

АКУСТИКА СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ ТВЕРДЫХ
СРЕД. ГЕОЛОГИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

УДК 550.843

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО СЕЙСМИЧЕСКОГО РАЗРЕЗА
МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВОЛН ТИПА РЭЛЕЯ

© 2013 г. Л. С. Загорский, В. Л. Шкуратник

Московский государственный горный университет

119991 Москва, Ленинский пр. 6

E-mail: ftkp@mail.ru

Поступила в редакцию 06.09.2012 г.

Обоснован метод вычисления вертикального сейсмического разреза с использованием регистрируемых на поверхности волн поляризации Рэлея, возникающих при взаимодействии Р и SV волн, локализованных в неоднородном полупространстве. Метод позволяет решать обратную задачу нахождения скоростей продольных и поперечных волн в массиве с числом расчетных точек, достигающим четырехсот. Приведен алгоритм метода, предусматривающий применение многомодового дисперсионного анализа и вычисления опорных точек по скорости волны в алгебраических многочленах Б.М. Левитана. Возможности метода иллюстрируются примерами его использования для исследования модельных объектов и результатами сравнения с данными метода микросейсмического зондирования.

Ключевые слова: сейсмический разрез, волны Рэлея, многомодовый дисперсионный анализ, микросейсмическое зондирование.

DOI: 10.7868/S0320791913020147

ВВЕДЕНИЕ

Сейсмические методы позволяют проводить геофизические исследования земной коры с высоким пространственным разрешением как на больших, так и на относительно малых глубинах. Получаемый этими методами сейсмический разрез массива горных пород содержит важную информацию о его строении, глубине и форме отдельных геологических объектов, а также их литологическом составе. Все это определяет особое место, которое занимают сейсмические методы в разведочной и инженерной геофизике.

В настоящее время считается общепризнанным, что основным направлением повышения эффективности этих методов является совершенствование обработки и интерпретации информации, которую несут сейсмические волны различных типов, в частности, волны типа Рэлея. Под последними обычно понимают волны, вызванные взаимодействием Р и SV компонент, приводящим к движению частиц среды по эллипсу, как и у классических волн Рэлея. Важным преимуществом волн типа Рэлея является их существование при самом широком диапазоне изменения скоростей и плотностей в твердых телах и вблизи границ их раздела с жидкостью. Они распространяются как при почти постоянной скорости, так и при ее понижении и повышении с глубиной.

В рамках настоящей работы для определения скоростного разреза реализуется подход, при кото-

ром на начальном этапе предполагается использование непрерывных функций скорости продольных и поперечных волн и постоянной плотности. Далее путем решения уравнения типа свертки, либо простым нахождением производных осуществляется переход к слоям. Положительной стороной подхода является большое число восстанавливаемых точек, в которых вычисляется скорость поперечной волны (до 150–430), труднодостижимое слоистыми моделями (для прямой задачи по методу Томпсона–Хаскелла [1]), для которых возникают матрицы большой размерности. Последние могут оказаться неопределенными на фоне погрешностей входных данных. Другим преимуществом метода является возможность получения входной информации только из наблюдаемых сейсмограмм как для искусственного, так и для естественного (микросейсм) источника. И, наконец, погрешность вычислений отображается графически при самом решении, показываются асимптоты на больших и малых глубинах. Преимущества метода в улучшении качества входных данных обеспечиваются за счет использования всего профиля измерений при определении фазовой скорости, что приводит к линейному функционалу при вычислении прямого Фурье-преобразования по координате вдоль профиля для уже приведенных к плоскому фронту волн.

В области подготовки данных для обработки используется амплитудный ряд мод волны Рэлея,

вычисленных дисперсионным анализом. Трассы нормируются по максимуму амплитуды, а сферический или цилиндрический фронт волны приводится к плоскому. Применение волн непрерывного спектра позволяет получить начальные опорные точки разреза в первом линейном приближении по экстремумам годографа.

В области обработки предложено для волн типа Рэлея использовать: спектральные алгебраические многочлены третьей степени с эффективным нахождением границ дискретных собственных значений — лакун; преобразования вращения и обобщенного сдвига; формулы следов при аналитическом продолжении функции скорости поперечной волны по формуле Тейлора в варианте Милна—Хэмминга; отдельную регуляризацию высоких и низких частот. При использовании формулы Тейлора оказалось удобно взять в качестве первого ее слагаемого величину интегральной скорости первого линейного приближения. Все это позволило с помощью обобщенного сдвига по Левитану для почти периодических функций получить до 430 точек скоростного разреза.

Вместе с тем получение в численном виде решения обратной задачи нахождения скоростного разреза даже в одномерном случае сталкивается с рядом сложностей. Например, известно, что можно обращать дисперсионные кривые волн Рэлея (зигзагообразные [2], гладкие [3]), но для этого надо знать нулевое приближение к решению задачи, а следовательно, как было показано в работах В.М. Маркушевича [4, 5], амплитуды волн Рэлея. Их нахождение в случае нескольких мод представляет собой непростую задачу в связи с расхождением фронта волны и затухания, помех и неидеальностью источника, который не является строго импульсным и всегда зависит от времени и координат, что особенно проявляется для микросейсм. Важным и принципиальным моментом для микросейсм стало доказательство возможности построения функции Грина в работе [6], где рассматривается кросс-корреляционная функция по записям на двух станциях.

Преодолению указанных проблем посвящена настоящая статья, в которой используются алгебраические многочлены [7, 8], показавшие свою эффективность для волн SH [9]. При этом формируется множество, где решение обратной задачи единственно. Это достигается путем решения системы уравнений относительно границ лакун. Под лакуной здесь обозначены соседние два числа последовательности, содержащие только одно собственное значение дискретного спектра, в дополнительных же к лакунам интервалах находится непрерывный спектр волн. Для их нахождения

использованы только сейсмограммы, из которых оригинальным многомодовым спектральным анализом находится поверхность в координатах амплитуда, частота и волновое число (или фазовая скорость). Сначала на стадии подготовки данных решаются уравнения типа свертки и находятся импульсные характеристики. При этом производится нормировка трасс по их максимуму и вычисление при свертке каждой пары источник—приемник параметра регуляризации в соответствии с работой [10].

Далее найденные амплитуды, частоты и фазовые скорости вводятся в модифицированную программу [11], вычисления с применением которой обеспечивают нахождение границ лакун в спектре. Центральное место в алгоритме — определение помимо указанных границ еще и параметра регуляризации для каждой из введенных элементов матрицы частота — фазовая скорость. Программа рассчитывает скорости волны SV, SH и P по глубине Z на основе профильных измерений. Она использует в качестве входных данных фазовые скорости, частоты и амплитуды, получаемые при многомодовом спектральном анализе. Ее главными преимуществами являются: большое число точек (до 430) и точность, а также графический анализ точности и качества получаемого решения. Многомодовость обеспечивается аппроксимацией многочленов произвольной степени N многочленами третьей степени, которая справедлива при малых отклонениях от интерполяционных узлов. Алгоритм программы основан на аналитическом продолжении функции скорости волн с использованием выражения для 1-й и 2-й производной скорости [9, 11]. Последние зависят от границ первой или приведенной к первой лакуны в спектре, амплитуд волн Рэлея и фазовых скоростей, а также скоростей продольных и поперечных волн на свободной поверхности и на глубине первого шага.

