

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.26

ИМПЕДАНС ИЗЛУЧЕНИЯ ПОРШНЯ
НА СТЕНКЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО КАНАЛА

© 2013 г. А. И. Комкин, М. А. Миронов*

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
105005 Москва, ул. 2-я Бауманская 5
E-mail: akomkin@mail.ru

*Акустический институт им Н.Н. Андреева
117036 Москва, ул. Шверника 4
E-mail: mironov@akin.ru

Поступила в редакцию 03.06.2012 г.

Теоретически исследован импеданс излучения прямоугольного поршня, размещенного на стенке прямоугольного канала. Получена зависимость присоединенной длины поршня от ширины канала, показывающая, что с уменьшением ширины канала присоединенная длина в отличие от сопротивления излучению уменьшается. Проведено сравнение полученных результатов с данными для присоединенной длины квадратного отверстия в прямоугольной перегородке в канале.

Ключевые слова: поршень, прямоугольный канал, импеданс излучения, сопротивление излучения, присоединенная длина.

DOI: 10.7868/S0320791913030088

Как известно, эффективность акустических излучателей существенным образом зависит от среды, в которой они работают. Поэтому при рассмотрении различных практических приложений, например систем активного гашения шума в каналах, важно знать акустические характеристики излучателя, такие как импеданс излучения.

В [1] рассчитан импеданс излучения прямоугольного поршня на боковой стенке волновода для случая, когда высота поршня равна высоте стенки, на которой он размещен. В данной работе рассматривается более общий случай, когда на размеры поршня не накладывается такое ограничение, но вместе с тем результаты получаются для условий низкочастотного приближения.

Рассмотрим канал прямоугольного поперечного сечения с площадью $S = ab$ (a – ширина канала, b – его высота) и абсолютно жесткими стенками, на боковой стенке которого размещен прямоугольный поршень площадью $S_0 = 4dL$ ($2d$ – высота поршня, $2L$ – его длина) с центром в точке $x = 0, y = y'$ (рис. 1). Поршень колеблется по гармоническому закону с амплитудой скорости V_0 и частотой ω .

Следуя [2–4], поршень на жесткой стенке заменяется распределением точечных источников объемной скорости V_0 с координатами x_0, y_0 , размещенных у поверхности стенки. При этом поле звукового давления в канале $P(x, y, z)$ представляется разложением в ряд по собственным функци-

ям, которые в случае жестких стенок канала обеспечивают на них условие равенства нулю нормальной скорости. Соответствующие расчетные формулы приведены в [3, 4]. Для области $x \geq x_0$ формула для звукового давления имеет вид:

$$P(x, y, z) = \frac{\rho\omega V_0}{2S} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{k_{mn}} \cos k_m z \cos k_n y \times \int_{y'-d}^{y'+d} \cos k_n y_0 dy_0 \int_{-L}^L e^{-ik_{mn}(x-x_0)} dx_0, \quad (1)$$

где $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_j = 2$ при $j \neq 0$; $k_{mn} = \sqrt{k^2 - k_m^2 - k_n^2}$; $k = \omega/c$; ρ и c – плотность среды и скорость звука в

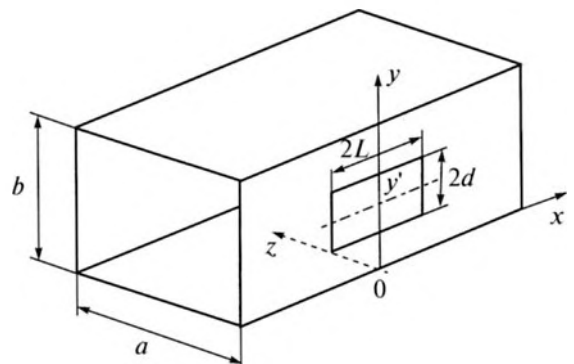


Рис. 1. Поршень на стенке прямоугольного канала.

