

## ДИФРАКЦИЯ ЗВУКА НА ЭКРАНЕ С ВЕЕРНОЙ НАСАДКОЙ

© 2013 г. И. А. Урусовский

Акустический институт им. Н.Н. Андреева

117036 Москва, ул. Шверника 4

E-mail: urusovskii\_ia@mail.ru

Поступила в редакцию 04.02.2012 г.

Применительно к противозумовым экранам проведен расчет дифракции звука на полуплоскости с насадкой в форме веера множества жестких полос разной ширины, образующих узкие клиновидные каналы неодинаковой длины. Каналы сообщаются друг с другом через внутреннюю цилиндрическую полость, в которую внутренние концы каналов открыты. Рассчитаны кривые снижения звука в зависимости от частоты и угла падения волн, иллюстрирующие высокую эффективность экрана.

*Ключевые слова:* экранирование шума, дифракция волн.

DOI: 10.7868/S0320791912060135

### ВВЕДЕНИЕ

Работы по проблеме экранировки домов от дорожного шума ведутся уже не менее трех десятилетий [1–5]. Простой экран с острой кромкой имеет тот недостаток, что рассеивает звук по всем направлениям в вертикальной плоскости. Поэтому такой экран мало ослабляет шум в зоне геометрической тени из-за ее “засветки” кромкой экрана. Закругленная кромка с радиусом закругления порядка или больше звуковой волны гораздо эффективнее ослабляет шум за экраном. Наибольшую экранировку дала бы акустически абсолютно мягкая насадка на кромку экрана [5]. Поскольку, однако, такой идеал недостижим, возникает потребность приблизиться к нему, насколько это возможно.

Расчеты по дифракции звука на экране с насадкой, имеющей сечение в форме веера жестких полос одинаковой ширины, соединенных по одной своей кромке с кромкой экрана, показали эффективность такой экранировки за исключением нескольких сравнительно узких частотных полос, где она оказывается даже хуже жесткой цилиндрической насадки. В [6] показано, что этим случаям соответствует звуковое поле в области глубокой тени за импедансным цилиндром при дифракции плоской волны на нем, когда основная часть этого поля представляется сравнительно слабо затухающей по угловой координате цилиндрической волной с комплексным индексом, определяемым из граничных условий. Выход из положения видится в использовании насадки в виде веера из множества полос разной ширины, образующих узкие клиновидные каналы неодинаковой длины, в общем случае сообщаемые друг с другом на периферии цилиндрической по-

лости насадки, в которую внутренние концы каналов открыты. В предельном случае полость отсутствует, а полосы состыкованы по одной своей кромке с осью веера. Каналы считаем узкими, если расстояния между их внешними кромками малы по сравнению с длиной звуковой волны в рассматриваемом диапазоне частот. В каждом таком канале звуковое поле можно представить только одной модой, не зависящей от угловой координаты, пренебрегая взаимодействием с остальными модами.

Для оценки эффективности экранирования достаточно решить задачу дифракции плоской звуковой волны, падающей на экран по нормали к нему. Из-за неоднородности граничных условий задача в явном виде не решается, но сводится к системе алгебраических уравнений, решаемой методом редукции.

Итак, рассмотрим задачу дифракции плоской звуковой волны, падающей по нормали к экрану с насадкой, имеющей в сечении форму веера, составленного из множества жестких полос разной ширины. Пусть внешние кромки полос расположены по поверхности цилиндра радиуса  $a$ , внутренние – по поверхности цилиндра меньшего радиуса  $\ell_0$ , причем ось малого цилиндра совпадает с осью веера. Оси этих цилиндров расположены в плоскости экрана выше его кромки, ось веера расположена на расстоянии  $b$  ниже оси насадки. На рис. 1 показано поперечное сечение экрана с такой насадкой.

По поверхности, на которой расположены внешние концы клиновидных каналов, звуковое давление на каждой частоте меняется по фазе в широких пределах. На противоположных же концах этих каналов звуковое давление отчасти вы-

равнивается усреднением по каналам из-за акустического замыкания более близких друг к другу устьев каналов, расположенных по периферии цилиндрической полости. В результате звуковое давление в каналах становится примерно таким же, как в соответствующих изолированных каналах со свободным концом. При этом узлы давления в каналах сдвигаются к их внутренним концам, открытым в полость, что позволяет уменьшить габариты насадки при той же эффективности экранирования. Смещение оси веера от оси насадки изменяет фазы волн в каналах, что дает возможность некоторой регулировки акустического импеданса на периферии насадки в целях уменьшения шума за экраном, особенно в области низких частот. Задача разбивается на две части – дифракцию симметричной и антисимметричной частей падающей волны относительно экрана.

### СИММЕТРИЧНАЯ ЧАСТЬ ПОЛЯ ДИФРАКЦИИ ВОЛН

В узких клиновидных каналах между полосами симметричная часть звукового давления приближенно равна

$$p_e(\ell, \eta_j) = \alpha_e(\eta_j) J_0(k_c \ell) + \beta_e(\eta_j) N_0(k_c \ell),$$

где  $J_n(x)$  – функция Бесселя;  $N_n(x)$  – функция Неймана;  $\eta_j$  – полярный угол срединной плоскости  $j$ -го канала, отсчитываемый от плоскости экрана с затененной его стороны в полярной системе координат с центром, совпадающим с осью веера;  $\ell$  – расстояние от оси веера;  $k_c = k(1 + i\zeta)$  – волновое число в клиньях,  $\zeta \geq 0$ . Коэффициенты  $\alpha_e(\eta_j)$  и  $\beta_e(\eta_j)$  для соседних каналов мало отличаются друг от друга ввиду узости каналов. Поэтому индекс  $j$  здесь можно опустить и далее считать переменную  $\eta$  непрерывной. При этом

$$p_e(\ell, \eta) = \alpha_e(\eta) J_0(k_c \ell) + \beta_e(\eta) N_0(k_c \ell). \quad (1)$$

Дифференцируя, найдем

$$\frac{\partial p_e(\ell, \eta)}{k_c \partial \ell} = -\alpha_e(\eta) J_1(k_c \ell) - \beta_e(\eta) N_1(k_c \ell). \quad (2)$$

Учитывая, что  $dr = \cos \varepsilon d\ell$ , где  $\varepsilon$  – угол между осями веера и насадки, видимый из точки наблюдения на периферии веера,  $\varepsilon = \eta - \psi$ ,  $\psi$  – полярный угол в цилиндрической системе координат  $r$ ,  $\psi$  с центром, совпадающим с осью насадки,  $\cos \varepsilon =$

$$= \frac{1 - \beta \cos \psi}{\sqrt{1 + \beta(\beta - 2 \cos \psi)}}, \quad \beta = b/a, \quad b - \text{расстояние между осями веера и насадки, получаем}$$

$$\frac{\partial p_e(\ell, \eta)}{k_c \partial r} =$$

$$= -[\alpha_e(\eta) J_1(k_c \ell) + \beta_e(\eta) N_1(k_c \ell)] \cos[\varepsilon(\psi)].$$

В области  $\ell \leq \ell_0$  симметричная часть звукового давления может быть представлена рядом Фу-