Применение формулы следов [7] позволяет по амплитуде, частоте и волновому числу, определенным по уравнению типа свертки и прямому преобразованию Фурье при удалении вдоль профиля, произвести по 3 сдвига на частоту или волновое число. Это связано с тем, что для почти периодических функций, входящих в потенциал, период определен таким сдвигом по координате, при котором ошибка по модулю не превосходит некоторой малой величины, зависящей от этого периода. Тем самым была решена проблема точности расчета на больших глубинах. Главным моментом в алгоритме является использование интегрального среднего линейного тренда в качестве первого слагаемого ряда Тейлора для скорости на всех глубинах. Это позволяет производить вычисления с пе-

ременным (возрастающим с глубиной) шагом, зависящим от частоты.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим, как и в работе [12], плоско-слоистую среду с переменными по вертикальной координате z скоростями продольных и поперечных волн, но аппроксимируем их непрерывной функцией [13, 14], имеющей непрерывную вторую производную. Плотность считаем постоянной. Источники микросейсм считаем распределенными на свободной поверхности [15]. Если используется искусственный сейсмический источник, то задана его временная функция.

Главное отличие пассивных источников состоит в том, что для описания их волновой функции следует использовать интегральное уравнение [8] квантовой теории рассеяния, совпадающее по форме записи с уравнением Гельфанда–Левитана в возмущенной постановке, т.е. в бесконечных пределах. Это означает применение накопления сейсмограмм со временем накопления, стремящимся к бесконечности. Фронт волны является сначала сферическим, а затем цилиндрическим, однако нормировкой каждой трассы по максимуму ее амплитуды он приводится к плоскому. Для измерений необходим профиль с шагом по поверхности (координате x), равным половине длины волны при максимальной применяемой в расчетах частоте.

Рассмотрим возникающую после разделения переменных в волновом уравнении [13] систему уравнений для волны вертикальной поляризации (Рэлея), описываемую взаимодействием Р и SV компонент:

$$\left. \begin{aligned} -\omega^2 \rho u_1 &= ik \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial u_3}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial z} u_3 \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \frac{\partial u_1}{\partial z} \right] - k^2 (\lambda + 2\mu) u_1 \\ -\omega^2 \rho u_3 &= ik \left[\frac{\partial}{\partial z} (\lambda u_1) + \mu \frac{\partial u_1}{\partial z} \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial z} \right] - k^2 \mu u_3, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где ω – частота; ρ – плотность; k – волновое число; $\lambda(z)$, $\mu(z)$ – постоянные Ламе; z – координата; u_1 , u_3 – перемещения. Указанное выше разделение переменных справедливо в связи с нормировкой трасс по максимуму амплитуды, что устраняет расхождение фронта и делает волну плоской.

Путем подстановки по методу Трикоми [13]

$u_1 = \frac{u}{\sqrt{\mu}}$ и $u_3 = \frac{w}{\sqrt{\lambda + 2\mu}}$ уравнения (1) преобразуются к виду (подобное преобразование с правой ча-

стью для нелинейных волн отражено в работе [16]):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left[\frac{\omega^2}{V_s^2(z)} - k^2 \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} - \frac{\sqrt{\mu}''}{\sqrt{\mu}} \right] u &= \\ &= \frac{\delta(z - \zeta)}{\mu(\zeta)} * f_1(z, \lambda, \mu), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \left[\frac{\omega^2}{V_p^2(z)} - k^2 \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} - \frac{\sqrt{\lambda + 2\mu}''}{\sqrt{\lambda + 2\mu}} \right] w &= \\ &= \frac{\delta(z - \zeta)}{(\lambda + 2\mu)(\zeta)} * f_2(z, \lambda, \mu), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} f_1(z, \lambda, \mu) &= \\ &= -ik(\lambda + \mu) / \sqrt{\lambda + 2\mu} \times \\ &\times \left[w' + w(-1/2)(\lambda + 2\mu)^{-1}(\lambda' + 2\mu') + \mu' / (\lambda + \mu) \right] \\ f_2(z, \lambda, \mu) &= -ik \left[\frac{\partial}{\partial z} (\lambda u_1) + \mu \frac{\partial u_1}{\partial z} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

а соотношение

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta(z - \zeta)}{\mu(\zeta)} * (-ik) \frac{(\lambda + \mu)}{\sqrt{\lambda + 2\mu}} \times \\ \times \left[w' + w \left(\left(-\frac{1}{2} \right) \frac{\lambda' + 2\mu'}{\lambda + 2\mu} + \frac{\mu'}{\lambda + \mu} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

представляет собой свертку. Здесь ζ – вертикальная координата вторичного источника.

Граничные условия для уравнений (2) на вещественные компоненты перемещения и тензора напряжений при $z = 0$:

$$\left. \begin{aligned} w(0) = 0; \quad w'(0) = 1; \quad u(0) = 1; \quad u'(0) = 0; \\ \sigma_{xz} = 0; \quad \sigma_{zz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Поэтому итоговая W компонента равна с учетом вращения u при $z = 0$:

$$W = uv \frac{1}{\mu(0)} \left[k \exp(-i\pi/2) \frac{(\lambda + \mu)(0)}{\sqrt{\lambda + 2\mu(0)}} \right]. \quad (6)$$

При этом решение системы (2) может быть записано в виде (G – функция Грина):

$$\begin{pmatrix} G_{sv} & 0 \\ 0 & G_p \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W \\ U \end{pmatrix}.$$

При вращении происходит поворот компоненты вектора перемещения на минус 90 градусов. Вронскиан же пар решений u и w , а также u и v равен 1. Обратная задача решается поиском волнового числа (подходящей компоненты волнового вектора) для фазы компоненты SV или Р и продолжением по вертикальной оси z с использованием обобщенного сдвига по аналогии с работой Б.М. Левитана [8]. Если на глубине z имеет

место резонанс SV-компоненты, тогда фаза волны равна

$$\left\{ \pm \sqrt{R(\lambda)} \int_0^z \frac{du}{P(u, \lambda)} \right\} = \pi, \quad (7)$$

где R и P — многочлены Левитана, и решения уравнений (2) окажутся разделимыми. Другими словами, происходит поиск волнового числа k , удовлетворяющего соотношению (7) для рассматриваемой частоты и, как следствие, выполнение условия ортогональности компонент волны Рэлея.