ней; $k_m = m\pi/a$; $k_n = n\pi/b$ – собственные поперечные волновые числа прямоугольного канала с жесткими стенками. Интегрирование (1) приводит к следующей формуле, справедливой для $|x| \geq L$:

$$P(x, y, z) = \frac{\rho\omega V_0 S_0}{2S} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{k_{mn}} \cos k_m z \cos k_n y \times \cos k_n y' \frac{\sin(n\pi d/b) \sin(k_{mn} L)}{n\pi d/b k_{mn} L} e^{-ik_{mn}|x|}. \quad (2)$$

Для $|x| \leq L$ звуковое давление в канале определяется формулой

$$P(x, y, z) = \frac{\rho\omega V_0 S_0}{2S} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{k_{mn}} \cos k_m z \cos k_n y \times \cos k_n y' \frac{\sin(n\pi d/b)}{n\pi d/b} \frac{1}{ik_{mn} L} \left[1 - e^{-ik_{mn} L} \cos k_{mn} x \right],$$

которая при $x = L$ совпадает с формулой (2).

Далее предполагается, что канал достаточно узкий и в нем распространяется только нулевая мода $m = 0, n = 0$. Тогда последняя формула принимает вид

$$P(x, y, z) = \rho c \frac{V_0 S_0}{2SL} \left\{ \frac{1}{k} [\sin kL \cos kx - i(1 - \cos kL \cos kx)] + ik \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{\kappa_{mn}^2} \cos k_m z \cos k_n y \times \cos k_n y' \frac{\sin(n\pi d/b)}{n\pi d/b} \left[1 - e^{-\kappa_{mn} L} \operatorname{ch}(\kappa_{mn} x) \right] \right\}, \quad (3)$$

где $\kappa_{mn} = ik_{mn} = \sqrt{k_m^2 + k_n^2 - k^2}$, а штрихи у знаков суммы означают, что из суммирования исключаются члены, соответствующие условию $m = n = 0$. Вычислим среднее по площади поршня значение звукового давления

$$\bar{P} = (1/S_0) \iint_{S_0} P(x, y, 0) dx dy. \quad (4)$$

Отношение этого давления к скорости поршня будет определять акустический импеданс поршня $Z = \bar{P}/V_0$. Подстановка (3) в (4) и последующее интегрирование дают следующие выражения для действительной R и мнимой X частей импеданса

$$R = \rho c \frac{S_0 \sin^2(kL)}{2S (kL)^2};$$

$$X = \frac{\rho c S_0}{2SL} \left\{ \frac{1}{k} \left(\frac{\cos kL \sin kL}{kL} - 1 \right) + k \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{\kappa_{mn}^2} \cos^2 \frac{n\pi y'}{b} \left(\frac{\sin(n\pi d/b)}{n\pi d/b} \right)^2 \times \left[1 - \frac{\operatorname{sh}(\kappa_{mn} L)}{\kappa_{mn} L} e^{-\kappa_{mn} L} \right] \right\}.$$

Для короткого вдоль оси x поршня, когда $kL \ll 1$, величина R , называемая сопротивлением излучения, описывается упрощенной формулой:

$$R = \rho c S_0 / (2S) = \rho c 2Ld / (ba), \quad (5)$$

а в выражении для мнимой части импеданса излучения первым слагаемым можно пренебречь, так что

$$X = \rho c k \frac{2d}{ab} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{\kappa_{mn}^2} \cos^2 \frac{n\pi y'}{b} \left(\frac{\sin(n\pi d/b)}{n\pi d/b} \right)^2 \times \left[1 - \frac{\operatorname{sh}(\kappa_{mn} L)}{\kappa_{mn} L} e^{-\kappa_{mn} L} \right]. \quad (6)$$

Формула (6) может быть представлена в виде $X = \rho c k l_a$, где l_a – так называемая присоединенная длина поршня. Для низкочастотного диапазона, когда выполняется условие $k^2 \ll k_m^2 + k_n^2$, присоединенная длина l_a принимает вид

$$l_a = \frac{2d}{\pi^2} \frac{a}{b} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{\bar{\kappa}_{mn}^2} \cos^2 \frac{n\pi y'}{b} \left(\frac{\sin(n\pi d/b)}{n\pi d/b} \right)^2 \times \left[1 - \frac{\operatorname{sh}(\pi \bar{\kappa}_{mn} L/a)}{\pi \bar{\kappa}_{mn} L/a} e^{-\pi \bar{\kappa}_{mn} L/a} \right], \quad (7)$$

где $\bar{\kappa}_{mn} = \sqrt{m^2 + (na/b)^2}$. Отметим, что в используемом приближении присоединенная длина не зависит от частоты.

