z}, \alpha_{\text{inc}}; \omega_j) - u_0(\mathbf{z}, \alpha_{\text{inc}}; \omega_j)$ , стоящие в левой части (9), могут быть пересчитаны для любого  $\mathbf{z} \notin V_S$  из значений  $u(\mathbf{z}'', \alpha_{\text{inc}}; \omega_j) - u_0(\mathbf{z}'', \alpha_{\text{inc}}; \omega_j)$ , известных на границе  $S$  [6, 19]. В свою очередь, граница  $S$  может как совпадать с границей  $\Upsilon$ , на которой измеряются поля в реальном эксперименте, так и отличаться от нее. В последнем случае, поля  $u$  как в левой, так и в правой частях (9) пересчитываются из экспериментальных данных  $(u - u_0)|_{\Upsilon}$ .

В исходной постановке обратной задачи полагалось, что поля излучаются и принимаются квазиточечными преобразователями. Квазиточечные излучатели падающего поля находятся в точках  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  области  $\mathcal{X}$ , лежащей вне области  $V_S$ ; тем самым,  $\mathbf{x}$  играет роль параметра  $\alpha_{\text{inc}}$  падающего поля. Тогда  $u_0(\mathbf{z}, \alpha_{\text{inc}}; \omega_j) = G_0^{\text{cl}}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; \omega_j)$ ,  $u(\mathbf{z}, \alpha_{\text{inc}}; \omega_j) = G^{\text{cl}}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; \omega_j)$ ; уравнение (3) переходит в (7), и соотношение (9) приобретает вид

$$G^{\text{cl}}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; \omega_j) - G_0^{\text{cl}}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; \omega_j) = \int_S \int_S dz'' G_0^{\text{cl}}(\mathbf{z} - \mathbf{z}'; \omega_j) \times (\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)(\mathbf{z}', \mathbf{z}''; \omega_j) G^{\text{cl}}(\mathbf{z}'', \mathbf{x}; \omega_j); \quad \mathbf{z} \notin V_S; \mathbf{x} \in V_S; \mathbf{z}', \mathbf{z}'' \in S; D = 2, 3. \quad (10)$$

Еще раз следует обратить внимание на условия, при которых получены уравнения (9), (10). Во-первых, в (9) рассматривается внешняя точка  $\mathbf{z} \notin V_S$ , лежащая вне области  $V_S$  или на границе этой области  $S$ . Во-вторых, область рассеяния  $\mathfrak{R}$  лежит внутри  $V_S$ :  $\mathfrak{R} \subset V_S$ . В-третьих, все источники падающего поля  $F_0(\mathbf{z}, \alpha_{\text{inc}}; \omega_j)$  находятся вне  $V_S$ . В частности, при квазиточечных источниках падающего поля, находящихся в точках  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ , будет  $F_0(\mathbf{z}, \alpha_{\text{inc}}; \omega_j) = \delta(\mathbf{z} - \mathbf{x})$ , и поэтому в (10) требуется условие  $\mathbf{x} \notin V_S$ .

Ниже интегральное уравнение (10) будет использоваться для случая совпадения границы  $S$  с границей  $\Upsilon$ , на которой измеряются экспериментальные данные. При этом в (10) рассматриваются точки  $\mathbf{z} = \mathbf{y}$  на той же границе  $\mathbf{y} \in \Upsilon$ . Область  $\mathcal{X}$  расположения квазиточечных излучателей также совпадает с  $\Upsilon$ , т.е.  $\mathbf{x} \in \Upsilon$ . Описанная геометрия задачи изображена на рис. 1. Тогда линейное интегральное уравнение (10) приобретает вид [16, 20], используемый для нахождения  $(\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)(\mathbf{y}', \mathbf{y}''; \omega_j)$  на границе  $\Upsilon$ :

$$\int_{\Upsilon} dy' \int_{\Upsilon} dy'' G_0^{\text{cl}}(\mathbf{y} - \mathbf{y}'; \omega_j) (\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)(\mathbf{y}', \mathbf{y}''; \omega_j) \times G^{\text{cl}}(\mathbf{y}'', \mathbf{x}; \omega_j) = G^{\text{cl}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j) - G_0^{\text{cl}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}; \omega_j); \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Upsilon; \quad D = 2, 3. \quad (11)$$

Сингулярность функций  $G_0^{cl}(\mathbf{y} - \mathbf{y}'; \omega_j)$  при  $\mathbf{y} = \mathbf{y}'$  и  $G^{cl}(\mathbf{y}''; \mathbf{x}; \omega_j)$  при  $\mathbf{y}'' = \mathbf{x}$ , стоящих под знаком интеграла в (11), не является принципиальной трудностью при численном моделировании, поскольку эта сингулярность интегрируемая. Кроме того, вместо уравнения (11) можно использовать более общую запись — уравнение (10) для произвольных точек  $\mathbf{z}$  и  $\mathbf{x}$ , лежащих вне области  $V_S$  (или, в предельном случае, на ее границе). Еще раз следует отметить, что совпадение границы, на которой находятся точки излучения, и границы для точек приема  $\Upsilon$  не является необходимым условием задачи. Как уже упоминалось, экспериментальные данные  $G^{cl}(\mathbf{y}; \mathbf{x}; \omega_j)$  могут формироваться за счет излучателей, находящихся на одной границе  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ , и регистрироваться приемниками на другой границе  $\mathbf{y} \in \Upsilon$ . При этом фигурирующие в (10) поля  $G^{cl}(\mathbf{z}; \mathbf{x}; \omega_j)$  пересчитываются из  $G^{cl}(\mathbf{y}; \mathbf{x}; \omega_j)$ , благодаря тому, что  $\mathbf{z}, \mathbf{x} \notin V_S$  [6, 19].

Уравнение (11) можно записать в операторной форме:

$$\hat{G}_0^{cl}(\hat{\mathcal{F}} - \hat{\mathcal{F}}_0)\hat{G}^{cl} = \hat{G}^{cl} - \hat{G}_0^{cl}, \quad (12)$$

где каждый из операторов определяется как  $\hat{\mathcal{F}}(\bullet) = \int_{\Upsilon} \mathcal{F}(\mathbf{y}', \mathbf{y}''; \omega_j)(\bullet) d\mathbf{y}''$ ,  $\hat{G}^{cl}(\bullet) = \int_{\mathcal{X}} G^{cl}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j)(\bullet) d\mathbf{x}$ ,  $\hat{G}_0^{cl}(\bullet) = \int_{\mathcal{X}} G_0^{cl}(\mathbf{y} - \mathbf{x}; \omega_j)(\bullet) d\mathbf{x}$ . Тогда из (12) непосредственно вытекает выражение [20]

$$(\hat{\mathcal{F}} - \hat{\mathcal{F}}_0) = (\hat{G}_0^{cl})^{-1} + (\hat{G}^{cl})^{-1}. \quad (13)$$

Таким образом, на первом этапе на основе измеренных полей  $G^{cl}(\mathbf{y}; \mathbf{x}; \omega_j)$  находится функция ядра  $(\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)(\mathbf{y}', \mathbf{y}''; \omega_j)$  оператора  $(\hat{\mathcal{F}} - \hat{\mathcal{F}}_0)(\omega_j)$  с помощью интегральных соотношений (11), представляющих собой (в дискретизованном виде, после перебора всех  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Upsilon$ ) систему линейных уравнений, или находятся элементы самого оператора  $(\hat{\mathcal{F}} - \hat{\mathcal{F}}_0)(\omega_j)$  из (13). В последнем случае следует иметь в виду, что дискретизованные элементы операторов  $(\hat{\mathcal{F}} - \hat{\mathcal{F}}_0)$ ,  $\hat{G}_0^{cl}$  и  $\hat{G}^{cl}$  в (13) включают в себя и элементы дискретизации границы интегрирования. Однако вариант (13) представляется менее удобным при численной реализации, поскольку он требует обращения матриц — дискретных аналогов операторов  $\hat{G}_0^{cl}$  и  $\hat{G}^{cl}$ , что является трудоемкой и не всегда выполнимой вычислительной задачей для матриц большого размера, с которыми приходится иметь дело в реальных практических задачах.

Знание  $(\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)(\mathbf{y}', \mathbf{y}''; \omega_j)$  позволяет, в конечном счете, выполняя второй и третий этапы, восстановить функцию рассеивателя  $v(\mathbf{r}, \omega_j)$ . Второй

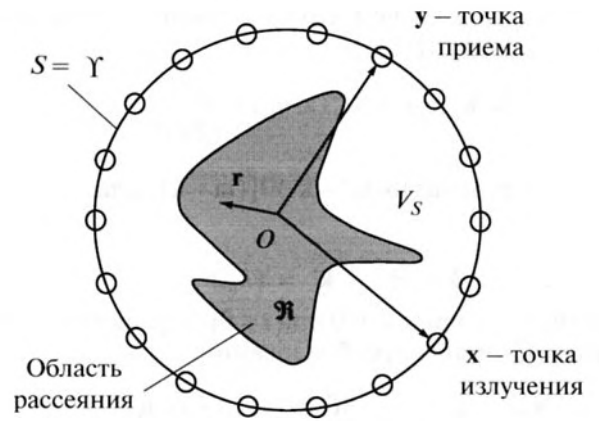


Рис. 1. Геометрия процесса томографии в случае квазиточечных приемоизлучающих преобразователей, расположенных на границе  $\Upsilon$  совпадающей с границей  $S$  области  $V_S$ .

и третий этапы используют идею функционально-аналитических методов [3–17]. Идея этих методов заключается в формальном рассмотрении комплексных волновых векторов  $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^D$ ; здесь  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_R + i\mathbf{k}_I$  ( $\mathbf{k}_R \equiv \text{Re}\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}_I \equiv \text{Im}\mathbf{k}$ ) — волновой вектор, характеризующий эффективное падающее поле в виде  $\exp(i\mathbf{kz})$ . Для комплексных  $\mathbf{k}$  и однородного безграничного изотропного непоглощающего пространства вместо классической функции Грина  $G_0^{cl}(\mathbf{z}; \omega_j)$  вводится функция Грина–Фаддеева  $G_{\text{Fad}}(\mathbf{z}, \mathbf{k} = \mathbf{k}_R + i\mathbf{k}_I; \omega_j)$ ,  $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^D$ . Для дальнейшего понадобятся только предельные значения комплексных волновых векторов (и соответствующих им функций Грина–Фаддеева и функций, которые будут введены ниже), получающиеся при бесконечно малой, но ориентированной, мнимой добавке к волновому вектору. Так, предельное значение в виде действительного волнового вектора  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^D$  получается при фиксировании направления единичного вектора  $\boldsymbol{\gamma}$  ( $|\boldsymbol{\gamma}| = 1$ ), характеризующего ориентацию мнимой добавки  $\mathbf{k}_I \equiv \varepsilon\boldsymbol{\gamma}$  (где  $\varepsilon = |\mathbf{k}_I|$ ) и устремлении величины этой добавки к нулю:  $\mathbf{k} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\mathbf{k}_R + i\varepsilon\boldsymbol{\gamma})$ . Соответствующее предельное значение функции Грина–Фаддеева  $G_{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{z}, \mathbf{k} = \mathbf{k}_R; \omega_j) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} G_{\text{Fad}}(\mathbf{z}, \mathbf{k} = \mathbf{k}_R + i\varepsilon\boldsymbol{\gamma}; \omega_j)$  принципиальным образом зависит от ориентации вектора  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_R \in \mathbb{R}^D$  и ориентации  $\boldsymbol{\gamma}$  бесконечно малой добавки. Взаимосвязь классической запаздывающей функции Грина  $G_0^{cl}(\mathbf{z}; \omega_j)$  и предельного значения функции Грина–Фаддеева  $G_{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{z}, \mathbf{k}; \omega_j)$  при