Из (2) и выражения (4), а также частного решения

$$u = \frac{1}{2} \left(\exp \left\{ +i \sqrt{R(\lambda)} \int_0^z \frac{du}{P(u, \lambda)} \right\} + \exp \left\{ -i \sqrt{R(\lambda)} \int_0^z \frac{du}{P(u, \lambda)} \right\} \right) \quad (8)$$

в дополнительных к лакунам интервалах для SV волны приходим к выражению (7). Лакуна — это возрастающая последовательность неотрицательных действительных чисел, в которой длина с ростом номера стремится к нулю, поэтому потенциал является конечно-зонным. Отсюда следует резонанс объемных волн SV и то, что решения уравнений (2) разделимы при определенных z . Кроме того, из (6)–(8) следует, что угол между направлением распространения волны и перемещением равен 90° . Последнее доказывает, что волна является поперечной. При этом происходит подавление Р-компоненты волны типа Рэлея. Также это имеет место и при нулях производных от постоянных Ламе. В итоге мнимая компонента в выражении (4) равна нулю, а действительная будет подвергнута вращению. В лакунах же будет спадание амплитуд по экспоненте как и у классических волн Рэлея, если рассмотреть общие формулы для задачи Штурма–Лиувилля из работы [8].

Аналогично при работе с Р-компонентой для исключения компоненты SV можно записать

$$\left\{ \pm \sqrt{R(\lambda)} \int_0^z \frac{du}{P(u, \lambda)} \right\} = \pi/2. \quad (9)$$

Из формул (6), (8) и (9) видно, что угол между направлением перемещения частиц и распространения волны равен 0° и поэтому волна является продольной. Движение же частиц в волне Рэлея происходит по эллипсу.

Поскольку потенциал является почти периодическим (в силу мелкослоистости), то для обратной задачи справедливо следующее: какой бы ни была частота и волновое число дискретного спектра, найдется такая глубина h , которая максимизирует первую и минимизирует вторую компоненту вол-

ны Рэлея. Отмеченное свойство поясняет эффективность расчетов с переменным шагом по глубине. Проще всего добиться этого при фазе волны, удовлетворяющей неравенству

$$-\pi < \varphi < \pi,$$

что, как следует из работы Б.М. Левитана [8], сводится к ортогональности тригонометрических функций (8). При других пределах этого можно добиться с использованием формулы следов для уравнения Штурма–Лиувилля, имеющего вид:

$$-\frac{d^2 u}{dz^2} + qu = \lambda u. \quad (10)$$

Само построение интервалов поиска решения сводится к аналитическому продолжению непрерывной функции $V_s(z)$ с использованием формулы следов (N — число мод):

$$q(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k + \beta_k - 2\xi_k(t) \quad (11)$$

при условии $\rho(z) = \text{const}$, либо $(\sqrt{\mu})'' / \sqrt{\mu} = o(1)$. Для построения интервала поиска решения можно применить программу “D3” [11], где использовано условие $\xi_1(z_1) = \alpha_1, \beta_1$, либо данные геологоразведочных скважин, пробуренных на исследуемом участке. Здесь при достижении в процессе продолжения границ лакуны фиксируется значение скорости поперечных волн, которое и определяет указанный интервал. В процессе аналитического продолжения по формуле Тейлора по предложенному выше алгоритму для потенциала и скорости поперечной волны использованы следующие ниже формулы для производных.

Из работы [8] и анализа вещественных амплитуд волн Рэлея a_j следует, что все точки $\xi_j(t)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial t} = \frac{\pm 2a_j \sqrt{-R(\xi_j(t))}}{N \prod_{k \neq j} (\xi_k - \xi_j(t))}, \quad j = 1 \dots N, \quad (12)$$

где

$$R(\xi) = \xi \prod_{k=1}^N (\xi - \alpha_k)(\xi - \beta_k), \quad (13)$$

$$\xi_{ij}(z) = \left[\frac{\omega_i^2}{V_s^2(z)} - K_{ij}^2 \left(\frac{(\lambda + 2\mu)(0)}{\mu(0)} \right) \right]$$

— квадрат вертикального волнового числа для SV компоненты волны Рэлея, t — сдвиг, i — номер частоты, j — номер моды. Для Р-компоненты имеем:

$$\xi_{ij}(z) = \left[\frac{\omega_i^2}{V_p^2(z)} - K_{ij}^2 \left(\frac{\mu(0)}{(\lambda + 2\mu)(0)} \right) \right].$$

При использовании одной моды, $j = 1$, массы волновых чисел одномерны. В противном случае входные данные (частоты и волновые числа)

преобразуются к виду: $(\omega_1, k_1; \omega_1, k_2; \dots, \omega_1, k_N)$. При этом знаменатель дроби (12) равен 1. Точка ξ_j всегда принадлежит лакуне, что обеспечивается сменой знака перед корнем, иначе частота про-

пускается в процессе аналитического продолжения.

Для второй производной скорости по глубине имеем:

$$\frac{\partial^2 V_s(t)}{\partial t^2} = \frac{-V_s^2(t) \sum_{i=1}^M (\lambda_1(i) - (2\pi F(i)/V(i))^2 - (\alpha_1(i) + \beta_1(i))) - \sum_{i=1}^M (2\pi F(i))^2}{MV_s(t)}, \quad (14)$$

где $\alpha_1(i)$ и $\beta_1(i)$ — границы первой лакуны в спектре волн типа Рэлея; $F(i)$ — частота волн типа Рэлея; i — номер частоты, полученной после спектрально-временного анализа основного тона волн типа Рэлея; $V(i)$ — фазовая скорость волны типа Рэлея; M — число частот или мод.

Из (14) для SV-компоненты волны Рэлея получаем

$$\lambda_{ij} = \frac{\omega_i^2}{V_s^2(0)} - K_{ij}^2 \left(\frac{(\lambda + 2\mu)(0)}{\mu(0)} \right), \quad (15)$$

а для P-компоненты имеем

$$\lambda_{ij} = \frac{\omega_i^2}{V_p^2(0)} - K_{ij}^2 \left(\frac{\mu(0)}{(\lambda + 2\mu)(0)} \right). \quad (16)$$

Если $N \neq 1$, можно использовать следующее уравнение:

$$\frac{(\sqrt{\mu(t)})''}{\sqrt{\mu(t)}} = \sum_{k=1}^N \alpha_k + \beta_k - \lambda_k - \xi_k(t). \quad (17)$$

Однако проще определить амплитудный ряд и свести задачу к многочленам 3-й степени. Если $\lambda_k \ll 1$, а также точно известно значение скорости поперечной волны $V_s(h)$ на глубине первого шага h от поверхности, то достаточно использовать лишь одну моду, при этом ошибка представления функции $R(\lambda_k)$ составляет $o(\lambda_k^4)$.