Для последующего анализа целесообразно выразить геометрические размеры системы через безразмерные параметры: $\bar{a} = a/b$; $\bar{d} = d/b$; $\bar{L} = L/b$. Тогда формула (5) принимает вид $R = \rho c 2\bar{L}\bar{d}/\bar{a}$. Следуя Ингарду [5], введем в рассмотрение с привязкой к площади поршня нормированную величину присоединенной длины $\bar{l}_a = l_a/\sqrt{dL}$, которая с учетом (7) преобразуется к виду

$$\bar{l}_a = \frac{2\bar{a}}{\pi^2} \sqrt{\bar{L}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{\bar{\kappa}_{mn}^2} \cos^2 \frac{n\pi y'}{b} \left(\frac{\sin(n\pi \bar{d})}{n\pi \bar{d}} \right)^2 \times \left[1 - \frac{\operatorname{sh}(\pi \bar{\kappa}_{mn} \bar{L}/\bar{a})}{\pi \bar{\kappa}_{mn} \bar{L}/\bar{a}} e^{-\pi \bar{\kappa}_{mn} \bar{L}/\bar{a}} \right]. \quad (8)$$

Таким образом, сопротивление излучения R оказывается обратно пропорциональным параметру \bar{a} . Зависимость \bar{l}_a от параметра \bar{a} может существенно отличаться от линейной, хотя параметр \bar{a} и стоит сомножителем в выражении (8).

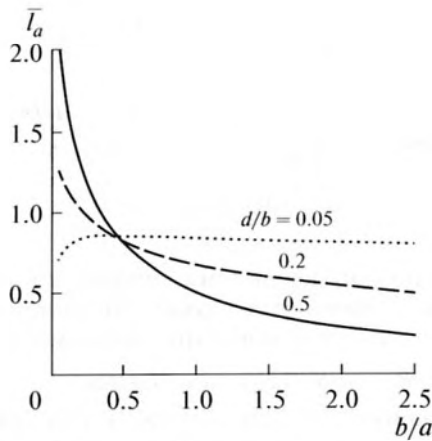


Рис. 2. Присоединенная длина квадратного поршня на стенке прямоугольного канала.

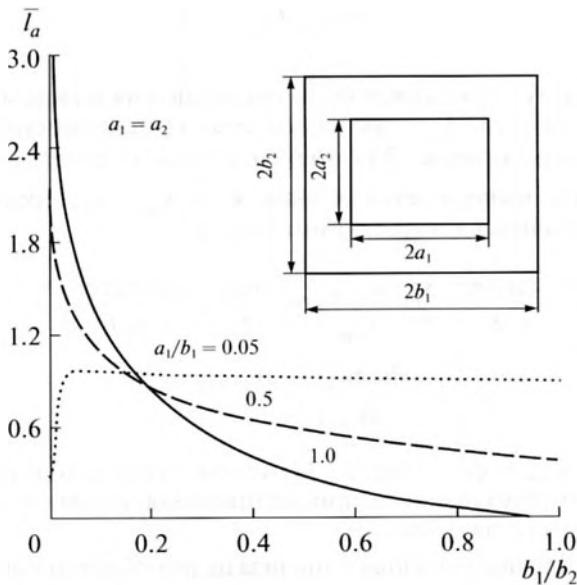


Рис. 3. Присоединенная длина квадратного отверстия в перегородке в поперечном сечении прямоугольного канала.

Когда высота поршня равна высоте канала, в последних формулах следует принять $2\bar{d} = 1$ ($2d = b$) и $y' = b/2$. При этом формула (8) существенно упрощается, принимая вид

$$\bar{l}_a = \frac{2\bar{a}}{\pi^2} \sqrt{\frac{\bar{d}}{\bar{L}}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left[1 - \frac{\text{sh}(\pi m \bar{L}/\bar{a})}{\pi m \bar{L}/\bar{a}} e^{-\pi m \bar{L}/\bar{a}} \right],$$

отражающий тот факт, что в данном случае поперечные моды в канале генерируются только в направлении оси z , соответственно, суммирование ведется только по ним.