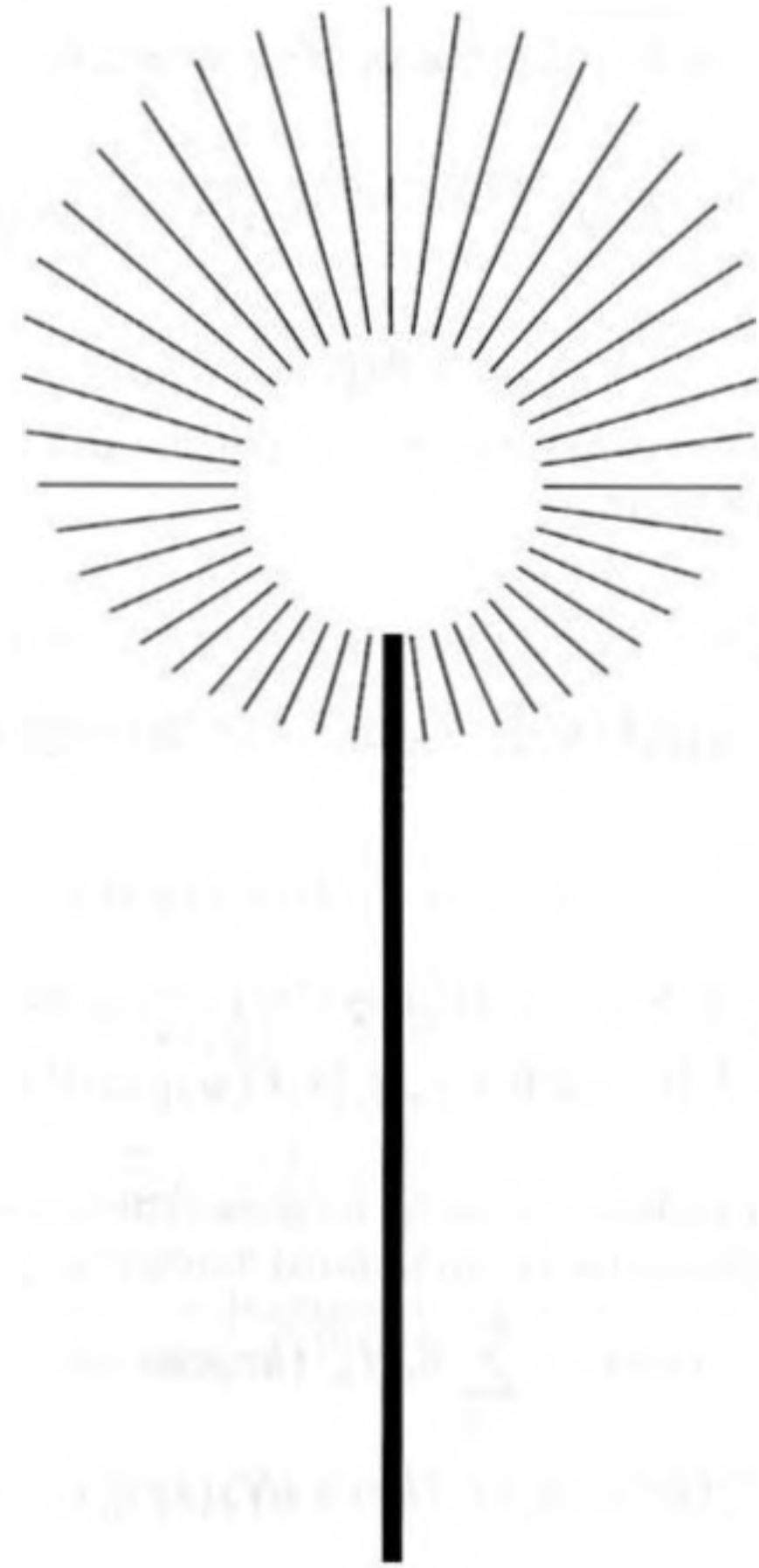


Рис. 1.

рье  $p_e(\ell, \eta) = \sum_{n \geq 0} E_n J_n(k_c \ell) \cos n\eta$  с неизвестными пока амплитудами  $E_n$ . Отсюда из непрерывности звукового давления при  $\ell = \ell_0$ , используя разложения в ряды Фурье

$$\alpha_e(\eta) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \cos(n\eta), \quad \beta_e(\eta) = \sum_{n \geq 0} \beta_n \cos(n\eta), \quad (4)$$

имеем

$$E_n J_n(k_c \ell_0) = \alpha_n J_0(k_c \ell_0) + \beta_n N_0(k_c \ell_0). \quad (5)$$

Аналогично из непрерывности производной симметричной части звукового давления по  $\ell$  получим

$$E_n J'_n(k_c \ell_0) = -\alpha_n J_1(k_c \ell_0) - \beta_n N_1(k_c \ell_0). \quad (6)$$

Исключив  $E_n$  из (5) и (6), найдем

$$\beta_n = -\alpha_n \gamma_n,$$

где

$$\gamma_n = \frac{J_1(k_c \ell_0) J_n(k_c \ell_0) + J_0(k_c \ell_0) J'_n(k_c \ell_0)}{N_1(k_c \ell_0) J_n(k_c \ell_0) + N_0(k_c \ell_0) J'_n(k_c \ell_0)}, \quad \text{штрих}$$

означает производную по аргументу,  $J'_n(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x)$ . Отсюда видно, что  $\beta_0 = \gamma_0 = 0$ ,

поскольку  $J'_0(x) = -J_1(x)$ . При  $r = a$  имеем

$$\ell(\psi) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \psi}, \quad dr = \cos \varepsilon d\ell, \quad \varepsilon = \eta - \psi,$$

$$\sin \eta = \frac{a}{\ell(\psi)} \sin \psi = \frac{\sin \psi}{\sqrt{1 + \beta(\beta - 2 \cos \psi)}},$$

$$\cos \eta = \frac{\cos \psi - \beta}{\sqrt{1 + \beta(\beta - 2 \cos \psi)}}.$$

Формулы (1) и (3) при  $r = a$ , согласно (4), можно написать в виде

$$p_e = \alpha_e(\eta(\psi)) J_0(k_c \ell(\psi)) + \beta_e(\eta(\psi)) N_0(k_c \ell(\psi)) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \{J_0[k_c \ell(\psi)] - \gamma_n N_0[k_c \ell(\psi)]\} \cos[m\eta(\psi)], \quad (7)$$

$$\frac{\partial p_e}{\partial r} = -k_c [\alpha_e(\eta(\psi)) J_1(k_c \ell(\psi)) + \beta_e(\eta(\psi)) N_1(k_c \ell(\psi))] \cos \varepsilon(\psi) = k_c \cos \varepsilon(\psi) \times \sum_{n \geq 0} \alpha_n \{-J_1[k_c \ell(\psi)] + \gamma_n N_1[k_c \ell(\psi)]\} \cos[m\eta(\psi)]. \quad (8)$$

С другой стороны, при  $r \geq a$  симметричная относительно экрана часть звукового давления равна [1]

$$p_e = \cos kx + \sum_{n \geq 0} B_n H_n^{(1)}(kr) \cos n\psi = \sum_{n \geq 0} \{C_n(kr) + B_n [J_n(kr) + iN_n(kr)]\} \cos n\psi, \quad (9)$$

где  $x = r \sin \psi$  — горизонтальная координата,  $C_0(kr) = J_0(kr)$ ,  $C_n(kr) = [1 + (-1)^n] J_n(kr)$  при  $n \geq 1$ . Отсюда находим

$$\frac{\partial p_e}{\partial r} = k \sum_{n \geq 0} \{C'_n(kr) + B_n [J'_n(kr) + iN'_n(kr)]\} \cos n\psi, \quad (10)$$

где штрих означает производную по аргументу. Приравняв правые части (7) и (9), а также (8) и (10) при  $r = a$  в силу непрерывности радиальной составляющей колебательной скорости, после интегрирования по  $\psi$  в пределах  $(0, \pi)$  с весом  $\cos(m\psi)$  получим

$$\sum_{n \geq 0} \alpha_n I_{n,m} = \frac{\pi}{2} [1 + (-1)^m] J_m(ka) + B_m [J_m(ka) + iN_m(ka)] \frac{1 + \delta_m}{2} \pi, \quad (11)$$

$$\frac{k_c}{k} \sum_{n \geq 0} \alpha_n I'_{n,m} = \frac{\pi}{2} [1 + (-1)^m] J'_m(ka) + B_m [J'_m(ka) + iN'_m(ka)] \frac{1 + \delta_m}{2} \pi, \quad (12)$$

где

$$I_{n,m} = \int_0^\pi \{J_0[k_c \ell(\psi)] - \gamma_n N_0[k_c \ell(\psi)]\} \times \cos[m\eta(\psi)] \cos(m\psi) d\psi,$$

$$I'_{n,m} = \int_0^\pi \{\gamma_n N_1[k_c \ell(\psi)] - J_1[k_c \ell(\psi)]\} \times \cos[m\eta(\psi)] \cos \varepsilon(\psi) \cos(m\psi) d\psi,$$

$$\cos[m\eta(\psi)] = \operatorname{Re} \left[ \frac{\exp(i\psi) - \beta}{\sqrt{1 + \beta(\beta - 2 \cos \psi)}} \right]^n, \quad \delta_n = 0$$

при  $n \geq 1$ ,  $\delta_0 = 1$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Исключив  $B_m$  из (11) и (12) и учтя тождество  $J_{m+1}(\xi) N_m(\xi) - J_m(\xi) N_{m+1}(\xi) = \frac{2}{\pi \xi}$  [7], получим систему уравнений

$$\sum_{n \geq 0} \alpha_n \left\{ I_{n,m} [J'_m(ka) + iN'_m(ka)] - \frac{k_c}{k} I'_{n,m} [J_m(ka) + iN_m(ka)] \right\} = \frac{i[1 + (-1)^m]}{ka}.$$