Так как потенциал в формуле следов (11) является конечно-зонным, а $\xi_j(t)$ в (12) почти периодической функцией [8] с количеством периодов, равным N , то, используя следы частот и амплитуд на поверхности, можно делать до $3N$ сдвигов на частоту при N модах (по три точки на лакуну, в которой заданы собственное значение и две границы) и фиксированных амплитудах. При использовании не более трех сдвигов на частоту и известной скорости поперечной волны $V_s(h)$ можно использовать одну моду, что следует из теории почти периодических функций. Наибольшая точность при продолжении достигается при $V_s(h) = V_s(0)/2 + (V_s(0) + V_s(H))/4$, причем классическая волна Рэлея при таком подходе также будет существовать до обычных для нее глубин порядка длины волны. Эта опорная скорость соответствует интегральному значению линейного тренда, вычисляемому по формуле трапеций для глубин от 0 до H .

Указанная скорость равна первому слагаемому ряда Тейлора. Так как первый сдвиг линеен, то удобно его выбрать равным интегральному среднему для всего диапазона глубин, что позволяет рассматривать весь интервал при различных шагах.

Основная идея метода решения обратной задачи состоит в аналитическом продолжении функции скорости поперечной волны с построением интервалов поиска решения и обязательной оценкой точности получаемого результата путем построения интерполяционного тренда в виде многочлена 6-й степени. В отличие от SH-компоненты для SV-компоненты есть влияние P-компоненты, которое минимизируется в предлагаемом методе на этапе решения обратной задачи.

Элементы $\xi(\lambda)$, $\zeta(\lambda)$, $\eta(\lambda)$ спектральной матрицы-функции $RM(\lambda)$ выражаются через вещественные многочлены $P(z_1, \lambda)$, $S(\lambda)$ и функцию $R(\lambda)$, введенные в работе [7], через которые представляется решение системы уравнений (2). Эти элементы, а также функция Грина G и собственные функции Ψ имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} P(z_1, \lambda) &= \prod_{k=1}^N (\lambda - \xi_k(z_1)), \xi_k(0) = \xi_k, S(\lambda) = \\ &= (\lambda - \eta_0) \prod_{k=1}^N (\lambda - \eta_k(0)), \\ \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} &= \frac{1}{2\pi \pm \sqrt{R(\lambda)}}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} = \frac{1}{2\pi \pm \sqrt{R(\lambda)}}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \lambda} &= \frac{1}{2\pi \pm \sqrt{R(\lambda)}}, \\ Q(z_1, \lambda) &= P(z_1, \lambda) \sum_{k=1}^N \frac{\pm \sqrt{-R(\xi_k(z_1))}}{(\lambda - \xi_k(z_1)) P'(\xi_k(z_1))}, \\ G(z_1, z_2, Z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(\lambda)}{(\lambda - Z) \sqrt{R(\lambda)}} \times \\ &\quad \times \psi^\pm(z_1, \lambda) \psi^\pm(z_2, \lambda) d\lambda, \\ \psi^\pm(z_1, \lambda) &= \sqrt{\frac{P(z_1, \lambda)}{P(\lambda)}} \exp\left(\pm i \sqrt{R(\lambda)} \int_0^{z_1} \frac{du}{P(u, \lambda)}\right) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Предлагается следующий способ нахождения размеров лаун в спектре волн типа Рэлея для SV-компоненты (для SH-компоненты получено ранее в [9]). Если известны амплитуды нормальных волн Рэлея A_k , собственные значения λ_k и скорость поперечной волны $V_s(h)$ на глубине одного шага h от поверхности, то многочлен $R(\lambda)$ однозначно определен в точках $\lambda = \lambda_k$:

$$R(\lambda_k) = P^2(\lambda_k) / A_k^2. \quad (19)$$

Это следует из краевого условия

$$u(0) = 2i \sum_{k=0}^N \frac{1}{m_k^\pm} \psi_\pm(0, \lambda_k) \psi_\pm(0, \lambda_k), \quad (20)$$

откуда

$$m_k^\pm = \frac{\sqrt{R(\lambda_k)}}{P(\lambda_k)}, \quad \frac{1}{m_k^\pm} = A_k, \quad \sqrt{R(\lambda_k)} = \frac{P(\lambda_k)}{A_k}. \quad (21)$$

Согласно общей теории решения задач Штурма–Лиувилля [8] необходимо определение границ первой лауны в спектре. Покажем, как находить для SV-компоненты размеры первой лауны. Если $A_1 \gg A_k$ ($k = 2, N$), то определение α_1, β_1, A_1 осуществляется по известным $V_s(h), \lambda_1$ из трех уравнений:

$$\begin{aligned} Q^2 + R &= 0, \\ \alpha_1 + \beta_1 - 2\xi_1(h) &= 0, \\ \sqrt{R(\lambda_1)} &= P(\lambda_1) / A_1. \end{aligned} \quad (22)$$

Если $k = 1$, известны A_1, λ_1 , то определение $V_s(h), \alpha_1, \beta_1$ производится из уравнений (22) при условии: функция $V_s(h) = V_s(0) + \frac{\partial V(0)}{\partial z} h + o(h^2)$. Указанное условие означает линейность функции скорости при первом сдвиге на величину шага по глубине.

Докажем, что по известным $A_1, \lambda_1, V_s(h)$ нахождение α_1, β_1 возможно из уравнений:

$$\begin{aligned} Q^2 + R &= 0, \\ \sqrt{R(\lambda_1)} &= P(\lambda_1) / A_1. \end{aligned} \quad (23)$$

Из уравнения Штурма–Лиувилля и одновременного условия разрешимости обратной задачи [7]

$$P(z_1, \lambda)S(\lambda) - Q^2(z_1, \lambda) = R(\lambda) \quad (24)$$

при $\lambda = \lambda_1$, а также краевого условия для дискретного спектра

$$u(0) = 2i \sum_{k=0}^N \frac{1}{m_k^\pm} \psi_\pm(0, \lambda_k) \psi_\pm(0, \lambda_k) \quad (25)$$

следуют уравнения (23).

С помощью системы уравнений (22) можно проводить коррекцию амплитуд. Значения α_1 и β_1 определяются следующим образом:

$$\alpha_1 = \left[\frac{(\lambda_1 - \xi_1(h))^2}{A_1^2 \lambda_1} - \lambda_1^2 + \lambda_1 \beta_1 \right] / (-\lambda_1 + \beta_1), \quad (26)$$

где A_1 – амплитуда первой моды нормальной волны Рэлея;

$$\begin{aligned} &\beta_1^2(-\xi_1 + \lambda_1) + \\ &+ \beta_1 \left[\xi_1^2 + \frac{(\lambda_1 - \xi_1(h))^2}{A_1^2 \lambda_1} - \lambda_1^2 - \frac{(\lambda_1 - \xi_1(h))^2}{A_1^2 \xi_1} \right] + \\ &+ \frac{(\lambda_1 - \xi_1(h))^2}{A_1^2 \xi_1} \lambda_1 - \lambda_1 \xi_1^2 - \\ &- \frac{(\lambda_1 - \xi_1(h))^2}{A_1^2 \lambda_1} \xi_1 + \lambda_1^2 \xi_1 = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

где корни квадратного уравнения

$$\beta_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (28)$$

а знак перед корнем в (28) выбирается так, чтобы значение β_1 было неотрицательным. Для обеспечения устойчивости вычислений в знаменателях формул (26)–(28) следует прибавить малый параметр ε .