На рис. 2 представлены результаты расчета присоединенной длины \bar{l}_a квадратного поршня

для различных значений его относительного размера d/b как функции b/a . На практике, при ограничении суммирования в приведенных формулах конечным числом M членов ряда, это число, особенно для малых значений b/a , должно быть достаточно большим. Вычисления проводились в среде MathCAD с $M = 300$, что обеспечило достоверность результатов при значениях $b/a > 0.1$. Дальнейшее увеличение значений M не приводит при $b/a > 0.1$ к видимым изменениям графиков на рис. 2.

Из представленных графиков следует, что при малых относительно стенки канала размерах поршня ($d/a = 0.05$) присоединенная длина поршня практически не зависит от ширины канала и ее значение приблизительно равно значению присоединенной длины поршня (отверстия) в бесконечном экране ($\bar{l}_a \approx 0.82$). Однако в общем случае зависимость присоединенной длины \bar{l}_a от ширины канала весьма существенна. Характерной и несколько неожиданной особенностью этой зависимости является то, что при постоянной высоте канала b уменьшение его ширины a приводит не к увеличению, а к уменьшению присоединенной длины поршня. При этом чем больше размер поршня, тем в целом значительно сильнее зависимость \bar{l}_a от ширины канала, так что в максимальной степени она проявляется для квадратного поршня наибольшего размера, равного высоте стенке канала ($d/b = 0.5$). Заметим также, что представленные на рис. 2 кривые для квадратного поршня пересекаются в окрестности значения $b/a = 0.5$. Ниже этого значения присоединенная длина начинает превышать значение 0.82. Таким образом, проведенный анализ показал, что если сопротивление излучения поршня с уменьшением ширины канала увеличивается, то его присоединенная длина, наоборот, уменьшается.

Полученные выше зависимости для присоединенной длины поршня на стенке канала качественно совпадают с теми, что имеют место для случая перегородки с прямоугольным отверстием в поперечном сечении прямоугольного канала (рис. 3). Действительно, следуя обозначениям Ингарда [5] в предположении поршневого движения воздуха в отверстии, присоединенную длину с одной стороны отверстия можно представить в виде

$$l_a = \frac{1}{\pi} \sqrt{a_1 a_2} g_1 b_{12} \sqrt{a_{21}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{\sqrt{(m^2 + b_{12}^2 n^2)}} \times \frac{\sin^2(\pi m g_1) \sin^2(\pi n g_2)}{(\pi m g_1)^2 (\pi n g_2)^2}, \quad (9)$$

где $g_1 = a_1/b_1$; $g_2 = a_2/b_2$; $b_{12} = b_1/b_2$; $a_{21} = a_2/a_1$.

На рис. 3 представлены нормированные значения присоединенной длины $\bar{l}_a = l_a / \sqrt{a_1 a_2}$, вычис-

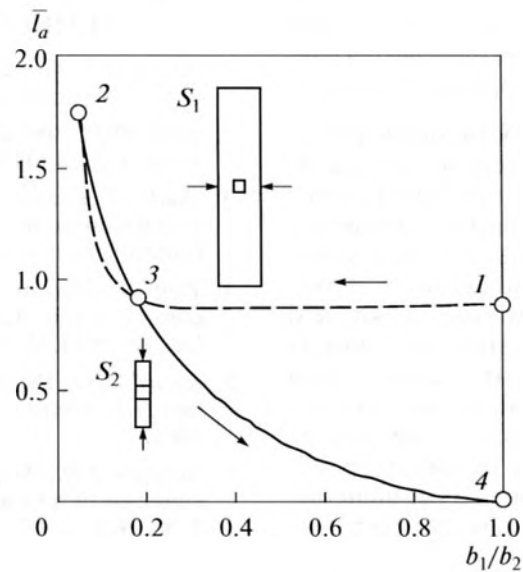


Рис. 4. Зависимость присоединенной длины квадратного отверстия от конфигурации прямоугольной перегородки.