$\mathbf{k}^2 = (k_{0j})^2$ , в общем случае, такова [3 (уравнение 3.2 главы III), 4]:

$$G_\gamma(\mathbf{z}, \mathbf{k}; \omega_j) = G_0^{cl}(\mathbf{z}, \omega_j) + \frac{2\pi i}{(2\pi)^D} \times \int_{\mathbb{R}^D} \exp(i\mathbf{mz}) \delta(\mathbf{m}^2 - \mathbf{k}^2) \theta[(\mathbf{m} - \mathbf{k})\gamma] d\mathbf{m}, \quad (14)$$

$$\mathbf{k} \in \mathbb{R}^D, \quad \mathbf{k}^2 = (k_{0j})^2,$$

где  $\theta(t) = \{1 \text{ при } t > 0; 0 \text{ при } t \leq 0\}$  – функция Хевисайда. С учетом преобразований

$$\delta(\mathbf{m}^2 - \mathbf{k}^2) = \frac{1}{2|\mathbf{m}|} [\delta(|\mathbf{m}| - k_{0j}) + \delta(|\mathbf{m}| + k_{0j})],$$

$$d\mathbf{m} = |\mathbf{m}|^{D-1} d|\mathbf{m}| d\mathbf{e}_m, \text{ где } \mathbf{e}_m = \frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{m}|};$$

уравнение (14) приобретает вид

$$G_\gamma(\mathbf{z}, \mathbf{k}; \omega_j) = G_0^{cl}(\mathbf{z}; \omega_j) + i \frac{(k_{0j})^{D-2}}{2(2\pi)^{D-1}} \times \int_{|\mathbf{e}_m|=1} \exp(ik_{0j}\mathbf{e}_m\mathbf{z}) \theta(k_{0j}\mathbf{e}_m - \mathbf{k}) \gamma d\mathbf{e}_m. \quad (15)$$

Рассмотрение вместо классической функции Грина в  $D$ -мерном пространстве функции Грина–Фаддеева  $G_\gamma(\mathbf{z}, \mathbf{k}; \omega_j)$  для волновых векторов с бесконечно малой мнимой добавкой, ориентированной в направлении  $\gamma$ , приводит к понятию обобщенных волновых полей и обобщенной амплитуды рассеяния. Так, если в качестве падающего поля рассмотреть классическую запаздывающую плоскую волну  $u_0^{cl}(\mathbf{z}, \mathbf{k}; \omega_j) = \exp(i\mathbf{kz})$ ,  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^D$ ,  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^D$ , то полное поле в присутствии рассеивателя описывается в классическом случае функцией  $u^{cl}(\mathbf{z}, \mathbf{k}; \omega_j)$ , подчиняющейся уравнению Липпмана–Швингера

$$u^{cl}(\mathbf{z}, \mathbf{k}; \omega_j) = \exp(i\mathbf{kz}) + \int_{\mathbb{R}^D} G_0^{cl}(\mathbf{z} - \mathbf{r}; \omega_j) v(\mathbf{r}, \omega_j) u^{cl}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j) d\mathbf{r}.$$

Использование функции Грина–Фаддеева  $G_\gamma(\mathbf{z}, \mathbf{k}; \omega_j)$  при том же падающем поле приводит к замене классического поля  $u^{cl}(\mathbf{z}, \mathbf{k}; \omega_j)$  обобщенным полем  $\Psi_\gamma(\mathbf{z}, \mathbf{k}; \omega_j)$ , удовлетворяющим уравнению

$$\Psi_\gamma(\mathbf{z}, \mathbf{k}; \omega_j) = \exp(i\mathbf{kz}) + \int_{\mathbb{R}^D} G_\gamma(\mathbf{z} - \mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j) v(\mathbf{r}, \omega_j) \Psi_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j) d\mathbf{r}.$$

Аналогично, вместо классической амплитуды рассеяния  $f(\mathbf{k}, I; \omega_j) \equiv \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{\mathbb{R}^D} v(\mathbf{r}, \omega_j) u^{cl}(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j) \times \exp(-iI\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ , уже упоминавшейся здесь в связи с

асимптотикой (1), будет иметь место обобщенная амплитуда рассеяния  $h_\gamma(\mathbf{k}, I; \omega_j) \equiv \frac{1}{(2\pi)^D} \times \int_{\mathbb{R}^D} v(\mathbf{r}, \omega_j) \Psi_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \omega_j) \exp(-iI\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ . Между обобщенной и классической амплитудами рассеяния имеет место интегральная связь [3 (уравнение (3.7) главы III), 4]:

$$h_\gamma(\mathbf{k}, I; \omega_j) = f(\mathbf{k}, I; \omega_j) + \pi i (k_{0j})^{D-2} \times \int_{|\mathbf{e}_m|=1} h_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{m}; \omega_j) \theta(\mathbf{m} - \mathbf{k}, \gamma) [f(\mathbf{m}, I; \omega_j)] d\mathbf{e}_m, \quad (16)$$

$$\mathbf{m} = k_{0j}\mathbf{e}_m, \quad |\mathbf{m}| = |\mathbf{k}| = |I| = k_{0j}.$$

Приведенные функционально-аналитические соотношения позволяют перейти к описанию последующих этапов. На втором этапе знание функции  $(\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)(\mathbf{y}', \mathbf{y}''; \omega_j)$  позволяет определить значения обобщенной амплитуды рассеяния  $h_\gamma(\mathbf{k}, I; \omega_j)$  или, в частном случае, классической амплитуды рассеяния  $f(\mathbf{k}, I; \omega_j)$  [16, 17]. С этой целью нужно предварительно найти обобщенное поле  $\Psi_\gamma(\mathbf{y}, \mathbf{k}; \omega_j)$  или, в частности, классическое поле  $u^{cl}(\mathbf{y}, \mathbf{k}; \omega_j)$ , возникающее в точках приема  $\mathbf{y} \in \Upsilon$  в ответ на классическую падающую плоскую волну  $u_0^{cl}(\mathbf{y}, \mathbf{k}; \omega_j) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{y})$ . Надо обратить внимание, что реально в эксперименте поля излучаются и принимаются преобразователями, эквивалентными точечным преобразователям, в соответствии с исходной постановкой задачи. Введение плоских волн является только вспомогательным математическим действием, используемым на данном этапе восстановления рассеивателя. Обобщенное поле  $\Psi_\gamma(\mathbf{y}, \mathbf{k}; \omega_j)$  находится на основе уже известных из (11) значений  $(\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)(\mathbf{y}', \mathbf{y}''; \omega_j)$  на основе линейного интегрального уравнения

$$\Psi_\gamma(\mathbf{y}, \mathbf{k}; \omega_j) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{y}) + \int_{\Upsilon} A_\gamma(\mathbf{y}, \mathbf{y}''; \mathbf{k}; \omega_j) \Psi_\gamma(\mathbf{y}'', \mathbf{k}; \omega_j) d\mathbf{y}'', \quad \mathbf{y} \in \Upsilon; \quad D = 2, 3,$$

где функция  $A_\gamma(\mathbf{y}, \mathbf{y}'', \mathbf{k}; \omega_j)$  предварительно рассчитывается непосредственно из  $(\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)(\mathbf{y}', \mathbf{y}''; \omega_j)$ :

$$A_\gamma(\mathbf{y}, \mathbf{y}'', \mathbf{k}; \omega_j) = \int_{\Upsilon} G_\gamma(\mathbf{y} - \mathbf{y}', \mathbf{k}; \omega_j) (\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)(\mathbf{y}', \mathbf{y}''; \omega_j) d\mathbf{y}'. \quad (18)$$

Соотношения (17), (18) по структуре аналогичны уравнению (11), но в свободном члене вместо классического рассеянного поля  $G^{cl}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j) - G_0^{cl}(\mathbf{y} - \mathbf{x}; \omega_j)$  при точечных приемоизлучающих преобразователях теперь фигурирует обобщенное рассеянное поле  $\Psi_\gamma(\mathbf{y}, \mathbf{k}; \omega_j) - \exp(i\mathbf{k}\mathbf{y})$  при падающей плоской волне, а подынтегральное выражение теперь формируется функцией Грина–Фаддеева в отсутствие рассеивателя  $G_\gamma(\mathbf{y} - \mathbf{y}', \mathbf{k}; \omega_j)$  и

соответствующим полным обобщенным полем в присутствии рассеивателя  $\Psi_\gamma(\mathbf{y}'', \mathbf{k}; \omega_j)$  вместо классической функции Грина  $G_0^{\text{cl}}(\mathbf{y} - \mathbf{y}'; \omega_j)$  и соответствующего полного поля  $G^{\text{cl}}(\mathbf{y}'', \mathbf{x}; \omega_j)$ . Сама функция Грина–Фаддеева  $G_\gamma(\mathbf{z}, \mathbf{k}; \omega_j)$  рассчитывается для нужных значений аргумента  $\mathbf{z}$  из классических значений  $G_0^{\text{cl}}(\mathbf{z}; \omega_j)$  с помощью выражения (15). Соотношения (17), (18), подобно (9) или (10), остаются также правомерными в более общем случае – при замене границы приема  $\Upsilon$  другой границей  $S$  и сопутствующей замене точки  $\mathbf{y} \in \Upsilon$  произвольной точкой  $\mathbf{z} \notin V_S$ . Рассмотрение асимптотики такого общего соотношения при  $|\mathbf{z}| \rightarrow \infty$  приводит к выражению для обобщенной амплитуды рассеяния, которая рассчитывается непосред-

ственным интегрированием уже найденных величин:

$$h_\gamma(\mathbf{k}, l; \omega_j) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{\Upsilon} d\mathbf{y}' \int_{\Upsilon} d\mathbf{y}'' \exp(-i\mathbf{l}\mathbf{y}') \times \quad (19)$$

$$\times (\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)(\mathbf{y}', \mathbf{y}''; \omega_j) \Psi_\gamma(\mathbf{y}'', \mathbf{k}; \omega_j), \quad D = 2, 3.$$

Выражения типа (17)–(19), приведенные для предельных значений обобщенных полей и амплитуды рассеяния, остаются также правомерными при комплексных волновых векторах  $\mathbf{k}, l \in \mathbb{C}^D$ , если выполняются условия  $\mathbf{k}^2 = l^2 = k_{0j}^2$ ,  $\text{Im}\mathbf{k} = \text{Im}l$  [16]. Итак, в пространстве координат и волновых векторов размерности  $D = 2, 3$  схематическая последовательность действий при нахождении обобщенной амплитуды рассеяния  $h_\gamma(\mathbf{k}, l; \omega_j)$  по исходным данным от квазиточечных преобразователей  $G^{\text{cl}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j)$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Upsilon$ , такова:

$$\begin{aligned} G^{\text{cl}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j) &\xrightarrow{(11)} (\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)(\mathbf{y}', \mathbf{y}''; \omega_j) \xrightarrow{(15), (18)} A_\gamma(\mathbf{y}, \mathbf{y}'', \mathbf{k}; \omega_j) \xrightarrow{} \\ &\xrightarrow{(17)} \Psi_\gamma(\mathbf{y}, \mathbf{k}; \omega_j) \xrightarrow{(19)} h_\gamma(\mathbf{k}, l; \omega_j). \end{aligned}$$