Из выше изложенного следует, что если амплитудный ряд имеет вид: $A_1, 0, 0, \dots, 0$, то α_1, β_1 вычисляются точно, а если все члены A_k ряда не равны ε ,

то α_1', β_1' вычисляются приближенно. При этом в качестве амплитуды первой моды следует брать

$$A_1' = \frac{A_1}{N \prod_{k=2}^N (\lambda_1 - \xi_k)}$$

$$\frac{P(\lambda_1)}{A_1} = \frac{P(\lambda_1)}{A_1'}, \quad (29)$$

где $P'(\lambda_1) = (\lambda_1 - \xi_1)$, $P(\lambda_1) = \prod_{k=1}^N (\lambda_1 - \xi_k)$. Таким образом, для многочлена любой степени N найдется многочлен третьей степени, который в некоторой малой окрестности λ_1 описывает этот многочлен. Условие (29) позволяет работать с N модами.

Оценим $V_s(0), V_s(h)$, которые необходимы для последующих вычислений скоростного разреза. Для головных волн имеем:

$$\begin{aligned} t &= \int_{r_0}^r \frac{ds}{V(s)} = \int_{r_0}^r \frac{ds}{kV_0 s + V_0} = \\ &= \int_{z_0}^z \frac{1}{kV_0 \zeta + V_0} d\zeta + \int_{y_0}^y \frac{1}{kV_0 z + V_0} d\eta. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь t – время, y – удаление вдоль профиля, k – коэффициент. Данное выражение говорит о том, что лучи являются отрезками прямых, либо лучевой параметр равен нулю, либо радикал в выражении для голографа константа. С учетом этого, из (30) получим

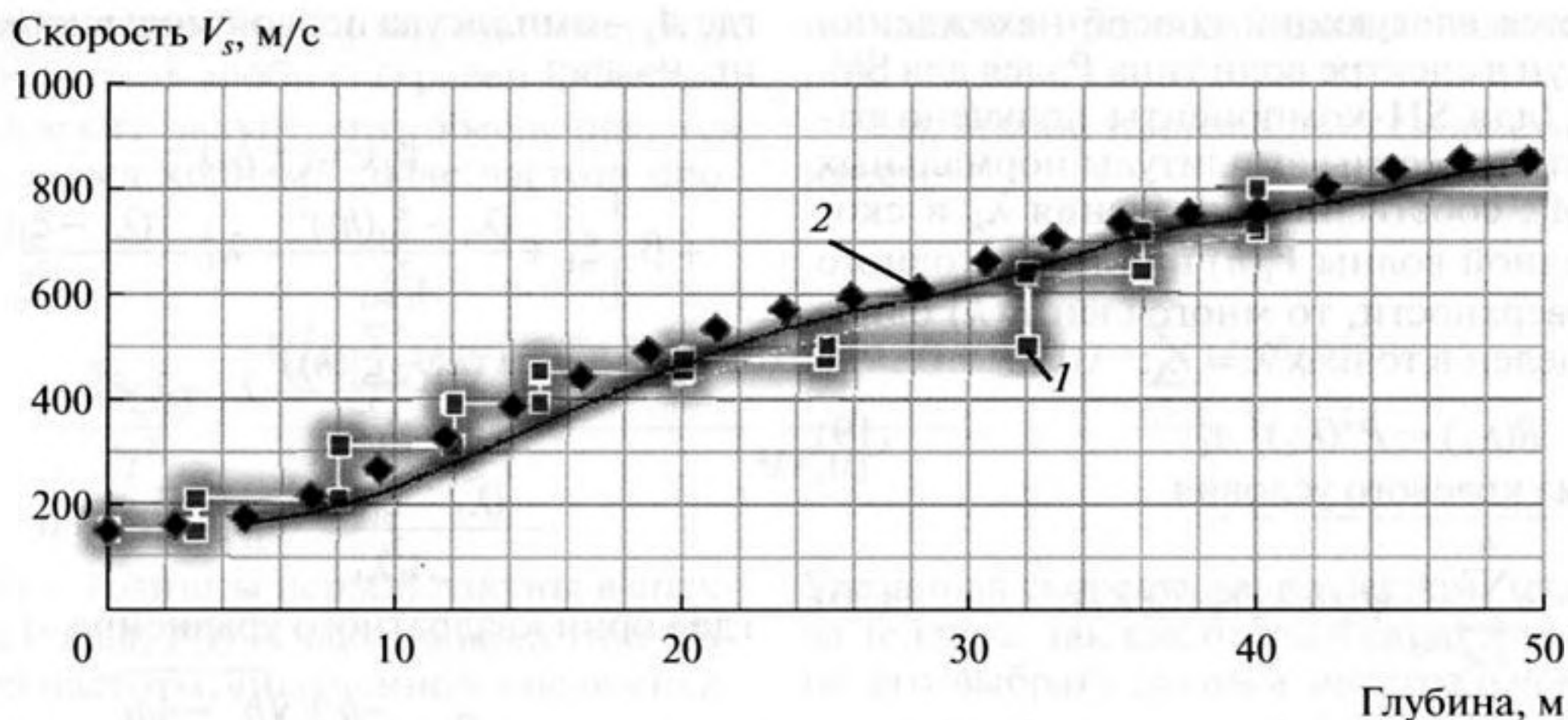


Рис. 1. Исходная модель среды 1 и итоговое решение 2.

$$t = \frac{(y - y_0)}{kV_0z + V_0} + \frac{1}{kV_0} \{ \ln(kV_0z + V_0) - \ln(kV_0z_0 + V_0) \} = \quad (31)$$

$$= \frac{(y - y_0)}{kV_0z + V_0} + \frac{1}{kV_0} \ln \frac{kV_0z + V_0}{kV_0z_0 + V_0}.$$

При фиксированных расстояниях от источника R_n для первой производной имеем

$$\frac{\partial t}{\partial z} = -\frac{(y - y_0)}{(kV_0z + V_0)^2} kV_0 + \frac{1}{kV_0} \{ (kV_0z + V_0)^{-1} kV_0 \} = \quad (32)$$

$$= -\frac{(y - y_0)}{(kV_0z + V_0)^2} kV_0 + \frac{1}{kV_0z + V_0}.$$

Приравнявая производную нулю, получим

$$y - y_0 = \frac{(kV_0z + V_0)}{kV_0} = z + 1/k;$$

$$0 \leq z \leq z_0;$$

$$y - y_0 = 2z - z_0 + 1/k;$$

$$z_0 \leq z \leq (y - y_0 - 1/k + z_0)/2.$$

Откуда следует глубина z , на которой при нуле производной определяется скорость волны. Скорость же в первом слое определяется по экстремуму годографа прямой волны. Последующий затем расчет по программе D3 решения обратной задачи идет до половины длины волны в области низких частот.