ленные по формуле (9) для случая квадратного отверстия в зависимости от его относительных размеров. Обычно рассматриваются не очень вытянутые прямоугольные перегородки ($b_1/b_2 > 0.2$). При этом, как следует из представленных графиков, чем меньше относительный размер отверстия, тем больше его присоединенная длина \bar{l}_a , в пределе стремящаяся к значению для отверстия в бесконечном экране. Однако для вытянутых перегородок наблюдается другая закономерность. С увеличением степени вытянутости перегородки по одному из направлений присоединенная длина продолжает расти, стремясь к новому пределу, с большим значением, которое будет зависеть от относительного размера отверстия, так что чем больше размер поршня, тем больше предельное значение \bar{l}_a . Например, при наибольшем размере квадратного поршня ($a_1/b_1 = 1$) ее значение превышает 3. Представленные на рис. 3 кривые пересекаются в окрестности значения $b_1/b_2 \approx 0.2$. Следовательно, когда одна из сторон перегородки превышает другую в пять раз и более, присоединенная длина квадратного отверстия в этой перегородке становится больше, чем в случае, если бы перегородка была неограниченной. Заметим, что для квадратного поршня на стенке канала аналогичное свойство его присоединенной длины имеет место, когда ширина канала начинает превышать его высоту более чем в два раза.

Для более детального анализа зависимости присоединенной длины квадратного отверстия от конфигурации перегородки рассмотрим квадратную перегородку с большим относительным размером ($a_1/b_1 = 0.05$). Присоединенная длина отвер-

стия тогда будет близка к значению \bar{l}_a для отверстия в бесконечном экране и соответствует точке 1 на рис. 4. Будем теперь уменьшать ширину перегородки b_1 , оставляя ее высоту b_2 неизменной. При этом отношение $b_{12} = b_1/b_2$ также уменьшается, а отношение $a_1/b_1 = 0.05/b_{12}$, наоборот, увеличивается. Происходящие при этом изменения в присоединенной длине отверстия отражаются на рис. 4 пунктирной кривой и показывают, что на начальном этапе уменьшение отношения b_{12} в довольно широком диапазоне оказывает лишь незначительное влияние на присоединенную длину \bar{l}_a . Заметные изменения – существенный рост \bar{l}_a , начинается при $b_{12} < 0.2$. Этот рост происходит до достижения конечной точки 2, когда ширина перегородки становится равной ширине отверстия. Таким образом, уменьшение одного из размеров квадратной перегородки с трансформацией ее в вытянутую прямоугольную приводит к увеличению присоединенной длины \bar{l}_a , хотя относительная площадь перегородки при этом существенно уменьшается.

Будем проводить дальнейшее уменьшение площади перегородки, но теперь уже уменьшая его высоту. Соответствующие изменения присоединенной длины отражаются на рис. 4 сплошной линией, которая, по сути, повторяет сплошную кривую на рис. 3. В точке 3, при $b_{12} \approx 0.2$, кривые на рис. 4 пересекаются, т.е. присоединенные длины отверстия при этом становятся равными, хотя площади перегородок для этих двух случаев, обозначенные здесь через S_1 и S_2 , значительно отличаются. С дальнейшим уменьшением высоты перегородки присоединенная длина \bar{l}_a плавно снижается,

а сама кривая устремляется к точке 4, в которой площади перегородки и отверстия становится равными и присоединенная длина обращается в нуль.

Рассмотренные закономерности формирования присоединенной длины отверстия в перегородке справедливы и для случая поршня на стенке канала, при этом определяющим фактором в первом случае будет относительный размер вытянутой стороны перегородки, а во втором — относительная ширина канала. Заметим также, что характер изменения присоединенной длины поршня, размещенного на стенке канала, при изменении ширины канала принципиально отличается от того, что имеет место в замкнутых объемах, например резонаторах Гельмгольца [6], когда присоединенная длина горла с уменьшением длины резонатора однозначно возрастает.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ланин А.Д.* Импеданс излучения поршня в волноводе // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 3. С. 427–429.
2. *Морс Ф.М., Феибах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2. М.: ИЛ, 1960. 886 с.
3. *Doak P.* Excitation, transmission and radiation of sound from source distribution in hard-walled ducts of finite length // J. Sound Vibr. 1973. V. 31. № 1. P. 1–72.
4. *Tichy J., Warnaka G.E., Poole L.A.* A study of active control of noise in ducts // J. Vibr. Acoust. Str. Reliab. Design. 1984. V. 106. № 7. P. 399–404.
5. *Ingard U.* On the theory and design of acoustic resonators // J. Acoust. Soc. Am. 1953. V. 25. № 6. P. 1037–1061.
6. *Комкин А.И., Миронов М.А., Юдин С.И.* О присоединенной длине отверстий // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 6. С. 677–682.