В частном случае соотношения (17)–(19) позволяют найти соответствующие классические величины. Здесь используется факт, что обобщенные величины  $G_\gamma(\mathbf{z}, \mathbf{k}; \omega_j)$ ,  $\Psi_\gamma(\mathbf{z}, \mathbf{k}; \omega_j)$ ,  $A_\gamma(\mathbf{y}, \mathbf{y}'', \mathbf{k}; \omega_j)$ ,  $h_\gamma(\mathbf{k}, l; \omega_j)$  переходят в классические  $G_0^{\text{cl}}(\mathbf{z}; \omega_j)$ ,  $u^{\text{cl}}(\mathbf{z}, \mathbf{k}; \omega_j)$ ,  $A^{\text{cl}}(\mathbf{y}, \mathbf{y}''; \omega_j)$ ,  $f(\mathbf{k}, l; \omega_j)$ , соответствующие запаздывающим полям, когда вектор  $\gamma$ , задающий ориентацию бесконечно малой мнимой добавки волнового вектора, сонаправлен вектору  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_R \in \mathbb{R}^D$ . Тогда выражения (17)–(19) переходят в следующие классические соотношения:

$$u^{\text{cl}}(\mathbf{y}, \mathbf{k}; \omega_j) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{y}) + \int_{\Upsilon} A^{\text{cl}}(\mathbf{y}, \mathbf{y}''; \omega_j) u^{\text{cl}}(\mathbf{y}'', \mathbf{k}; \omega_j) d\mathbf{y}'', \quad \mathbf{y} \in \Upsilon; \quad D = 2, 3, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} G^{\text{cl}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j) &\xrightarrow{(11)} (\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)(\mathbf{y}', \mathbf{y}''; \omega_j) \xrightarrow{(21)} A^{\text{cl}}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'', \omega_j) \xrightarrow{} \\ &\xrightarrow{(20)} u^{\text{cl}}(\mathbf{y}, \mathbf{k}; \omega_j) \xrightarrow{(22)} f(\mathbf{k}, l; \omega_j). \end{aligned}$$

В функционально-аналитическом алгоритме восстановления трехмерных рассеивателей [13–15] нахождение функции рассеивателя  $v(\mathbf{r}, \omega_j)$  требует знания обобщенной амплитуды рассея-

$$\begin{aligned} A^{\text{cl}}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'', \omega_j) &= \\ &= \int_{\Upsilon} G_0^{\text{cl}}(\mathbf{y} - \mathbf{y}'; \omega_j) (\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)(\mathbf{y}', \mathbf{y}''; \omega_j) d\mathbf{y}' \quad (21) \end{aligned}$$

и, окончательно,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{k}, l; \omega_j) &= \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{\Upsilon} d\mathbf{y}' \int_{\Upsilon} d\mathbf{y}'' \exp(-i\mathbf{l}\mathbf{y}') \times \\ &\times (\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)(\mathbf{y}', \mathbf{y}''; \omega_j) u^{\text{cl}}(\mathbf{y}'', \mathbf{k}; \omega_j), \quad D = 2, 3. \end{aligned} \quad (22)$$

В отличие от обобщенных величин  $G_\gamma(\mathbf{z}, \mathbf{k}; \omega_j)$  и  $A_\gamma(\mathbf{y}, \mathbf{y}'', \mathbf{k}; \omega_j)$ , классические величины  $G_0^{\text{cl}}(\mathbf{z}; \omega_j)$  и  $A^{\text{cl}}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'', \omega_j)$  не зависят от направления вектора  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^D$ , и в них присутствует зависимость только от его длины  $k_{0j}$  в виде зависимости от частоты. Итак, схема нахождения классической запаздывающей амплитуды рассеяния имеет вид:

ния  $h_\gamma(\mathbf{k}, l; \omega_j)$  для всех направлений вектора  $\gamma$ . В то же время, для восстановления двумерных рассеивателей НГМ-алгоритмом [5–9] и его модифицированным вариантом [10–12] используются только две ориентации вектора  $\gamma$  относительно



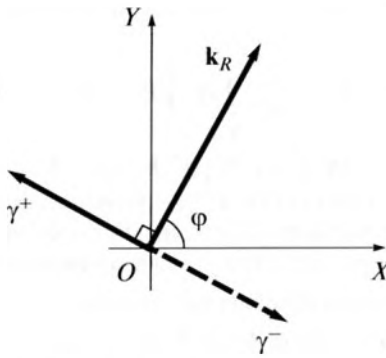


Рис. 2. Левосторонняя и правосторонняя ортогональные ориентации направления вектора мнимой части относительно вектора действительной части в двумерном случае.

фиксированного вектора  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_R \in \mathbb{R}^D$ : левосторонняя ориентация, когда вектор  $\boldsymbol{\gamma} \equiv \boldsymbol{\gamma}^+$  повернут влево на  $\pi/2$  по отношению к  $\mathbf{k}_R$ , и правосторонняя ориентация, когда  $\boldsymbol{\gamma} \equiv \boldsymbol{\gamma}^-$  повернут вправо на  $\pi/2$  относительно  $\mathbf{k}_R$  (рис. 2). Выражение (15) для функций Грина–Фаддеева  $G_{\text{Fad}}^{\pm} \equiv G_{\boldsymbol{\gamma}^{\pm}}$ , соответствующим их тем ортогональным ориентациям, приобретает вид:

$$G_{\text{Fad}}^{\pm}(\mathbf{z}, \mathbf{k}; \omega_j) = G_0^{\text{cl}}(\mathbf{z}; \omega_j) - \frac{1}{4\pi i} \int_{|\mathbf{e}_m|=1} \exp(ik_{0j} \mathbf{e}_m \mathbf{z}) \theta[\mathbf{e}_m \boldsymbol{\gamma}^{\pm}] d\mathbf{e}_m, D = 2. \quad (23)$$

$$\begin{aligned} G^{\text{cl}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j) &\xrightarrow{(11)} \times (\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)(\mathbf{y}', \mathbf{y}''; \omega_j) \xrightarrow{(23), (25)} A^{\pm}(\mathbf{y}, \mathbf{y}''; \mathbf{k}; \omega_j) \xrightarrow{} \\ &\xrightarrow{(24)} \Psi^{\pm}(\mathbf{y}, \mathbf{k}; \omega_j) \xrightarrow{(26)} h^{\pm}(\mathbf{k}, l; \omega_j). \end{aligned}$$

надо обратить внимание, что в приведенных соотношениях (11), (17)–(19), (20)–(22), (24)–(26) интегрирование осуществляется только по границе  $\Upsilon$ , а не по всем точкам пространства. При этом значения полей  $\Psi_{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{y}, \mathbf{k}; \omega_j)$ ,  $u^{\text{cl}}(\mathbf{y}, \mathbf{k}; \omega_j)$ ,  $\Psi^{\pm}(\mathbf{y}, \mathbf{k}; \omega_j)$  находятся также только для точек границы  $\mathbf{y} \in \Upsilon$ , а не для произвольных точек пространства.

*Выражения в пространстве угловых гармоник*

Численная реализация описанных алгоритмов нахождения ядра оператора  $(\hat{\mathcal{F}} - \hat{\mathcal{F}}_0)(\omega_j)$  и амплитуд рассеяния в координатном пространстве сопряжена с необходимостью адекватной дискретизации интегралов, что, в общем случае, нуждается во введении интерполяции, приводящей к погрешности. Данной трудности можно избежать, если перейти в пространство угловых гар-

Если двумерный волновой вектор задан компонентами  $\mathbf{k} = \{k_1, k_2\}$ , то  $\boldsymbol{\gamma}^{\pm} = \pm \left\{ -\frac{k_2}{k_{0j}}, \frac{k_1}{k_{0j}} \right\}$ .

Соотношения (17)–(19) при использовании функции Грина–Фаддеева  $G_{\boldsymbol{\gamma}} = G_{\text{Fad}}^{\pm}$  для направлений  $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^{\pm}$  позволяют найти функции  $A_{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{y}, \mathbf{y}''; \mathbf{k}; \omega_j) = A^{\pm}(\mathbf{y}, \mathbf{y}''; \mathbf{k}; \omega_j)$ ,  $\Psi_{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{y}, \mathbf{k}; \omega_j) = \Psi^{\pm}(\mathbf{y}, \mathbf{k}; \omega_j)$ ,  $h_{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{k}, l; \omega_j) = h^{\pm}(\mathbf{k}, l; \omega_j)$  при  $D = 2$ :

$$\begin{aligned} \Psi^{\pm}(\mathbf{y}, \mathbf{k}; \omega_j) &= \exp(iky) + \\ &+ \int_{\Upsilon} A^{\pm}(\mathbf{y}, \mathbf{y}''; \mathbf{k}; \omega_j) \Psi^{\pm}(\mathbf{y}'', \mathbf{k}; \omega_j) d\mathbf{y}'', \quad \mathbf{y} \in \Upsilon, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} A^{\pm}(\mathbf{y}, \mathbf{y}''; \mathbf{k}; \omega_j) &= \\ &= \int_{\Upsilon} G_{\text{Fad}}^{\pm}(\mathbf{y} - \mathbf{y}'; \mathbf{k}; \omega_j) (\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)(\mathbf{y}', \mathbf{y}''; \omega_j) d\mathbf{y}'; \end{aligned} \quad (25)$$

$G_{\text{Fad}}^{\pm}$  рассчитывается из (23). Тогда

$$\begin{aligned} h^{\pm}(\mathbf{k}, l; \omega_j) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Upsilon} d\mathbf{y}' \int_{\Upsilon} d\mathbf{y}'' \exp(-ily') \times \\ &\times (\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)(\mathbf{y}', \mathbf{y}''; \omega_j) \Psi_{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{y}'', \mathbf{k}; \omega_j). \end{aligned} \quad (26)$$

Схематически,

моник, которое является фурье-сопряженным к пространству углов, задаю их положение пространственных точек  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  на соответствующей границе в виде сферы при  $D = 3$  или окружности при  $D = 2$ . Как будет показано ниже, при реализации уравнения (11) (предполагая ее совпадение границы  $\mathcal{X}$ , с которой происходит излучение, и границы приема  $\Upsilon$ ) в пространстве угловых гармоник сингулярности функций  $G_0^{\text{cl}}(\mathbf{y} - \mathbf{y}'; \omega_j)$  при  $\mathbf{y} = \mathbf{y}'$  и  $G^{\text{cl}}(\mathbf{y}'', \mathbf{x}; \omega_j)$  при  $\mathbf{y}'' = \mathbf{x}$  не возникает вообще. Кроме того, без ограничения общности результатов, соотношения в пространстве углов будут приведены для случая совпадающих контуров  $\mathcal{X}$  и  $\Upsilon$  в виде окружности, т.е. для двумерного случая.