Решив эту систему уравнений относительно неизвестных  $\alpha_n$ , амплитуды дифрагированных волн  $B_m$  найдем из формулы (11):

$$B_m = \left\{ \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 0} \alpha_n I_{n,m} - [1 + (-1)^m] J_m(ka) \right\} \times \frac{1}{(1 + \delta_m) [J_m(ka) + iN_m(ka)]}.$$

### АНТИСИММЕТРИЧНАЯ ЧАСТЬ ПОЛЯ ДИФРАКЦИИ ВОЛН

Поле звукового давления в падающей волне является решением Зоммерфельда задачи дифракции на жесткой полуплоскости [8]

$$p_{z0} = \cos(kr \sin \psi) + U(kr, \psi),$$

где

$$U(kr, \psi) = -\exp(-ikr \sin \psi) F \left[ \sqrt{kr} \left( \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \right) \right] - \exp(ikr \sin \psi) F \left[ \sqrt{kr} \left( \cos \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\psi}{2} \right) \right], \quad F(z) = \frac{1}{\sqrt{i\pi}} \times \int_0^z \exp(it^2) dt = \frac{1}{2} \operatorname{erf}(z\sqrt{-i}).$$

Его антисимметричная относительно экрана часть имеет вид [8]

$$U(kr, \psi) = \sum_{n \geq 0} U_n(kr) \cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \psi \right], \quad (13)$$

где

$$U_n(kr) = \sqrt{-2i} (-i)^n \left( \sin \frac{n\pi}{2} - \cos \frac{n\pi}{2} \right) J_{n+\frac{1}{2}}(kr).$$

Антисимметричная часть звукового давления и ее производная в клиновидных каналах имеют вид, аналогичный формулам (1) и (2)

$$p_{od}(\ell, \eta) = \alpha_{od}(\eta) J_0(k_c \ell) + \beta_{od}(\eta) N_0(k_c \ell), \quad (14)$$

$$\frac{\partial p_{od}(\ell, \eta)}{k_c \partial \ell} = -\alpha_{od}(\eta) J_1(k_c \ell) - \beta_{od}(\eta) N_1(k_c \ell). \quad (15)$$

В области  $\ell \leq \ell_0$  антисимметричная часть звукового давления представима рядом Фурье

$$p_{od}(\ell, \eta) = \sum_{n \geq 0} O_n J_{n+\frac{1}{2}}(k_c \ell) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \eta$$

с неизвестными пока амплитудами  $O_n$ . Отсюда из непрерывности звукового давления при  $\ell = \ell_0$ , используя разложения в ряды Фурье

$$\alpha_{od}(\eta) = \sum_{n \geq 0} \alpha_{n+\frac{1}{2}} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \eta \text{ и}$$

$$\beta_{od}(\eta) = \sum_{n \geq 0} \alpha_{n+\frac{1}{2}} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \eta,$$

получаем

$$O_n J_{n+\frac{1}{2}}(k_c \ell_0) = \alpha_{n+\frac{1}{2}} J_0(k_c \ell_0) + \beta_{n+\frac{1}{2}} N_0(k_c \ell_0). \quad (16)$$

Аналогично из непрерывности производной симметричной части звукового давления по  $\ell$ , учитывая (14), имеем

$$O_n J'_{n+\frac{1}{2}}(k_c \ell_0) = -\alpha_{n+\frac{1}{2}} J_1(k_c \ell_0) - \beta_{n+\frac{1}{2}} N_1(k_c \ell_0). \quad (17)$$

Исключив  $O_n$  из (16) и (17), найдем

$$\beta_{n+\frac{1}{2}} = -\alpha_{n+\frac{1}{2}} \gamma_{n+\frac{1}{2}},$$

где

$$\gamma_{n+\frac{1}{2}} = \frac{J_1(k_c \ell_0) J_{n+\frac{1}{2}}(k_c \ell_0) + J_0(k_c \ell_0) J'_{n+\frac{1}{2}}(k_c \ell_0)}{N_0(k_c \ell_0) J'_{n+\frac{1}{2}}(k_c \ell_0) + N_1(k_c \ell_0) J_{n+\frac{1}{2}}(k_c \ell_0)},$$

причем по свойству бесселевых функций  $J'_{n+\frac{1}{2}}(x) =$

$$= J_{n-\frac{1}{2}}(x) - \frac{n+(1/2)}{x} J_{n+\frac{1}{2}}(x). \text{ Отсюда (14) при } r = a \text{ запишем в виде}$$

$$p_{od} = \sum_{n \geq 0} \alpha_{n+\frac{1}{2}} \left\{ J_0[k_c \ell(\psi)] - \gamma_{n+\frac{1}{2}} N_0[k_c \ell(\psi)] \right\} \times \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \eta(\psi)\right], \quad (18)$$

и согласно (15) при  $r = a$

$$\frac{\partial p_{od}}{k \partial r} = \frac{k_c}{k} \cos \varepsilon(\psi) \times \sum_{n \geq 0} \alpha_{n+\frac{1}{2}} \left\{ \gamma_{n+\frac{1}{2}} N_1[k_c \ell(\psi)] - J_1[k_c \ell(\psi)] \right\} \times \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \eta(\psi)\right]. \quad (19)$$

При  $r \geq a$  антисимметричная часть звукового давления имеет вид

$$p_{od}(r, \psi) = U(kr, \psi) + \sum_{n \geq 0} A_n H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \psi, \quad (20)$$

где  $A_n$  — амплитуды антисимметричных дифрагированных волн. Отсюда при  $r = a$  получим

$$p_{od} = U(ka, \psi) + \sum_{n \geq 0} A_n H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(ka) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \psi, \quad (21)$$

$$\frac{\partial p_{od}}{k \partial r} = \frac{\partial U}{k \partial r} + \sum_{n \geq 0} A_n \left[ H_{n-\frac{1}{2}}^{(1)}(ka) - \frac{n+\frac{1}{2}}{ka} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(ka) \right] \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \psi. \quad (22)$$

Здесь

$$\frac{\partial}{k \partial r} U(kr, \psi) = \sum_{n \geq 0} U'_n \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \psi\right],$$

$$U'_n = \sqrt{-2i} (-i)^n \left( \sin \frac{n\pi}{2} - \cos \frac{n\pi}{2} \right) J'_{n+\frac{1}{2}}(ka).$$

Исключив из формул (18), (19), (21) и (22) их левые части, получим

$$\sum_{n \geq 0} \alpha_{n+\frac{1}{2}} \left\{ J_0[k_c \ell(\psi)] - \gamma_{n+\frac{1}{2}} N_0[k_c \ell(\psi)] \right\} \times \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \eta(\psi)\right] = U(ka, \psi) + \sum_{n \geq 0} A_n H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(ka) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \psi = \sum_{n \geq 0} \left( U_n + A_n H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(ka) \right) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \psi, \quad (23)$$

где

$$U_n = \sqrt{-2i} (-i)^n \left( \sin \frac{n\pi}{2} - \cos \frac{n\pi}{2} \right) J_{n+\frac{1}{2}}(ka),$$

$$\frac{k_c}{k} \cos \varepsilon(\psi) \sum_{n \geq 0} \alpha_{n+\frac{1}{2}} \left\{ \gamma_{n+\frac{1}{2}} N_1[k_c \ell(\psi)] - J_1[k_c \ell(\psi)] \right\} \times \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \eta(\psi)\right] = \sum_{n \geq 0} U'_n \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \psi\right] + \quad (24)$$

$$+ \sum_{n \geq 0} A_n \left[ H_{n-\frac{1}{2}}^{(1)}(ka) - \frac{n+\frac{1}{2}}{ka} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(ka) \right] \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \psi.$$

Проинтегрировав равенства (23) и (24) по  $\psi$  в пределах от нуля до  $\pi$  с весом  $\cos\left(m + \frac{1}{2}\right)$ , получим

$$\sum_{n \geq 0} \alpha_{n+\frac{1}{2}} K_{n,m} = \left( U_m + A_m H_{m+\frac{1}{2}}^{(1)}(ka) \right) \frac{\pi}{2}, \quad (25)$$