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ СЕЙСМИЧЕСКОГО РАЗРЕЗА

Рассмотрим применение метода для скоростной модели, соответствующей осадочным отложениям верхнего неоднородного слоя морского дна [17]. Указанная модель и итоговое решение с использованием описанного выше метода и про-

граммы D3 представлены на рис. 1, где сплошной линией показан результат линейной фильтрации по трем точкам. Расчеты показали, что с переходом к большим глубинам эффективно увеличение шага расчета. Волна SV, как следует из указанной статьи, имеет многомодовый характер.

По разработанной программе спектрального анализа, выполняющей решение уравнений типа свертки для каждой пары источник–приемник с автоопределением параметра регуляризации по Тихонову и нормировкой трасс по амплитуде с последующим прямым преобразованием Фурье по координате удаления, получаем поверхность амплитуд как функцию частоты и фазовой скорости. Эти данные являются входными для программы D3.

Рассмотрев результаты при удвоении шага, убеждаемся в устойчивости решения. Для этого использован метод Милна–Хэмминга [9]. Устойчивость решения достигается авторегуляризацией при коррекции амплитуд, отдельной регуляризацией высоких и низких частот, применением метода Милна–Хэмминга, проведением вычислений с нормировкой по глубине, вычислениями с растущим по глубине шагом и сшивкой решений при продолжении по интегральной скорости линейного тренда. При этом информативная часть расположена на интервале по глубине Z в долях от длины волны L : $L/8 < Z \leq L/2$. Реконструкция проведена при известной асимптоте $V_s(40)$, а также $V_s(0)$, $V_s(h)$.

Пример эффективной работы указанного алгоритма предварительных оценок скоростей по годографу представлен на рис. 2, где показано первое приближение обратной задачи по 58 сейсмограммам. При этом выше горизонта источника нужна поправка в координате z , равная $1/k$ (т.е. в первом приближении начальная координата z равна 4 м). На рис. 3 приведены результаты

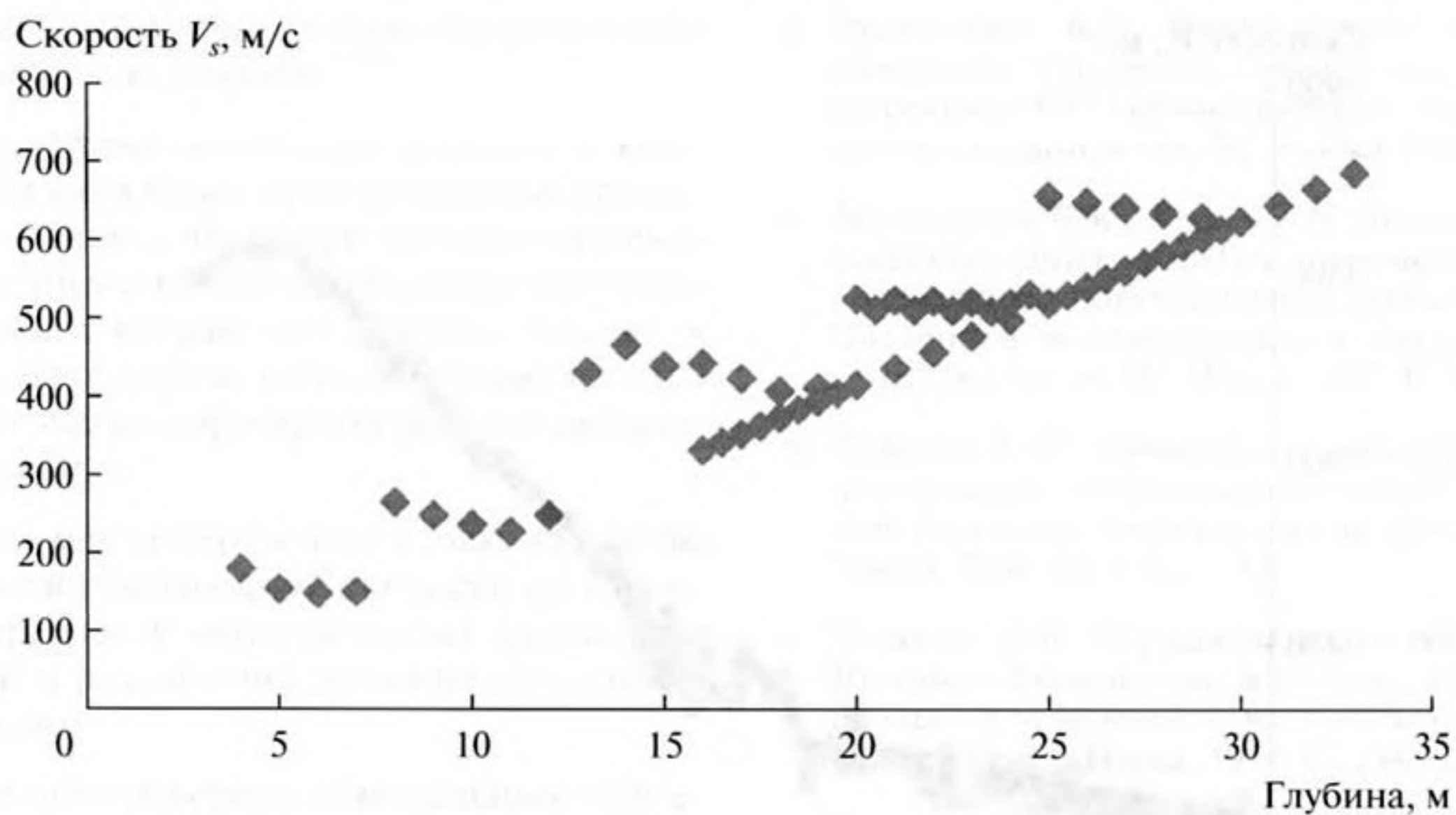


Рис. 2. Первое приближение обратной задачи по 58 сейсмограммам.