Для произвольной периодической функции  $g(\varphi)$  с периодом  $2\pi$  переход к угловому спектру



$\tilde{g}(q)$  и обратное преобразование осуществляются по формулам:

$$\tilde{g}(q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \exp(-iq\varphi) d\varphi \equiv \hat{\Phi}_{q \rightarrow \varphi}[g(\varphi)],$$

$$q \in \mathbb{Z}; \tag{27}$$

$$g(\varphi) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \tilde{g}(q) \exp(iq\varphi) \equiv \hat{\Phi}_{q \rightarrow \varphi}^{-1}[\tilde{g}(q)].$$

Здесь  $\mathbb{Z}$  – множество целых чисел, т.е.  $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $\hat{\Phi}_{\varphi \rightarrow q}$  и  $\hat{\Phi}_{q \rightarrow \varphi}^{-1}$  – операторы прямого и обратного фурье-преобразования; знак “ $\sim$ ” над функцией здесь означает фурье-преобразование по угловой переменной. Для функции  $g(\varphi, \varphi')$ , зависящей от двух углов, двойная угловая гармоника (по углам  $\varphi$  и  $\varphi'$ ), обозначаемая символом “ $\approx$ ” над функцией, определяется как

$$\tilde{\tilde{g}}(q, q') \equiv \hat{\Phi}_{\varphi' \rightarrow q'} \hat{\Phi}_{\varphi \rightarrow q} \tilde{g}(q, \varphi') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi, \varphi') \exp(-iq\varphi) \times \exp(-iq'\varphi') d\varphi d\varphi'; \tag{28}$$

$$g(\varphi, \varphi') = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{q'=-\infty}^{\infty} \tilde{\tilde{g}}(q, q') \exp(iq\varphi) \exp(iq'\varphi').$$

Пусть рассматриваемый контур  $\Upsilon$  имеет форму окружности радиуса  $R_0$  с центром  $O$  (рис. 1); тогда в полярной системе координат с тем же центром  $O$  будет:  $\mathbf{x} = \{R_0, \varphi_x\}$ ,  $\mathbf{y} = \{R_0, \varphi_y\}$ ,  $\mathbf{y}' = \{R_0, \varphi'_y\}$ ,  $\mathbf{y}'' = \{R_0, \varphi''_y\}$ . Зависимость от параметра  $R_0$  в аргументах рассматриваемых функций будет для краткости опускаться.

Уравнение (11) первого этапа переписывается в терминах угловых гармоник следующим образом. Подстановка в (11) выражения

$$(\mathcal{F} - \tilde{\mathcal{F}}_0)(\mathbf{y}', \mathbf{y}''; \omega_j) \equiv (\mathcal{F} - \tilde{\mathcal{F}}_0)(\varphi'_y, \varphi''_y; \omega_j) = \sum_{q'_y=-\infty}^{\infty} \sum_{q''_y=-\infty}^{\infty} (\tilde{\tilde{\mathcal{F}}} - \tilde{\tilde{\mathcal{F}}}_0)(q'_y, q''_y; \omega_j) \times \exp(iq'_y \varphi'_y) \exp(iq''_y \varphi''_y), \tag{29}$$

написанного в соответствии с (28), дает при  $D = 2$  с учетом  $d\mathbf{y}' = R_0 d\varphi'_y$ ,  $d\mathbf{y}'' = R_0 d\varphi''_y$ :

$$(2\pi R_0)^2 \sum_{q'_y=-\infty}^{\infty} \sum_{q''_y=-\infty}^{\infty} \tilde{G}_0^{\text{cl}}(\varphi_y, -q'_y; \omega_j) \times \times (\tilde{\tilde{\mathcal{F}}} - \tilde{\tilde{\mathcal{F}}}_0)(q'_y, q''_y; \omega_j) \tilde{G}^{\text{cl}}(-q''_y, \varphi_x; \omega_j) = G^{\text{cl}}(\varphi_y, \varphi_x; \omega_j) - G_0^{\text{cl}}(\varphi_y, \varphi_x; \omega_j). \tag{30}$$

Здесь  $G^{\text{cl}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j) \equiv G^{\text{cl}}(\varphi_y, \varphi_x; \omega_j)$ ,  $G_0^{\text{cl}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}; \omega_j) \equiv G_0^{\text{cl}}(\varphi_y, \varphi_x; \omega_j)$ ; угловые гармоники  $\tilde{G}_0^{\text{cl}}(\varphi_y, -q'_y; \omega_j) \equiv \hat{\Phi}_{\varphi'_y \rightarrow -q'_y} [G_0^{\text{cl}}(\varphi_y, \varphi'_y; \omega_j)]$ ,  $\tilde{G}^{\text{cl}}(-q''_y, \varphi_x; \omega_j) \equiv \hat{\Phi}_{\varphi''_y \rightarrow -q''_y} [G^{\text{cl}}(\varphi''_y, \varphi_x; \omega_j)]$  берутся по соответствующей угловой переменной, согласно (27), при фиксировании другого угла. Фурье-преобразование по углам  $\varphi_y$  и  $\varphi_x$  от уравнения (30) приводит к системе линейных уравнений относительно неизвестных  $(\tilde{\tilde{\mathcal{F}}} - \tilde{\tilde{\mathcal{F}}}_0)(q'_y, q''_y; \omega_j)$ :

$$(2\pi R_0)^2 \sum_{q'_y=-\infty}^{\infty} \sum_{q''_y=-\infty}^{\infty} \tilde{G}_0^{\text{cl}}(q_y, -q'_y; \omega_j) \times \times (\tilde{\tilde{\mathcal{F}}} - \tilde{\tilde{\mathcal{F}}}_0)(q'_y, q''_y; \omega_j) \tilde{G}^{\text{cl}}(-q''_y, q_x; \omega_j) = \tilde{G}^{\text{cl}}(q_y, q_x; \omega_j) - \tilde{G}_0^{\text{cl}}(q_y, q_x; \omega_j);$$

$$q_y, q_x \in \mathbb{Z}; \quad D = 2.$$

При численной реализации удобнее использовать эквивалентную замену знаков при номерах гармоник суммируемого выражения, так как такая замена не требует перестановки угловых гармоник при формировании последующих систем уравнений:

$$(2\pi R_0)^2 \sum_{q'_y=-\infty}^{\infty} \sum_{q''_y=-\infty}^{\infty} \tilde{G}_0^{\text{cl}}(q_y, q'_y; \omega_j) \times \times (\tilde{\tilde{\mathcal{F}}} - \tilde{\tilde{\mathcal{F}}}_0)(-q'_y, -q''_y; \omega_j) \tilde{G}^{\text{cl}}(q''_y, q_x; \omega_j) = \tilde{G}^{\text{cl}}(q_y, q_x; \omega_j) - G_0^{\text{cl}}(q_y, q_x; \omega_j);$$

$$q_y, q_x \in \mathbb{Z}; \quad D = 2. \tag{31}$$

Систему (31) удобно решать относительно  $(\tilde{\tilde{\mathcal{F}}} - \tilde{\tilde{\mathcal{F}}}_0)(-q'_y, -q''_y; \omega_j)$ . Фигурирующий в (31) двойной угловой спектр  $\tilde{G}_0^{\text{cl}}(q_y, q_x; \omega_j)$  классической функции Грина двумерного пространства  $G_0^{\text{cl}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}; \omega_j) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_{0j} |\mathbf{y} - \mathbf{x}|)$  рассчитывается аналитически и не имеет особенности, в отличие от  $G_0^{\text{cl}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}; \omega_j)$  в координатном пространстве. Поскольку  $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| = R_0$ , то

$$\tilde{G}_0^{\text{cl}}(q_y, q_x; \omega_j) = -\frac{i}{4} \delta_{q_x, -q_y} H_{q_y}^{(1)}(k_{0j} R_0) J_{q_y}(k_{0j} R_0), \quad D = 2, \tag{32}$$

где  $\delta_{q_x, -q_y} = \{1 \text{ при } q_x = -q_y; 0 \text{ при } q_x \neq -q_y\}$  – символ Кронекера;  $H_{q_y}^{(1)}$  и  $J_{q_y}$  – функция Ханкеля первого рода и функция Бесселя порядка  $q_y$  соответственно.

Для преобразования уравнений второго этапа в терминах углов, характеризующих координаты и волновые векторы, предварительно удобно привести выражение для углового спектра плоской волны  $u_0^{cl}(\mathbf{y}, \mathbf{k}; \omega_j) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{y})$  с волновым вектором  $\mathbf{k} = \{k_{0j}, \varphi\}$  в полярной системе координат. Так как  $\mathbf{y} = \{R_0, \varphi_y\}$ , то  $u_0^{cl}(\mathbf{y}, \mathbf{k}; \omega_j) \equiv u_0^{cl}(\varphi_y, \varphi; \omega_j) = \exp[ik_{0j}R_0 \cos(\varphi_y - \varphi)]$ , откуда угловой спектр этого поля по переменной  $\varphi_y$  при фиксированном направлении вектора  $\mathbf{k}$ , т.е. при фиксированном угле  $\varphi$ , таков:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0^{cl}(q_y, \varphi; \omega_j) &\equiv \hat{\Phi}_{\varphi_y \rightarrow q_y} [u_0^{cl}(\varphi_y, \varphi; \omega_j)] = \\ &= i^{q_y} J_{q_y}(k_{0j}R_0) \exp(-iq_y\varphi). \end{aligned} \quad (33)$$

Уравнение (17) в терминах угловых переменных  $\Psi_\gamma(\mathbf{y}, \mathbf{k}; \omega_j) \equiv \Psi_\gamma(\varphi_y, \varphi; \omega_j)$ ,  $A_\gamma(\mathbf{y}, \mathbf{y}'', \mathbf{k}; \omega_j) \equiv A_\gamma(\varphi_y, \varphi_y'', \varphi; \omega_j)$  переписывается как

$$\begin{aligned} \Psi_\gamma(\varphi_y, \varphi; \omega_j) &= u_0^{cl}(\varphi_y, \varphi; \omega_j) + \\ &+ R_0 \int_0^{2\pi} A_\gamma(\varphi_y, \varphi_y'', \varphi; \omega_j) \Psi_\gamma(\varphi_y'', \varphi; \omega_j) d\varphi_y'' \end{aligned}$$

и с учетом выражения  $\Psi_\gamma(\varphi_y'', \varphi; \omega_j) = \sum_{q_y''=-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_\gamma(q_y'', \varphi; \omega_j) \exp(iq_y''\varphi_y'')$  приобретает вид

$$\begin{aligned} \Psi_\gamma(\varphi_y, \varphi; \omega_j) &= u_0^{cl}(\varphi_y, \varphi; \omega_j) + \\ &+ 2\pi R_0 \sum_{q_y''=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_\gamma(\varphi_y, -q_y'', \varphi; \omega_j) \tilde{\Psi}_\gamma(q_y'', \varphi; \omega_j). \end{aligned}$$

Фурье-преобразование от этого уравнения по углу  $\varphi_y$  приводит к системе линейных уравнений относительно угловых гармоник обобщенного поля  $\tilde{\Psi}_\gamma(q_y, \varphi; \omega_j)$  при каждом фиксированном  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_\gamma(q_y, \varphi; \omega_j) - 2\pi R_0 \sum_{q_y''=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_\gamma(q_y, -q_y'', \varphi; \omega_j) \times \\ \times \tilde{\Psi}_\gamma(q_y'', \varphi; \omega_j) = \tilde{u}_0^{cl}(q_y, \varphi; \omega_j), \quad D = 2, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $\tilde{u}_0^{cl}(q_y, \varphi; \omega_j)$  определено в (33). При этом выражение для двойного углового спектра  $\tilde{A}_\gamma(q_y, -q_y'', \varphi; \omega_j)$  следует из соотношения (18), которое в терминах углов принимает вид

$$\begin{aligned} A_\gamma(\varphi_y, \varphi_y'', \varphi; \omega_j) = \\ = R_0 \int_\Gamma G_\gamma(\varphi_y, \varphi_y', \varphi; \omega_j) (\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)(\varphi_y', \varphi_y''; \omega_j) d\varphi_y', \end{aligned} \quad (35)$$