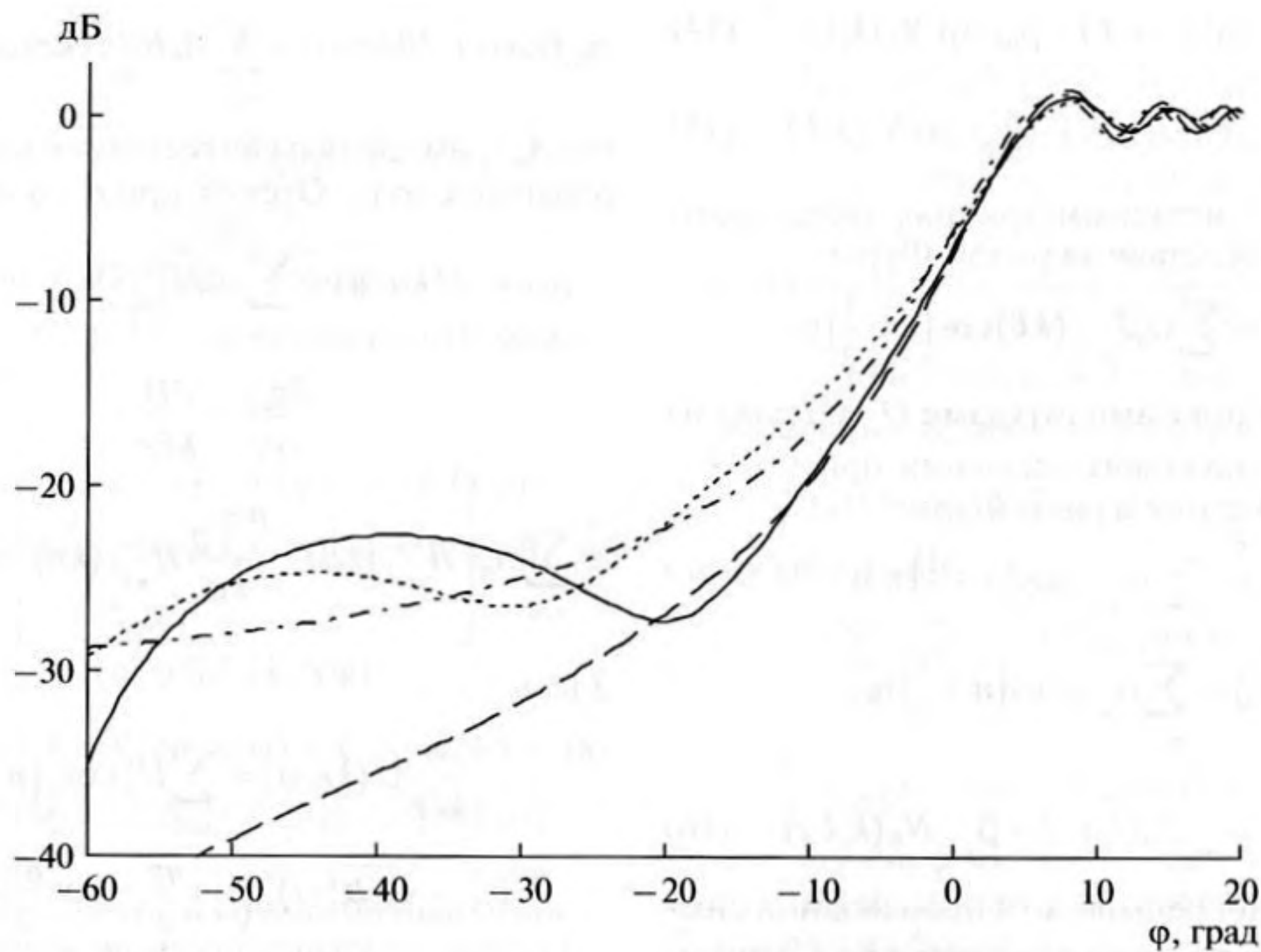


Рис. 2. Уровень звукового давления за экраном в зависимости от угла  $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$ . Частота звука  $f = 325$  Гц,  $ka = 2\pi fa/c = 3.003$ , число учтенных в численном расчете угловых гармоник  $N = 16$ .

$$\frac{k_c}{k} \sum_{n \geq 0} \alpha_{n+\frac{1}{2}} K'_{n,m} = \left\{ U'_m + A_m \left[ H_{n-\frac{1}{2}}^{(1)}(ka) - \frac{n+\frac{1}{2}}{ka} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(ka) \right] \right\} \frac{\pi}{2}, \quad (26)$$

где

$$K_{n,m} = \int_0^\pi \left\{ J_0[k_c \ell(\psi)] - \gamma_{n+\frac{1}{2}} N_0[k_c \ell(\psi)] \right\} \times \cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \eta(\psi) \right] \cos \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right) \psi \right] d\psi,$$

$$K'_{n,m} = \int_0^\pi \left\{ \gamma_{n+\frac{1}{2}} N_1[k_c \ell(\psi)] - J_1[k_c \ell(\psi)] \right\} \times \cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \eta(\psi) \right] \cos \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right) \psi \right] \cos \varepsilon(\psi) d\psi.$$

Здесь

$$\cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \eta(\psi) \right] = \operatorname{Re} \left[ \frac{\exp(i\psi) - \beta}{\sqrt{1 + \beta(\beta - 2\cos\psi)}} \right]^{n+\frac{1}{2}}.$$

Исключив  $A_m$  из уравнений (25) и (26), приходим к системе уравнений

$$\sum_{n \geq 0} \alpha_{n+\frac{1}{2}} \left\{ K_{n,m} \left[ H_{m-\frac{1}{2}}^{(1)}(ka) - \frac{m+\frac{1}{2}}{ka} H_{m+\frac{1}{2}}^{(1)}(ka) \right] - \frac{k_c}{k} K'_{n,m} H_{m+\frac{1}{2}}^{(1)}(ka) \right\} = (-i)^m \left( \sin \frac{m\pi}{2} - \cos \frac{m\pi}{2} \right) \frac{\sqrt{2i}}{ka},$$

решив которую относительно неизвестных  $\alpha_{n+\frac{1}{2}}$ , найдем амплитуды  $A_m$  дифрагированных антисимметричных волн, воспользовавшись формулой (25)

$$A_m = \left[ \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 0} \alpha_{n+\frac{1}{2}} K_{n,m} - U_m \right] \frac{1}{H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(ka)}.$$

Полное звуковое давление равно  $p = p_e + p_{od}$ . Для веера из вплотную состыкованных полос  $\ell_0 = 0$ ,  $\gamma_n = 0$  и  $\gamma_{n+\frac{1}{2}} = 0$  при всех  $n$ . В этом случае формулы существенно упрощаются.

На рис. 2–10 приведены численные расчеты уровня звукового давления за экраном при  $b/a = 0.1$ ,  $\ell_0/a = 0.5$  в зависимости от угла  $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$  при радиусе насадки  $a = 0.5$  м, коэффициенте затухания  $\zeta = 0.006$  и расстоянии точки