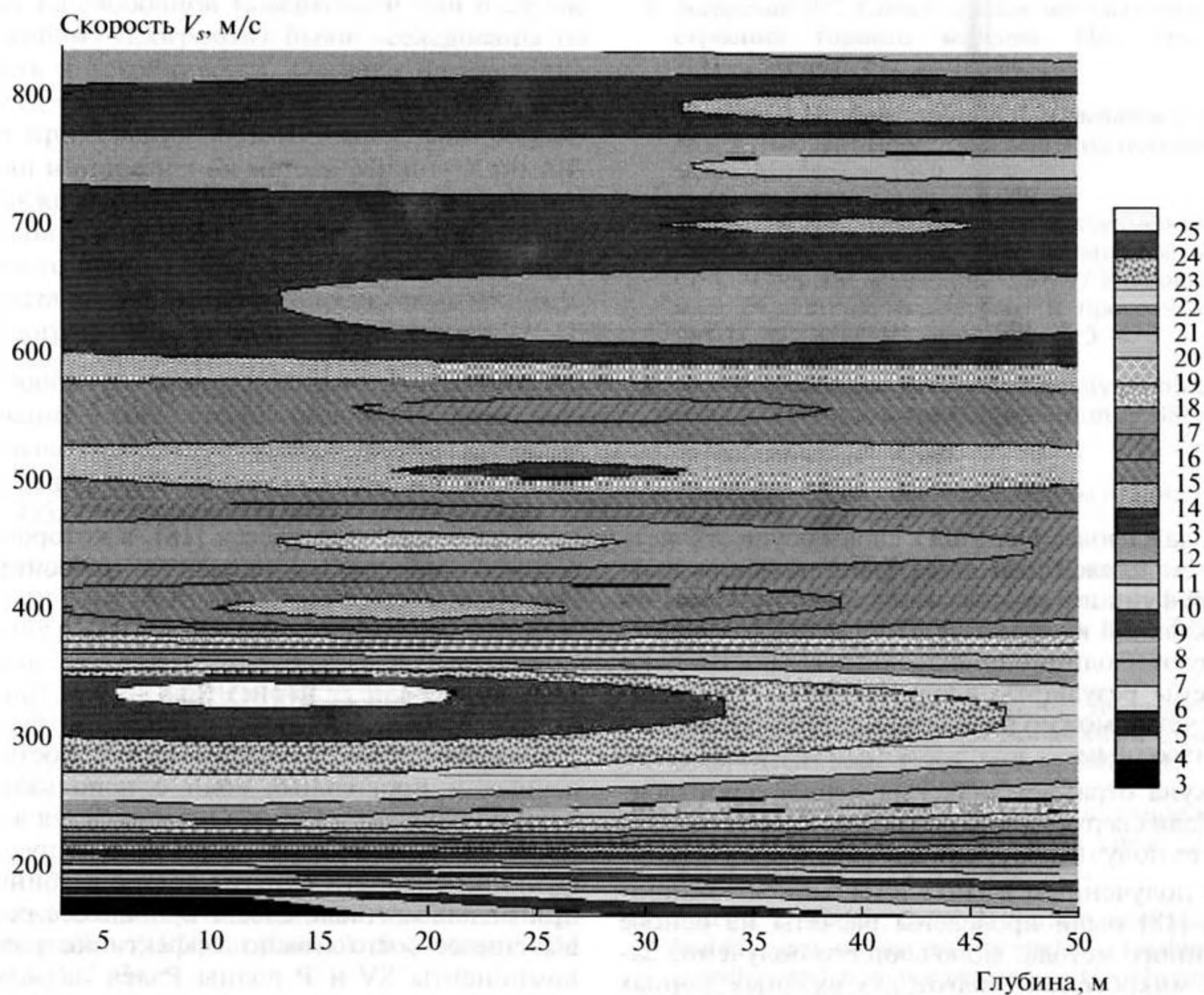


Рис. 3. Переход к слоям на основе первой производной скорости.

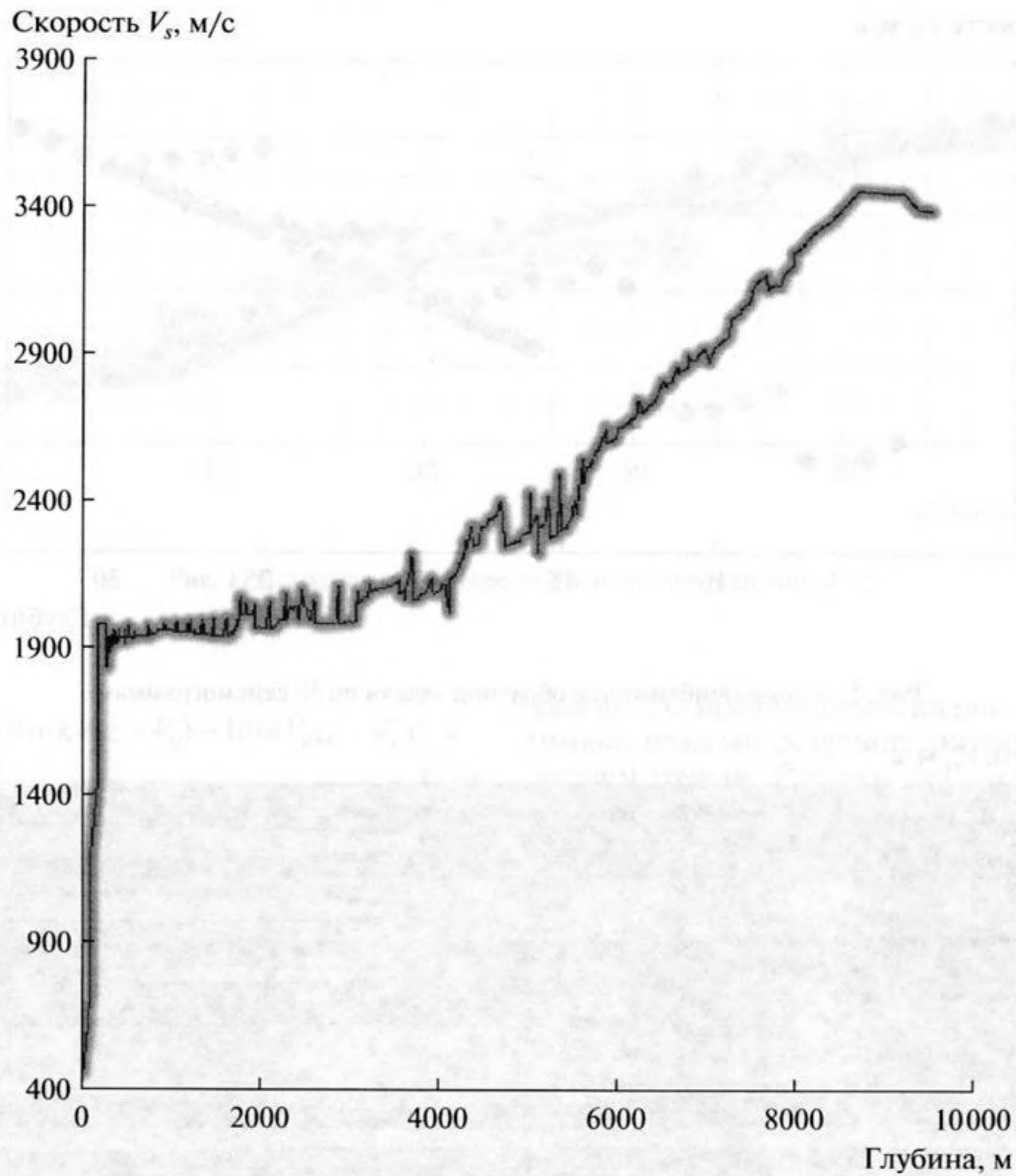


Рис. 4. Зависимость скорости поперечной волны SV от глубины.