где  $G_\gamma(\mathbf{y} - \mathbf{y}', \mathbf{k}; \omega_j) \equiv G_\gamma(\varphi_y, \varphi_y', \varphi; \omega_j)$ . Подстановка в (35) выражения (29) и последующее выполнение фурье-преобразования по углам  $\varphi_y$  и  $\varphi_y''$  приводят

к выражению для непосредственного расчета  $\tilde{A}_\gamma(q_y, q_y'', \varphi; \omega_j)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\gamma(q_y, q_y'', \varphi; \omega_j) &= 2\pi R_0 \times \\ &\times \sum_{q_y'=-\infty}^{\infty} \tilde{G}_\gamma(q_y, -q_y', \varphi; \omega_j) (\tilde{\mathcal{F}} - \tilde{\mathcal{F}}_0)(q_y', q_y''; \omega_j), \quad D = 2, \end{aligned}$$

или при эквивалентной замене знаков для  $\tilde{A}_\gamma(q_y, -q_y'', \varphi; \omega_j)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\gamma(q_y, -q_y'', \varphi; \omega_j) &= 2\pi R_0 \times \\ &\times \sum_{q_y'=-\infty}^{\infty} \tilde{G}_\gamma(q_y, q_y', \varphi; \omega_j) (\tilde{\mathcal{F}} - \tilde{\mathcal{F}}_0)(-q_y', -q_y''; \omega_j), \quad (3) \end{aligned}$$

$D = 2.$

Выражение (3) написано для того же сочетания знаков при номерах угловых гармоник в  $\tilde{A}_\gamma(q_y, -q_y'', \varphi; \omega_j)$ , которое входит и в (34). При этом знаки угловых гармоник функ и  $(\tilde{\mathcal{F}} - \tilde{\mathcal{F}}_0)(-q_y', -q_y''; \omega_j)$ , стоящей в правой части (3), такие же, как в (31). Двойные угловые гармоники  $\tilde{G}_\gamma(q_y, q_y', \varphi; \omega_j)$ , входящие в (3), рассчитываются по правилу (28), исходя из конкретного вида (15) функ и  $G_\gamma(\mathbf{y} - \mathbf{y}', \mathbf{k}; \omega_j) \equiv G_\gamma(\varphi_y, \varphi_y', \varphi; \omega_j)$ .

Выражение (19) для непосредственного расчета  $h_\gamma(\mathbf{k}, I; \omega_j) \equiv h_\gamma(\varphi, \varphi'; \omega_j)$  переписывается в терминах углов, принимая во внимание, что  $\mathbf{k} = \{k_{0j}, \varphi\}$ ,  $I = \{k_{0j}, \varphi' + \pi\}$ ,  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{y}') = u_0^{cl}(\mathbf{y}', -I; \omega_j) \equiv u_0^{cl}(\varphi_y', \varphi' + \pi; \omega_j)$  при  $D = 2$ :

$$\begin{aligned} h_\gamma(\varphi, \varphi'; \omega_j) &= \frac{1}{(2\pi)^2} R_0^2 \int_0^{2\pi} d\varphi_y' \int_0^{2\pi} d\varphi_y'' u_0^{cl}(\varphi_y', \varphi' + \pi; \omega_j) \times \\ &\times (\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)(\varphi_y', \varphi_y''; \omega_j) \Psi_\gamma(\varphi_y'', \varphi; \omega_j). \end{aligned}$$

Учет тождества (29) для  $(\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)(\varphi_y', \varphi_y''; \omega_j)$  дает

$$\begin{aligned} h_\gamma(\varphi, \varphi'; \omega_j) &= R_0^2 \sum_{q_y'=-\infty}^{\infty} \sum_{q_y''=-\infty}^{\infty} \tilde{u}_0^{cl}(-q_y', \varphi' + \pi; \omega_j) \times \\ &\times (\tilde{\mathcal{F}} - \tilde{\mathcal{F}}_0)(q_y', q_y''; \omega_j) \tilde{\Psi}_\gamma(-q_y'', \varphi; \omega). \end{aligned}$$

При эквивалентной замене знаков, хорошо сопрягающейся со знаками для  $(\tilde{\mathcal{F}} - \tilde{\mathcal{F}}_0)(-q_y', -q_y''; \omega_j)$  в (31) и со знаками для  $\tilde{\Psi}_\gamma(q_y'', \varphi; \omega_j)$  в (34), имеем

$$\begin{aligned} h_\gamma(\varphi, \varphi'; \omega_j) &= R_0^2 \sum_{q_y'=-\infty}^{\infty} \sum_{q_y''=-\infty}^{\infty} \tilde{u}_0^{cl}(q_y', \varphi' + \pi; \omega_j) \times \\ &\times (\tilde{\mathcal{F}} - \tilde{\mathcal{F}}_0)(-q_y', -q_y''; \omega_j) \tilde{\Psi}_\gamma(q_y'', \varphi; \omega_j), \quad D = 2. \end{aligned} \quad (37)$$

Итоговая последовательность нахождения обобщенной амплитуды рассеяния в пространстве угловых гармоник, приведенная, для определенности, при  $D = 2$ , такова:

$$G^{cl}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j) \longrightarrow \tilde{G}^{cl}(q_y, q_x; \omega_j) \longrightarrow \quad (28)$$

$$\longrightarrow \times (\tilde{\mathcal{F}} - \tilde{\mathcal{F}}_0)(-q'_y, -q''_y; \omega_j) \longrightarrow \quad (31), (32)$$

$$\longrightarrow \tilde{A}_\gamma(q_y, -q''_y, \varphi; \omega_j) \longrightarrow \tilde{\Psi}_\gamma(q_y, \varphi; \omega_j) \longrightarrow \quad (36), (15), (28) \quad (34), (33)$$

$$\longrightarrow h_\gamma(\varphi, \varphi'; \omega_j). \quad (37)$$

Как и в координатном пространстве, соотношения (34), (36), (37) в частном случае, когда ориентация  $\gamma$  бесконечно малой мнимой добавки волнового вектора сонаправлена вектору  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_R \in \mathbb{R}^D$ , переходят в выражения для классических величин. Так, уравнение (34) становится уравнением относительно гармоник  $\tilde{u}^{cl}(q_y, \varphi; \omega_j)$  классического поля  $u^{cl}(\mathbf{y}, \mathbf{k}; \omega_j) \equiv u^{cl}(\varphi_y, \varphi; \omega_j)$ , равнозначным уравнению (20) при  $D = 2$ :

$$\tilde{u}^{cl}(q_y, \varphi; \omega_j) - 2\pi R_0 \times \sum_{q''_y=-\infty}^{\infty} \tilde{A}^{cl}(q_y, -q''_y; \omega_j) \tilde{u}^{cl}(q''_y, \varphi; \omega_j) = \tilde{u}_0^{cl}(q_y, \varphi; \omega_j). \quad (38)$$

В отличие от общего случая (36), двойные угловые гармоники  $\tilde{A}^{cl}(q_y, -q''_y; \omega_j)$ , как и сама функция  $A^{cl}(\mathbf{y}, \mathbf{y}''; \omega_j) = A^{cl}(\varphi_y, \varphi''_y; \omega_j)$  в (21), не зависят от угла  $\varphi$ , задающего направление вектора  $\mathbf{k}$ :

$$\tilde{A}^{cl}(q_y, -q''_y; \omega_j) = 2\pi R_0 \sum_{q'_y=-\infty}^{\infty} \tilde{G}_0^{cl}(q_y, q'_y; \omega_j) (\tilde{\mathcal{F}} - \tilde{\mathcal{F}}_0)(-q'_y, -q''_y; \omega_j). \quad (39)$$

Выражение (37) в случае классической амплитуды рассеяния  $f(\mathbf{k}, \mathbf{l}; \omega_j) \equiv f(\varphi, \varphi'; \omega_j)$  приобретает вид, равнозначный соотношению (22):

$$f(\varphi, \varphi'; \omega_j) = R_0^2 \sum_{q'_y=-\infty}^{\infty} \sum_{q''_y=-\infty}^{\infty} \tilde{u}_0^{cl}(q'_y, \varphi' + \pi; \omega_j) \times (\tilde{\mathcal{F}} - \tilde{\mathcal{F}}_0)(-q'_y, -q''_y; \omega_j) \tilde{u}^{cl}(q''_y, \varphi; \omega_j). \quad (40)$$

Таким образом, схематически:

$$G^{cl}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j) \longrightarrow \tilde{G}^{cl}(q_y, q_x; \omega_j) \longrightarrow \quad (28)$$

$$\longrightarrow \times (\tilde{\mathcal{F}} - \tilde{\mathcal{F}}_0)(-q'_y, -q''_y; \omega_j) \longrightarrow \quad (31), (32)$$

$$\longrightarrow \tilde{A}^{cl}(q_y, -q''_y; \omega_j) \longrightarrow \quad (39)$$

$$\longrightarrow \tilde{u}^{cl}(q_y, \varphi; \omega_j) \longrightarrow f(\varphi, \varphi'; \omega_j). \quad (38), (33) \quad (40)$$

В случае рассмотрения функции Грина–Фаддеева  $G_\gamma = G_{\text{Fad}}^\pm$  для направлений  $\gamma = \gamma^\pm$ , ортогональных к вектору  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_R \in \mathbb{R}^D$ , соотношения (34), (36), (37) позволяют найти функции  $\tilde{A}_\gamma(q_y, -q''_y, \varphi; \omega_j) = \tilde{A}^\pm(q_y, -q''_y, \varphi; \omega_j)$ ,  $\tilde{\Psi}_\gamma(q_y, \varphi; \omega_j) = \tilde{\Psi}^\pm(q_y, \varphi; \omega_j)$ ,  $h_\gamma(\varphi, \varphi'; \omega_j) = h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j)$  при  $D = 2$ . Так, (34) принимает вид

$$\tilde{\Psi}^\pm(q_y, \varphi; \omega_j) - 2\pi R_0 \times \sum_{q''_y=-\infty}^{\infty} \tilde{A}^\pm(q_y, -q''_y, \varphi; \omega_j) \tilde{\Psi}^\pm(q''_y, \varphi; \omega_j) = \tilde{u}_0^{cl}(q_y, \varphi; \omega_j), \quad (41)$$

где, согласно (36),

$$\tilde{A}^\pm(q_y, -q''_y, \varphi; \omega_j) = 2\pi R_0 \times \sum_{q'_y=-\infty}^{\infty} \tilde{G}_{\text{Fad}}^\pm(q_y, q'_y, \varphi; \omega_j) (\tilde{\mathcal{F}} - \tilde{\mathcal{F}}_0)(-q'_y, -q''_y; \omega_j). \quad (42)$$