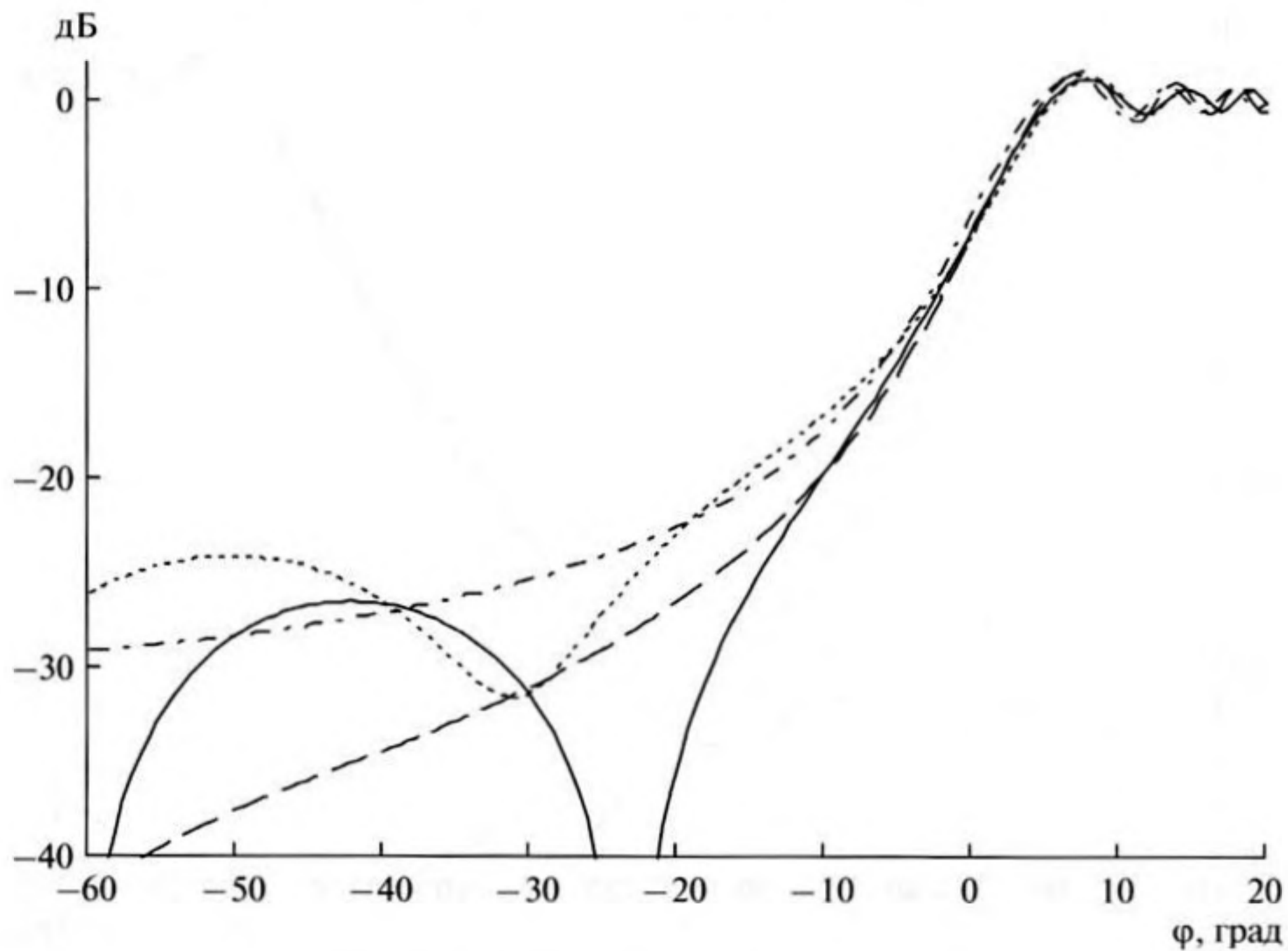


Рис. 3. То же, что и на рис. 2, при  $f = 350$  Гц,  $ka = 3.234$ ,  $N = 14$ .

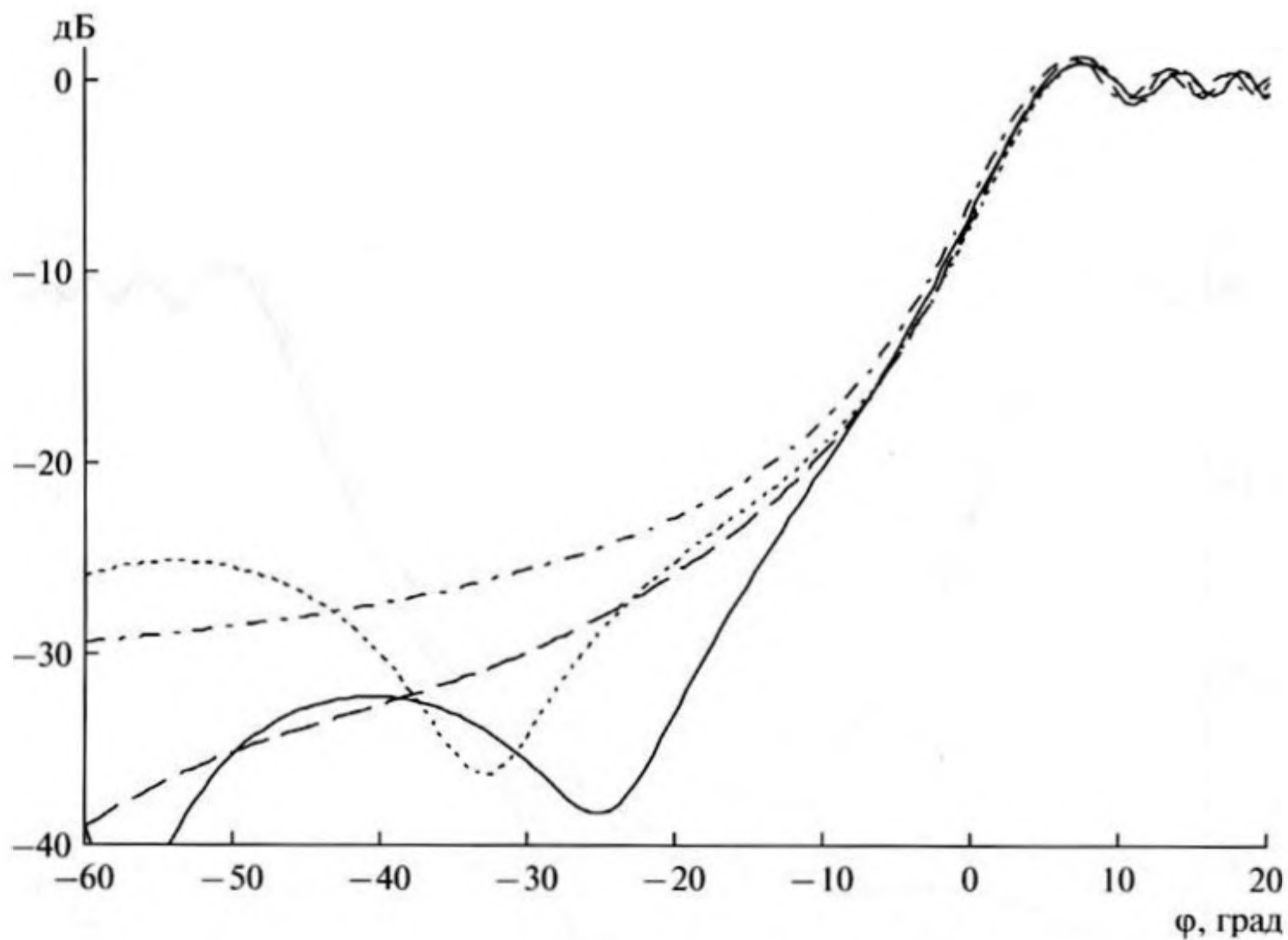


Рис. 4. То же, что и на рис. 2, при  $f = 375$  Гц,  $ka = 3.465$ ,  $N = 14$ .

наблюдения от оси насадки  $100a$ . Штрихпунктирная кривая соответствует экрану без насадки; штриховая кривая — экрану с насадкой в виде веера из состыкованных полос одинаковой ширины, когда оси веера и насадки совпадают;

пунктирная кривая — экрану с насадкой в виде веера, составленного из несостыкованных полос одинаковой ширины, внутренние кромки которых отстоят от оси веера на расстояние  $ad = 0.5a$  ( $d = 0.5$ ); сплошная кривая — экрану с