перехода к слоям. Переход к слоям осуществляется путем численного дифференцирования найденной функции скорости поперечной волны по вертикальной координате. При этом слоям соответствуют изолинии производных скорости. Если получены результаты вдоль профиля, то достаточно четко можно отобразить слои без перехода к производным.

Лагуна отражает значения первой производной. Если сверху наложить график скорость—глубина, то получим координаты слоев.

По полученным в ИФЗ РАН записям микросейсм [18] были проведены расчеты на основе описанного метода, включающего получение записей микросейсм, подготовку входных данных (расчет дисперсии и амплитуд), оценку скоростей в линейном приближении, определение интегральной средней и решение обратной задачи. В результате получен вертикальный сейсмический разрез до глубин 8 км, представленный на рис. 4. Этот разрез хорошо коррелирует с результатами,

представленными в работе [18], в которой соответствующий разрез оценен в относительных единицах.

ВЫВОДЫ

Разработан метод определения скорости поперечных и продольных волн с использованием волн поляризации Рэлея. Он отличается возможностью реконструкции при почти непрерывной функции скорости упругих волн с глубиной, т.е. при большом числе слоев. В процессе решения выяснилось, что можно эффективно разделять компоненты SV и P волны Рэлея на малых по сравнению с длиной профиля глубинах с использованием ортогональности собственных функций на промежутке развернутого угла. При больших глубинах и трансформации волн следует применять удержание поляризации по формуле следов и находить глубины, соответствующие

спектральным данным и условию ортогональности или резонанса компонент.

Доказана эффективность алгоритма для компонент волны типа Рэлея преобразования вращения и обобщенного сдвига при нахождении скорости поперечной и продольной волны. При этом минимизируется вторая компонента. Анализ и расчет по спектральным данным осуществляется на различных шагах с проверкой условия принадлежности к лакуне.

Обоснован метод перехода к слоям на основе анализа первой производной скорости по глубине, либо перехода к интегральному уравнению типа свертки и разложения решения по единичным ступенькам.

Разработана и проверена на модельных примерах программа определения скорости волны SV и P, с использованием сейсмограмм, зарегистрированных на свободной поверхности или в случае микросейсм. Программы были исследованы на точность и устойчивость. Ошибка определения скорости составляет 5–6% и решение устойчиво за счет применения частотно-зависимой регуляризации и применения метода Милна–Хэмминга, а также амплитудной коррекции и возможности вычисления $V_s(h)$ как интегральной оценки линейного тренда. Хорошие оценочные функции до расчета получены путем определения минимумов годографа объемных и головных волн.

Опробование метода показало, что глубина исследования имеет порядок половины длины волны в низкочастотной области при этом достигаемый квадрат коэффициента корреляции составляет 0.935, а по тренду – 0.985.

Авторы признательны чл.-корр. РАН А.В. Николаеву и в.н.с. А.В. Горбатикову за полезное обсуждение работы и предоставленные записи микросейсм, а также руководителю компании "Tesseral" А.С. Костюкевичу за представленный тестовый модельный пример, отраженный на рис. 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Haskell N.* The dispersion of surface waves on multilayered media // *Bulletin Seismol. Soc. Amer.* 1953. № 43. P. 17–34.
2. *Жэн Б.-С., Лу Л.-Ю.* Волны Рэлея и обнаружение низкоскоростных слоев в слоистом полупространстве // *Акуст. журн.* 2003. Т. 49. № 5. С. 613–625.
3. *Левшин А.Л.* Поверхностные и каналовые сейсмические волны. М.: Наука, 1973. 176 с.
4. *Маркушевич В.М.* Вынужденные гармонические колебания рэлеевского типа и матричная задача рассеяния / Сб. Математические методы в сейсмологии и геодинамике. М.: Наука, 1986. С. 119–135.
5. *Маркушевич В.М., Хенкин Г.М.* Явные формулы для восстановления упругих параметров полупространства по поверхностным волнам Рэлея / Сб. Численное моделирование и анализ геофизических процессов. М.: Наука, 1987. С. 167–174.
6. *Королева Т.Ю., Яновская Т.Б., Патрушева С.С.* Использование сейсмического шума для определения структуры верхней толщи Земли // *Физика Земли.* 2009. № 5. С. 1–12.
7. *Левитан Б.М.* О разрешимости обратной задачи Штурма–Лиувилля на всей оси / Сб. Дифференциальные уравнения с частными производными. Новосибирск: Наука, 1980. С. 234–239.
8. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984. 240 с.
9. *Загорский Л.С.* Спектральные методы определения строения горного массива. Под ред. акад. В.Н. Страхова. М., 2001. 80 с.
10. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 232 с.
11. *Загорский Л.С.* Восстановление трехмерного сейсмического разреза по спектральным характеристикам первой моды волны SH // Информационный бюллетень. Алгоритмы и программы (ГосФАП). М.: ВНИИЦ, 1997. №1. С. 3–4.
12. *Arai H., Tokimatsu K.* S-Wave velocity profiling by inversion of Microtremor H/V spectrum // *BSSA.* 2004. V. 94. P. 53–64.
13. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1989. 416 с.
14. *Бреховских Л.М.* О волноводных явлениях в твердых слоистых средах с непрерывно изменяющимися параметрами // *Акуст. журн.* 1968. Т. 14. № 2. С. 194–203.
15. *Николаев А.В., Троицкий П.А., Чеботарева И.Я.* Изучение литосферы сейсмическими шумами // *ДАН СССР.* 1986. Т. 286. № 3. С. 586–591.
16. *Есипов И.Б., Степанов Ю.С.* Нелинейное взаимодействие звука в рассеивающей среде // *Акуст. журн.* 1988. Т. 34. № 5. С. 845–851.
17. *Socco L.V., Foti S., Boiero D.* Surface-wave analysis for building near-surface velocity models – Established approaches and new perspectives // *Geophysics.* 2010. V. 75. № 5. P. 83–102.
18. *Горбатиков А.В., Ларин Н.В., Моисеев Е.И., Беляшов А.В.* Применение метода микросейсмического зондирования для изучения строения погребенной трубки взрыва // *ДАН.* 2009. Т. 428. № 4. С. 526–530.