Выражение (37) дает:

$$h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j) = R_0^2 \sum_{q'_y=-\infty}^{\infty} \sum_{q''_y=-\infty}^{\infty} \tilde{u}_0^{cl}(q'_y, \varphi' + \pi; \omega_j) \times (\tilde{\mathcal{F}} - \tilde{\mathcal{F}}_0)(-q'_y, -q''_y; \omega_j) \tilde{\Psi}^\pm(q''_y, \varphi; \omega_j). \quad (43)$$

Присутствующие в (42) двойные угловые гармоники  $\tilde{G}_{\text{Fad}}^\pm(q_y, q_x, \varphi; \omega_j)$  функции Грина–Фаддеева  $G_\gamma(\mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{k}; \omega_j) \equiv G_\gamma(\varphi_y, \varphi_x, \varphi; \omega_j) = G_{\text{Fad}}^\pm(\varphi_y, \varphi_x, \varphi; \omega_j)$  вычисляются аналитически следующим образом. Согласно (23), функция  $G_{\text{Fad}}^\pm(\mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{k}; \omega_j)$  есть сумма классической функции Грина  $G_0^{cl}(\mathbf{y} - \mathbf{x}; \omega_j)$  и интегральной добавки, не имеющей особенности при  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ . Выражение (32) для  $\tilde{G}_0^{cl}(q_y, q_x; \omega_j)$  известно, и остается рассчитать двойные угловые гармоники интегральной добавки. Из (23) при  $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$  следует

$$G_{\text{Fad}}^\pm(\mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{k}; \omega_j) - G_0^{cl}(\mathbf{y} - \mathbf{x}; \omega_j) = -\frac{1}{4\pi i} \int_{|\mathbf{e}_m|=1} \exp[ik_0 \mathbf{e}_m(\mathbf{y} - \mathbf{x})] \theta[\mathbf{e}_m \gamma^\pm] d\mathbf{e}_m. \quad (44)$$



Поскольку  $\mathbf{e}_m = \{1, \varphi_m\}$ ,  $\varphi_m \in [0, 2\pi)$ ;  $-\mathbf{e}_m = \{1, \varphi_m + \pi\}$  в полярной системе координат, то  $\exp[ik_0 \mathbf{e}_m(\mathbf{y} - \mathbf{x})] = u_0^{cl}(\varphi_y, \varphi_m; \omega_j) u_0^{cl}(\varphi_x, \varphi_m + \pi; \omega_j)$ , и (44) в терминах углов записывается как

$$G_{\text{Fad}}^{\pm}(\varphi_y, \varphi_x, \varphi; \omega_j) - G_0^{cl}(\varphi_y, \varphi_x; \omega_j) = -\frac{1}{4\pi i} \int_0^{2\pi} u_0^{cl}(\varphi_y, \varphi_m; \omega_j) u_0^{cl}(\varphi_x, \varphi_m + \pi; \omega_j) \theta[\mathbf{e}_m \boldsymbol{\gamma}^{\pm}] d\varphi_m. \quad (45)$$

В полярной системе координат  $\boldsymbol{\gamma}^{\pm} = \left\{1, \varphi_{\boldsymbol{\gamma}^{\pm}} = \varphi \pm \frac{\pi}{2}\right\}$  в силу ортогональности векторов  $\boldsymbol{\gamma}^{\pm}$  и  $\mathbf{k} = \{k_{0j}, \varphi\}$ , а функция Хевисайда  $\theta[\mathbf{e}_m \boldsymbol{\gamma}^{\pm}] = \theta[\cos(\varphi_m - \varphi_{\boldsymbol{\gamma}^{\pm}})]$  отлична от нуля только при  $\varphi_m \in \left(\varphi_{\boldsymbol{\gamma}^{\pm}} - \frac{\pi}{2}, \varphi_{\boldsymbol{\gamma}^{\pm}} + \frac{\pi}{2}\right)$ . Тогда применение двойного фурье-преобразования по углам  $\varphi_y, \varphi_x$  к обеим частям (45) с учетом выражения (33) для  $\tilde{u}_0^{cl}$  приводит к искомому выражению для двойных угловых гармоник функции Грина–Фаддеева:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\text{Fad}}^{\pm}(q_y, q_x, \varphi; \omega_j) &= \tilde{G}_0^{cl}(q_y, q_x; \omega_j) + \\ &+ \frac{1}{4} i^{q_y+1} J_{q_y}(k_{0j} R_0) (-i)^{q_x} J_{q_x}(k_{0j} R_0) \times \\ &\times \exp\left[-i(q_y + q_x)\left(\varphi \pm \frac{\pi}{2}\right)\right] \text{sinc}\left[\frac{\pi}{2}(q_y + q_x)\right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Итоговая схема для рассматриваемого случая такова:

$$\begin{aligned} G^{cl}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j) &\xrightarrow{(28)} \tilde{G}^{cl}(q_y, q_x; \omega_j) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}^{\pm} - \tilde{\mathcal{F}}_0^{\pm}(-q_y', -q_y''; \omega_j) \longrightarrow \\ (31), (32) & \\ &\longrightarrow \tilde{A}^{\pm}(q_y, -q_y'', \varphi; \omega_j) \longrightarrow \\ (42), (46) & \\ &\longrightarrow \tilde{\Psi}^{\pm}(q_y, \varphi; \omega_j) \longrightarrow h^{\pm}(\varphi, \varphi'; \omega_j). \\ (41), (33) & \quad (43) \end{aligned}$$

Реализация алгоритмических схем в пространстве угловых гармоник позволяет оценить, является ли количество экспериментально измеренных данных рассеяния физически достаточным для решения обратной задачи. В случае достаточного количества, угловой спектр данных рассеяния спадает до нуля при высоких угловых гармониках. Аналогичным образом можно контролировать, достаточно ли угловых гармоник искомого функций учтено при нахождении полей и амплитуд рассеяния. По сравнению с количеством существенно ненулевых угловых гармоник  $q_y'$  и  $q_y''$  функции  $(\tilde{\mathcal{F}}^{\pm} - \tilde{\mathcal{F}}_0^{\pm})(-q_y', -q_y''; \omega_j)$ , количество гармо-

ник  $q_y$  и  $q_y''$  функции  $\tilde{A}_{\boldsymbol{\gamma}}^{\pm}(q_y, -q_y'', \varphi; \omega_j)$  может увеличиться за счет присутствия двойного углового спектра функции Грина–Фаддеева  $\tilde{G}_{\boldsymbol{\gamma}}^{\pm}(q_y, q_y', \varphi; \omega_j)$  в (36) или, в частности, в (39), (42). Дальнейшее увеличение количества угловых гармоник  $q_y$  для  $\tilde{\Psi}_{\boldsymbol{\gamma}}^{\pm}(q_y, \varphi; \omega_j)$  в (34) или (38), (41) может происходить из-за процессов многократного рассеяния. Это обстоятельство надо учитывать при задании количества угловых гармоник, необходимого для адекватного нахождения упомянутых величин. При этом в конечном выражении (37) для обобщенной амплитуды рассеяния  $h_{\boldsymbol{\gamma}}(\varphi, \varphi'; \omega_j)$  или в частных выражениях (40), (43) играют роль только те гармоники, которые представлены в функции  $(\tilde{\mathcal{F}}^{\pm} - \tilde{\mathcal{F}}_0^{\pm})(-q_y', -q_y''; \omega_j)$ . Кроме того, при фиксированном рассеивателе количество существенно ненулевых гармоник для  $\tilde{A}_{\boldsymbol{\gamma}}^{\pm}(q_y, -q_y'', \varphi; \omega_j)$ ,  $\tilde{\Psi}_{\boldsymbol{\gamma}}^{\pm}(q_y, \varphi; \omega_j)$ ,  $h_{\boldsymbol{\gamma}}(\varphi, \varphi'; \omega_j)$  может различаться в зависимости от конкретного значения вектора  $\boldsymbol{\gamma}$ . Например, угловой спектр обобщенной амплитуды рассеяния  $h^{\pm}(\varphi, \varphi'; \omega_j)$  в общем случае шире, чем спектр классической амплитуды рассеяния  $f(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ .

Выражения (37), (40), (43) предполагают непосредственный расчет функций  $h_{\boldsymbol{\gamma}}(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ ,  $f(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ ,  $h^{\pm}(\varphi, \varphi'; \omega_j)$  для заданных значений углов  $\varphi$  и  $\varphi'$ , не требуя решения системы линейных уравнений. Это обстоятельство позволяет без дополнительных проблем, связанных с интерполяцией, задавать дискретные значения  $\varphi$  и  $\varphi'$  в сетке, нужной для последнего, *третьего этапа*, на котором восстанавливается непосредственно функция рассеивателя  $v(\mathbf{r}, \omega_j)$ , определенная в (2). Для восстановления можно использовать любой алгоритм, учитывающий процессы перерассеяния волн в области рассеяния. Например, это могут быть традиционные итерационные алгоритмы [21] или же функционально-аналитические алгоритмы. Двумерный НГМ-алгоритм [5–9] и его модификация [10–12], а также функционально-аналитический трехмерный алгоритм [13–15] рассматривают в качестве исходных данных именно классическую амплитуду рассеяния  $f(\mathbf{k}, \mathbf{l}; \omega_j)$ . Значения  $f(\mathbf{k}, \mathbf{l}; \omega_j)$  находятся по экспериментальным данным от квазиточечных преобразователей с помощью изложенной выше алгоритмической схемы (31)–(33), (38)–(40). Далее из системы линейных интегральных уравнений (16) на основе известных  $f(\mathbf{k}, \mathbf{l}; \omega_j)$  в трехмерном алгоритме находятся значения обобщенной амплитуды рассеяния  $h_{\boldsymbol{\gamma}}(\varphi, \varphi'; \omega_j)$  при всевозможных ориентациях вектора  $\boldsymbol{\gamma}$ , а в двумерном – значения  $h^{\pm}(\varphi, \varphi'; \omega_j)$  только при двух ортогональных ориентациях  $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^{\pm}$ . В то же время, общая схема (31)–(37) позволяет найти сразу, используя данные от квазиточечных преобразователей, обобщенную ам-

плитуду рассеяния  $h_j(\varphi, \varphi'; \omega_j)$  при произвольных ориентациях вектора  $\gamma$ , а частный случай (31)–(33), (41)–(43) позволяет найти  $h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ . При этом как дополнительное определение классических значений  $f(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ , так и последующее решение систем уравнений (16) уже не требуются ни в трехмерном, ни в двумерном случаях.

Все приведенные соотношения первого и второго этапов нахождения обобщенной или классической амплитуды рассеяния по данным от квазиточечных преобразователей являются абсолютно строгими, вне зависимости от силы рассеивателя. В то же время, упомянутые функционально-аналитические двумерные и трехмерный алгоритмы сохраняют строгость при условии отсутствия рассеяния назад обобщенных и, в частности, классических полей. Однако это ограничение, накладываемое только на третьем этапе, т.е. при нахождении рассеивателя на основе классической или обобщенной амплитуды рассеяния, мало сужает область возможного применения алгоритмов для практических задач.