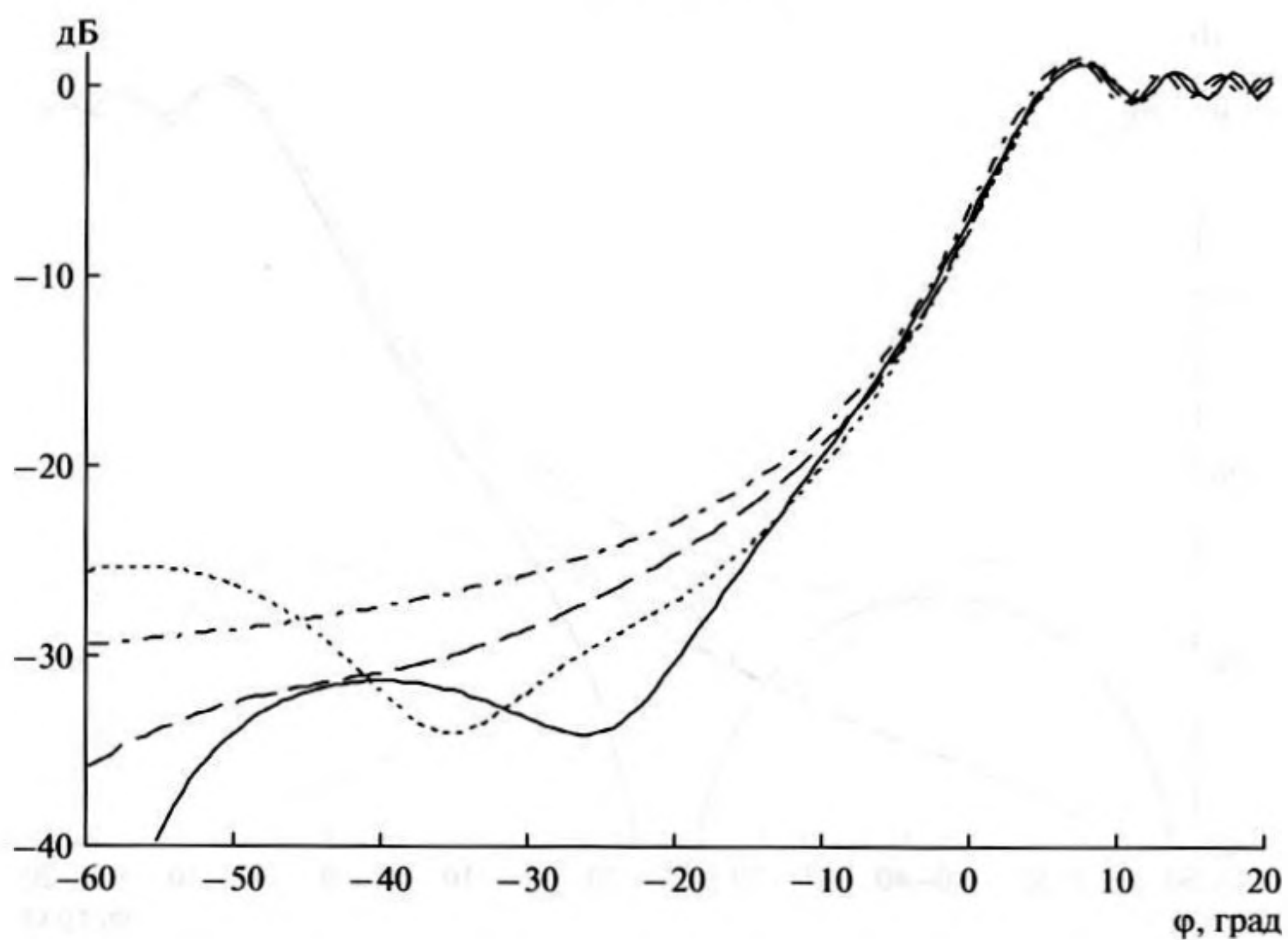


Рис. 5. То же, что и на рис. 2, при  $f = 400$  Гц,  $ka = 3.696$ ,  $N = 16$ .

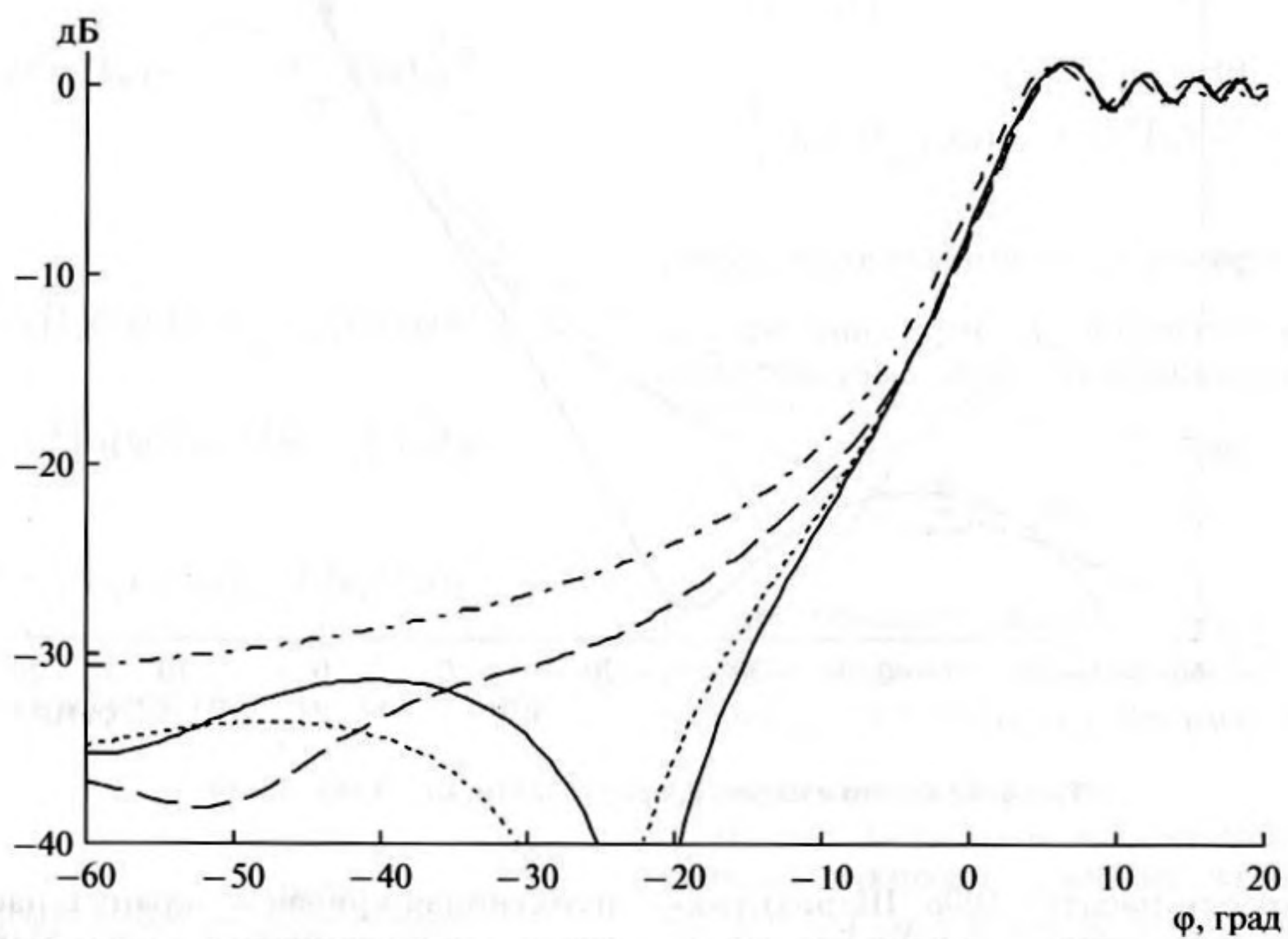


Рис. 6. То же, что и на рис. 2, при  $f = 500$  Гц,  $ka = 4.62$ ,  $N = 16$ .

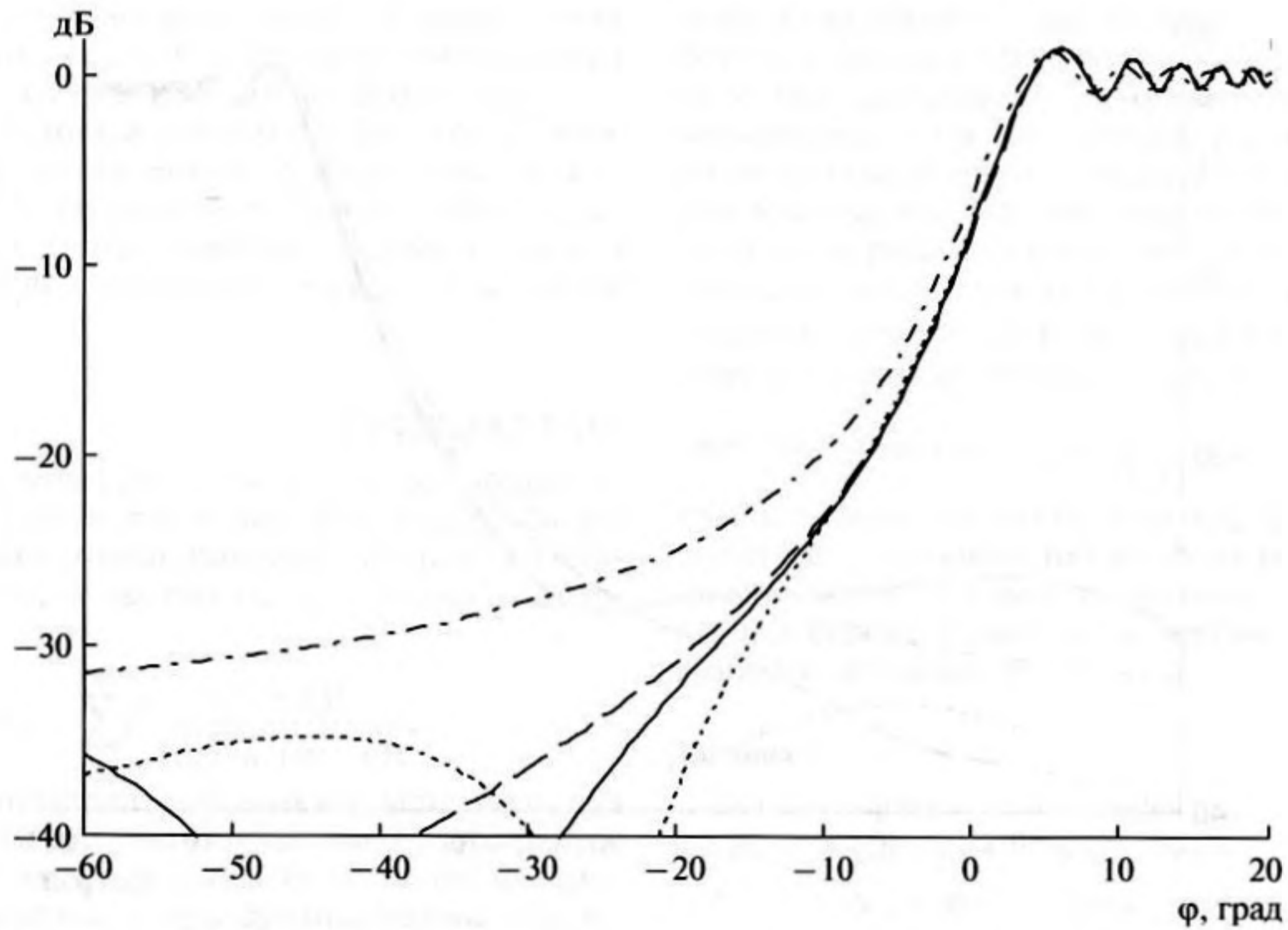


Рис. 7. То же, что и на рис. 2, при  $f = 600$  Гц,  $ka = 5.544$ ,  $N = 20$ .

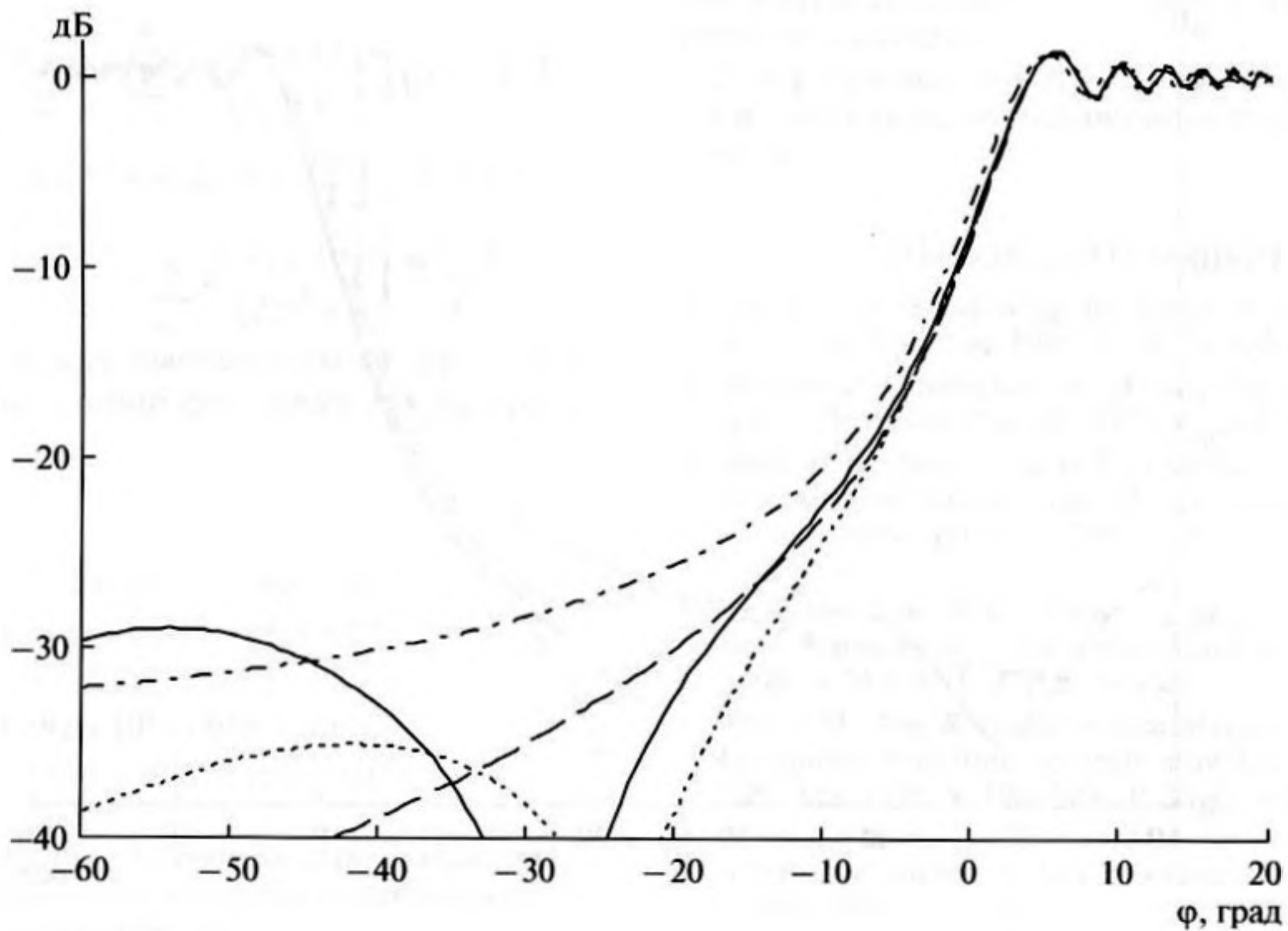


Рис. 8. То же, что и на рис. 2, при  $f = 700$  Гц,  $ka = 6.468$ ,  $N = 22$ .



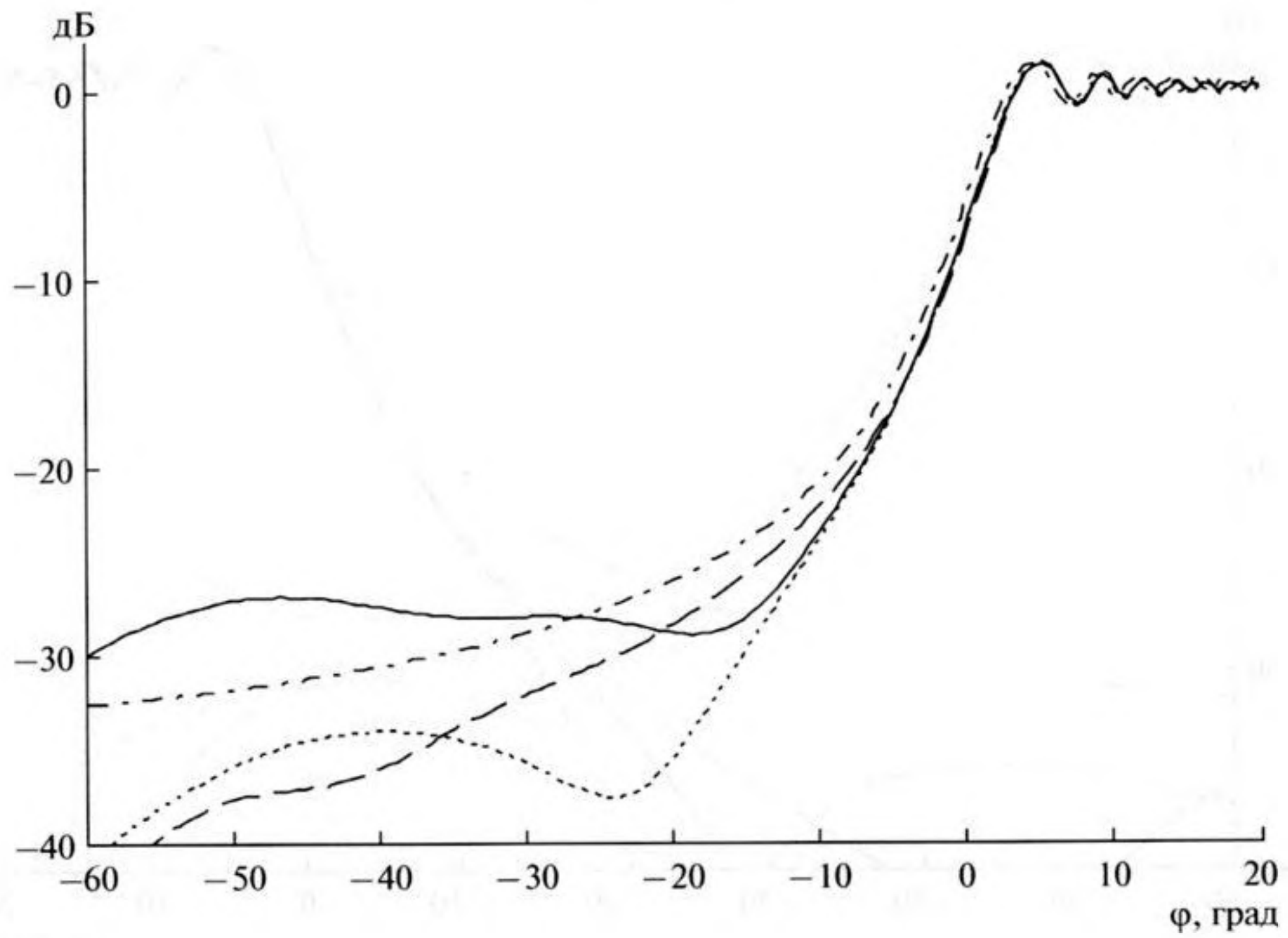


Рис. 9. То же, что и на рис. 2, при  $f = 800$  Гц,  $ka = 7.392$ ,  $N = 22$ .