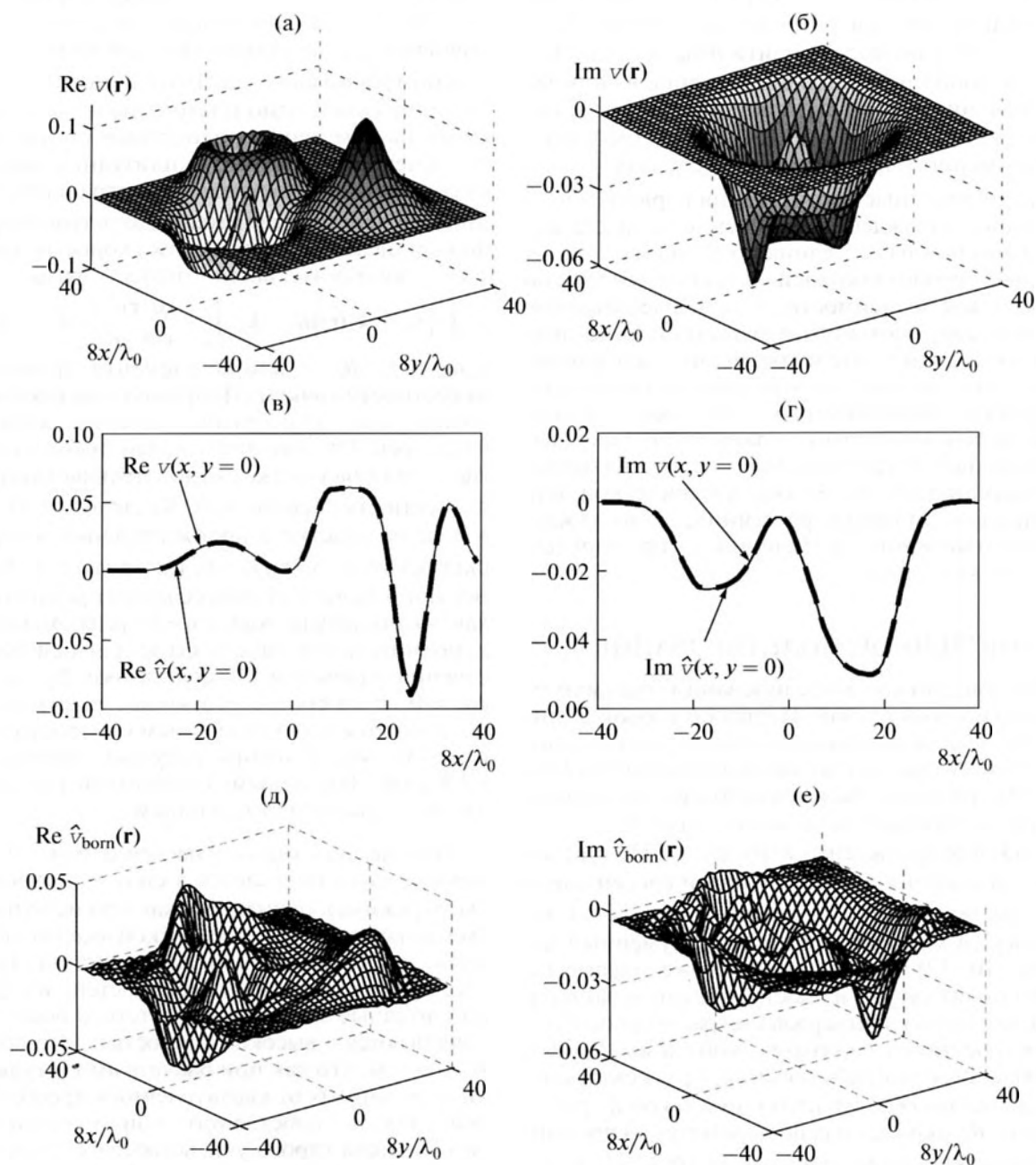
### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

При численном моделировании рассматривался двумерный случай. Первый и второй этапы были реализованы в пространстве угловых гармоник по схеме с классическими величинами (31)–(33), (38)–(40) для нахождения  $f(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ , а также по схеме с обобщенными величинами (31)–(33), (41)–(43) для нахождения  $h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j)$ . На третьем этапе для восстановления функции рассеивателя  $v(\mathbf{r}, \omega_j)$  на основе  $f(\varphi, \varphi'; \omega_j)$  или  $h^\pm(\varphi, \varphi'; \omega_j)$  использовался модифицированный двумерный алгоритм [10–12]. Приведенные ниже параметры модели носят сугубо иллюстративный характер и выбраны с целью подтверждения работоспособности построенной алгоритмической схемы. В качестве области томографирования  $V_S$  рассматривалась двумерная область цилиндрической формы с радиусом  $R_0$ , окруженная по периметру 64 приемоизлучающими преобразователями (рис. 1). В использованном монохроматическом режиме на единственной частоте  $\omega_j$  длина волны полагалась условно равной  $\lambda_{0j} \equiv \lambda_0 = 8$  единиц дискретизации длины;  $R_0 = 5\lambda_0$ . Функция рассеивателя  $v(\mathbf{r}, \omega_j)$  содержала действительную и мнимую части (рис. 3а, 3б), соответствующие присутствию неоднородностей скорости звука и поглощения в исследуемой области, согласно (2); неоднородности плотности среды не рассматривались. Функция  $\text{Re } v(\mathbf{r}, \omega_j)$  представляла собой три “плато”, расположенных несимметрично относительно центра исследуемой области и имеющих амплитудные значения, разные по величине и знаку. На каждом плато задавалось дополнительное возму-

шение скорости звука гауссовой формы, причем два таких дополнительных возмущения были смещены относительно центров плато, на которых они располагались. Функция  $\text{Im } v(\mathbf{r}, \omega_j)$  представляла собой одно плато с двумя расположенными на нем неоднородностями гауссовой формы, имеющими разные амплитудные значения и смещенными относительно центра плато. Волна, проходя через рассеиватель вдоль траектории  $l_{\text{ж}}$  с фиксированным контрастом скорости, приобретает дополнительное набег фазы  $\Delta\psi = \int_{l_{\text{ж}}} [k_{0j} - k_j(\mathbf{r})] dl_r = k_{0j} \int_{l_{\text{ж}}} \frac{\Delta c(\mathbf{r})/c_0}{1 + \Delta c(\mathbf{r})/c_0} dl_r$ , где  $k_j(\mathbf{r}) = \omega_j/c(\mathbf{r})$ ;  $dl_r$  – длина элемента траектории в окрестности точки  $\mathbf{r}$ . Например, при прохождении волны через центральное сечение рассеивателя вдоль оси  $OX$  дополнительный набег составляет  $\Delta\psi \approx -0.1\pi$  на участке с отрицательным контрастом скорости (т.е.  $\Delta c(\mathbf{r})/c_0 < 0$ ,  $\text{Re } v(\mathbf{r}, \omega_j) < 0$ ) и  $\Delta\psi \approx 0.3\pi$  на участке с положительным контрастом скорости (т.е.  $\Delta c(\mathbf{r})/c_0 > 0$ ,  $\text{Re } v(\mathbf{r}, \omega_j) > 0$ ). Суммарное поглощение на этом сечении приводит к затуханию амплитуды волны в  $\approx 2.5$  раза. Аналогичные дополнительные набег фазы для центрального сечения вдоль оси  $OY$  составляют  $\Delta\psi \approx -0.25\pi$ ,  $\Delta\psi \approx 0.1\pi$  на соответствующих участках с отрицательным и положительным контрастом скорости; амплитуда волны в сумме уменьшается в  $\approx 2.8$  раза. Тем самым, описанный рассеиватель является достаточно сильным.

Полученная оценка рассеивателя  $\hat{v}(\mathbf{r})$  (аргумент  $\omega_j$  здесь опускается в силу монохроматического режима), одинаковая как при использовании схемы нахождения классической амплитуды рассеяния, так и обобщенной, приведена на рис. 3в, 3г. Местонахождение неоднородностей, их форма и амплитудные значения в отсутствие помех восстанавливаются с высокой точностью. Это обеспечивается тем, что как при расчете амплитуды рассеяния из данных от квазиточечных преобразователей, так и собственно при восстановлении рассеивателя строго учитываются процессы многократного рассеяния волн. Данное обстоятельство иллюстрируется тем, что восстановление того же рассеивателя в приближении однократного рассеяния (первое борновское приближение) дает неудовлетворительную оценку  $\hat{v}_{\text{борн}}$  (рис. 3д, 3е).

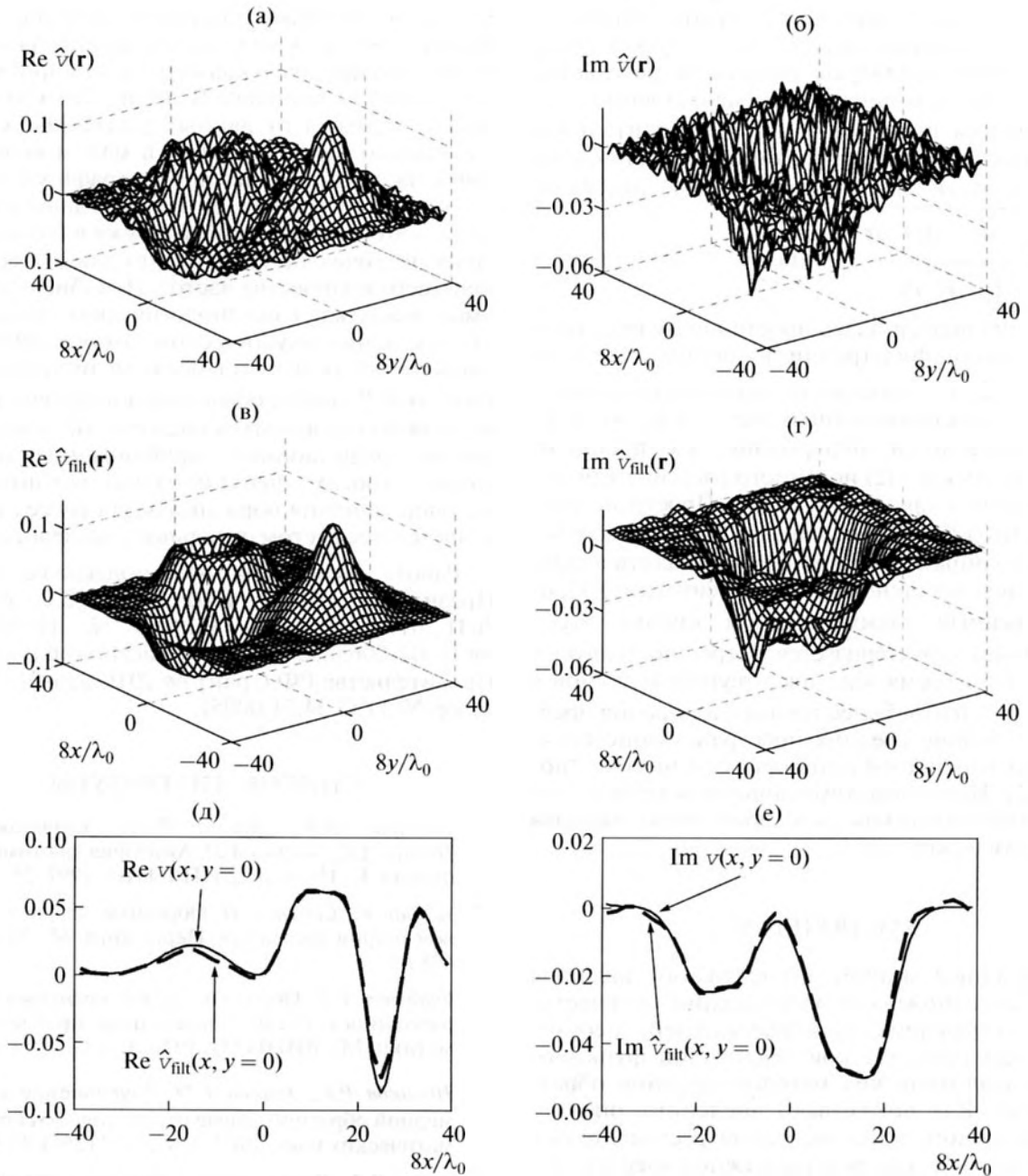
При исследовании всех этапов на помехоустойчивость в данные от квазиточечных преобразователей, т.е. в рассеянные поля  $G_{sc}^{cl}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j) \equiv G^{cl}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j) - G_0^{cl}(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j)$ , вносилась случайная нормально распределенная шумовая помеха  $n(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \omega_j)$  со среднеквадратичным амплитудным отклонением  $\sigma_{ns} = 0.03\bar{G}_{sc}^{cl}$  независимо для действительной и мнимой части помехи. Здесь среднеквад-



**Рис. 3.** Рефракционно-поглощающий рассеиватель (относительный контраст скорости звука  $\Delta c/c_0$  изменяется в диапазоне от  $-0.066$  до  $0.053$ ; максимальный дополнительный набег фазы  $\Delta\psi \approx 0.3\pi$ ; максимальное амплитудное поглощение в рассеивателе – в 2.8 раза):

- общий вид действительной (а) и мнимой (б) частей истинного рассеивателя;
- центральные сечения  $y = 0$  действительной (в) и мнимой (г) частей истинного рассеивателя  $v$  (тонкая линия) и рассеивателя  $\hat{v}$ , восстановленного по незашумленным данным от квазиточечных преобразователей с учетом многократных рассеяний (толстая пунктирная линия);
- действительная (д) и мнимая (е) части истинного рассеивателя, восстановленного в приближении однократного рассеяния без шумовых помех.





**Рис. 4.** Результат восстановления рассеивателя, изображенного на рис. 3, по зашумленным данным с амплитудным шумовым отклонением  $\sigma_{ns} = 0.03\bar{G}_{sc}$ :

- общий вид действительной (а) и мнимой (б) частей оценки рассеивателя в отсутствие фильтрации;
- общий вид (в, г) и центральные сечения  $y = 0$  (д, е) профильтрованной оценки рассеивателя.

ратичное значение данных рассеяния определяется

как  $\bar{G}_{sc}^{cl}(\omega_j) \equiv \sqrt{\frac{\int_{\Gamma} dx \int_{\Gamma} dy |G_{sc}^{cl}(y, x; \omega_j)|^2}{\int_{\Gamma} dx \int_{\Gamma} dy}}$ . При упомяну-

том уровне помехи входное амплитудное отноше-

ние “помеха/сигнал”  $N/S \equiv \sqrt{\frac{\int_{\Gamma} dx \int_{\Gamma} dy |G_{sc}^{cl}(y, x; \omega_j)|^2}{\int_{\Gamma} dx \int_{\Gamma} dy |n(y, x; \omega_j)|^2}}$

составляло  $N/S \approx 0.04$ . Оценка рассеивателя  $\hat{v}(\mathbf{r})$ , полученная по зашумленным данным, изображена на рис. 4а, 4б. Эта оценка получена при использова-

нии схемы нахождения классической амплитуды рассеяния, однако при схеме для нахождения обобщенной амплитуды рассеяния результаты практически не отличаются ни качественно, ни с точки зрения значения  $\delta_v \approx 0.21$  относительной среднеквадратичной погрешности восстановления в области  $\mathcal{R}$ , занимаемой рассеивателем;

$$\delta_v \equiv \frac{\sqrt{\int_{\mathcal{R}} |\hat{v}(\mathbf{r}) - v(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}}}{\sqrt{\int_{\mathcal{R}} |v(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}}}. \quad \text{Далее зашумленная}$$

оценка  $\hat{v}(\mathbf{r})$  подвергалась простейшему виду пространственной фильтрации: в пространственном спектре  $\hat{v}(\xi)$  этой оценки обнулялись все компоненты на пространственных частотах  $|\xi| \geq k_0$ , в силу той априорной информации, что пространственный спектр  $\hat{v}(\xi)$  истинного рассеивателя  $v(\mathbf{r})$  локализован в круге радиуса  $k_0$ . (Пространственные частоты  $|\xi| > 2k_0$  вообще не воспроизводятся использованным функционально-аналитическим алгоритмом восстановления рассеивателя.) Профильтрованная таким образом оценка  $\hat{v}_{\text{filt}}(\mathbf{r})$  (рис. 4в–4е) характеризуется погрешностью  $\delta_v \approx 0.055$ , в то время как при отсутствии шумов в данных  $\delta_v \approx 0.016$ . Более точная фильтрация предполагает знание средних пространственно-спектральных плотностей мощности “сигнала” и “помех” [22]. Итак, помехоустойчивость предлагаемых алгоритмических схем достаточно хорошая для практических целей.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Следующим этапом исследований является вопрос о возможности уменьшения количества приемоизлучающих преобразователей, необходимых для практической реализации функционально-аналитических методов решения обратных задач. Как показывают численные оценки, для адекватного восстановления рассеивателя в монохроматическом режиме нужно измерять рассеянные поля на границе области томографирования с шагом около 0.5–1 длины волны, что приводит к очень большому количеству преобразователей. С другой стороны, известны “традиционные” методы решения томографических задач, основанные, например, на измерении временных задержек распространения сигнала через исследуемую область. Эти методы позволяют получить приближенные оценки характеристик рассеивателя даже при относительно небольшом количестве излучателей и приемников за счет того, что использование информации в виде времен распространения сигналов, фактически, соответствует использованию большого количества частот в достаточно широкой полосе. Например, для реализации “традиционных” времяпролет-

ных схем томографии океанической акватории с размерами в несколько сотен километров требуется несколько десятков антенн, что приемлемо в практических условиях. В связи с этим возникает задача перехода от данных рассеяния, которые изначально известны лишь в малом количестве точек на границе области томографирования, но для большого количества частот, к данным рассеяния, которые будут найдены уже в большом количестве точек на границе, но для существенно меньшего количества частот. Подобная ситуация имеет место как в океанологических приложениях, так и при акустическом томографировании биологических тканей в целях медицинской диагностики. Решение обозначенной задачи, вероятно, может основываться на совместном использовании “традиционных” приближенных и достаточно строгих функционально-аналитических методов решения обратных задач рассеяния, что является предметом отдельного исследования.

Работа выполнена при поддержке грантов Президента РФ № НШ-2631.2012.2, № МК-2041.2011.5, грантов РФФИ № 10-05-00229, № 10-02-00636, а также при частичной поддержке Правительства РФ (грант № 2010-220-01-077, договор № 11.G 34.31.0005).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гончаров В.В., Зайцев В.Ю., Куртепов В.М., Нечаев А.Г., Хилько А.И. Акустическая томография океана. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1997. 256 с.
2. Шадан К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 408 с.
3. Фаддеев Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния II // Сб.: Современные проблемы математики. М.: ВИНТИ, 1974. Т. 3. С. 93–180.
4. Новиков Р.Г., Хенкин Г.М.  $\bar{\delta}$ -уравнение в многомерной обратной задаче рассеяния // Успехи математических наук. 1987. Т. 42. № 3 (255). С. 93–152.
5. Буров В.А., Румянцева О.Д. Решение двумерной обратной задачи акустического рассеяния на основе функционально-аналитических методов // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 3. С. 413–420.
6. Буров В.А., Вечерин С.Н., Морозов С.А., Румянцева О.Д. Моделирование точного решения обратной задачи акустического рассеяния функциональными методами // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 4. С. 516–536.
7. Гриневич П.Г., Манаков С.В. Обратная задача теории рассеяния для двумерного оператора Шредингера,  $\bar{\delta}$ -метод и нелинейные уравнения // Функцион. анализ и его прил. 1986. Т. 20. № 2. С. 14–24.
8. Новиков Р.Г. Восстановление двумерного оператора Шредингера по амплитуде рассеяния при фиксированной энергии // Функцион. анализ и его прил. 1986. Т. 20. № 3. С. 90–91.

9. *Novikov R.G.* The inverse scattering problem on a fixed energy level for the two-dimensional Schrödinger operator // *J. Funct. Anal.* 1992. V. 103. P. 409–463.
10. *Novikov R.G.* Rapidly converging approximation in inverse quantum scattering in dimension 2 // *Phys. Lett. A.* 1998. V. 238. № 2–3. P. 73–78.
11. *Новиков Р.Г.* Приближенное решение обратной задачи квантовой теории рассеяния при фиксированной энергии в размерности 2 // Сб.: Труды Математического института им. В.А.Стеклова. Солитоны, геометрия, топология – на перекрестках. М.: Наука, 1999. Т. 225. С. 301–318.
12. *Буров В.А., Алексеенко Н.В., Румянцева О.Д.* Многочастотное обобщение алгоритма Новикова для решения обратной двумерной задачи рассеяния // *Акуст. журн.* 2009. Т. 55. № 6. С. 784–798.
13. *Novikov R.G.* The  $\bar{\delta}$ -approach to approximate inverse scattering at fixed energy in three dimensions // *International Mathematics Research Papers.* 2005. № 6. P. 287–349.
14. *Novikov R.G.* The  $\bar{\delta}$ -approach to monochromatic inverse scattering in three dimensions // *J. Geom. Anal.* 2008. V. 18. № 2. P. 612–631.
15. *Алексеенко Н.В., Буров В.А., Румянцева О.Д.* Решение трехмерной обратной задачи акустического рассеяния. Модифицированный алгоритм Новикова // *Акуст. журн.* 2008. Т. 54. № 3. С. 469–482.
16. *Новиков Р.Г.* Многомерная обратная спектральная задача для уравнения  $-\Delta\psi + (v(x) - Eu(x))\psi = 0$  // *Функцион. анализ и его прил.* 1988. Т. 22. № 4. С. 11–22.
17. *Novikov R.G., Santacesaria M.* Monochromatic reconstruction algorithms for two-dimensional multi-channel inverse problems // *International Mathematics Research Notices.* 2012. doi: 10.1093/imrn/rns025
18. *Буров В.А., Шуруп А.С., Румянцева О.Д., Зотов Д.И.* Функционально-аналитическое решение задачи акустической томографии по данным от точечных преобразователей // *Известия Российской Академии Наук. Серия Физическая.* 2012. Т. 76. № 12. С. 1524–1529.
19. *Буров В.А., Прудникова И.П., Сироткина Н.С.* Обратная задача рассеяния ультразвука на граничной неоднородности в изотропном твердом теле // *Акуст. журн.* 1992. Т. 38. № 6. С. 1013–1018.
20. *Nachman A.I.* Reconstruction from boundary measurements // *Annals of Math.* 1988. V. 128. № 3. P. 531–576.
21. *Буров В.А., Румянцева О.Д., Сасковец А.В.* Акустическая томография и дефектоскопия как обратные задачи рассеяния // *Вестник Московского Университета. Серия 3. Физика. Астрономия.* 1994. Т. 35. № 6. С. 61–71.
22. *Буров В.А., Румянцева О.Д.* Решение двумерной обратной задачи акустического рассеяния на основе функционально-аналитических методов. II. Область эффективного применения // *Акуст. журн.* 1993. Т. 39. № 5. С. 793–803.