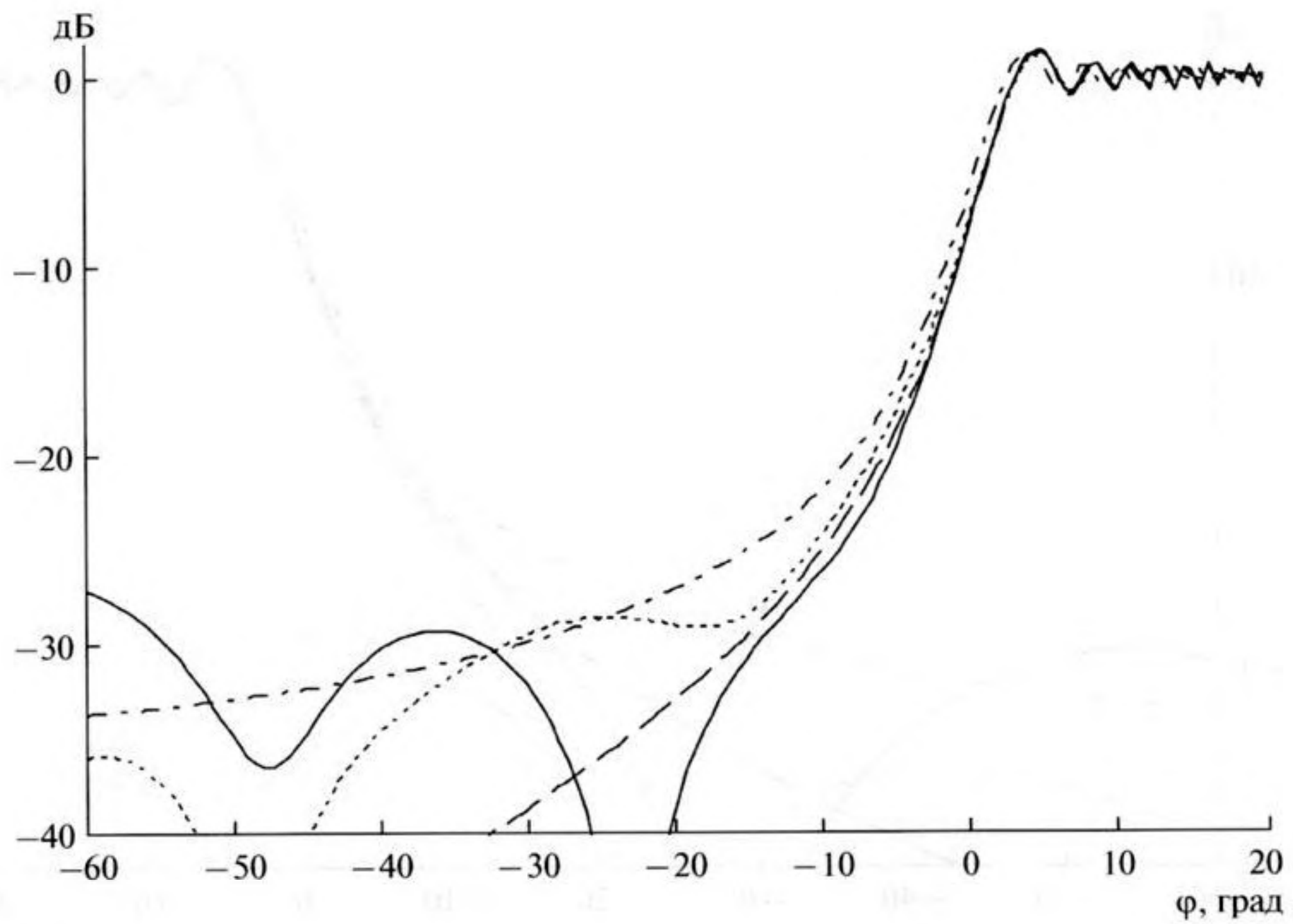


Рис. 10. То же, что и на рис. 2, при  $f = 1000$  Гц,  $ka = 9.24$ ,  $N = 24$ .

насадкой в виде веера с такой же внутренней полостью, но с осью, расположенной ниже оси насадки на расстояние  $b = 0.1a$ . В расчетах скорость звука принята равной  $c = 340$  м/с. Видно, что насадке, составленной из полос неодинаковой ширины, соответствует более глубокое затенение за экраном, особенно в самом важном диапазоне углов рассеяния звука — диапазоне малых углов.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

При численных расчетах возникают дополнительные трудности, связанные с необходимостью использования цилиндрических функций больших индексов, в частности, связанных с ними функций

$$h_m = \sum_{k=0}^m i^k \frac{(m+k)!}{(2z)^k k!(m-k)!},$$

в которых присутствуют факториалы больших чисел. При вычислении отношений этих факториалов компьютерная точность вычислений относительно невелика, а при суммировании образуются разности больших близких чисел, и поэтому точность вычислений недопустимо ухудшается. Чтобы обойти эту сложность, целесообразно сделать тождественную замену  $\frac{(m+k)!}{(m-k)!} = m(m+k) \times$

$$\times \prod_{\ell=1}^{k-1} (m^2 - \ell^2), k \geq 2.$$

При этом

$$h_m = 1 + im \left[ \frac{m+1}{2z} + \sum_{k=2}^m i^{k-1} \frac{(m+k)}{(2z)^k k!} \prod_{\ell=1}^{k-1} (m^2 - \ell^2) \right].$$

Представив здесь  $k!$  в виде  $k! = k \prod_{\ell=1}^{k-1} \ell$ , получим

$$h_m = 1 + m \left[ i \frac{m+1}{2z} + \sum_{k=2}^m i^k \frac{m+k}{(2z)^k k} \prod_{\ell=1}^{k-1} \frac{m^2 - \ell^2}{\ell} \right].$$

Разности  $\delta_m$  между вычисленными значениями по первой и по второй формулам для  $h_m$  при  $z = 7.544$  таковы

Таблица 1

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= -3.22 \times 10^{-14} - 2.665i \times 10^{-15}, \\ \delta_{20} &= 1.385 \times 10^{-8} - 2.119i \times 10^{-8}, \\ \delta_{30} &= -0.375 + 3.625i, \\ \delta_{39} &= 8.892 \times 10^8 - 3.016i \times 10^9, \\ \delta_{40} &= -1.996 \times 10^{10} - 2.215i \times 10^{10}. \end{aligned}$$

Как видно из табл. 1, они быстро возрастают с увеличением индекса, начиная с некоторого достаточно большого номера.

Последняя формула не содержит больших факториалов и ею целесообразно пользоваться при

больших индексах. Аналогично точная формула для функций Бесселя с большими полуцелыми индексами дает при компьютерных вычислениях быстро возрастающую по абсолютной величине погрешность при увеличении индекса. Поэтому целесообразно вычислять эти функции по формуле в виде степенного ряда, ограничиваясь учетом достаточно большого числа первых слагаемых. Результат вычислений при  $z = 7.544$  представлен в табл. 2. Здесь в первой колонке указаны индексы  $n$ , во второй — значения функции  $J_{n+\frac{1}{2}}(z) \sqrt{\frac{\pi z}{2}}$ , вычисленные по точной (для полуцелых индексов) формуле Ганкеля, в третьей — значения той же функции, вычисленные по формуле в виде степенного ряда с учетом первых сорока членов, в четвертой — приведены разности между ними.

Таблица 2

10	0.89	0.89	0
15	$2.369 \times 10^{-4}$	$2.369 \times 10^{-4}$	$-4.158 \times 10^{-13}$
20	$1.042 \times 10^{-7}$	$1.049 \times 10^{-7}$	$-6.665 \times 10^{-10}$
25	$-4.26 \times 10^{-6}$	$1.284 \times 10^{-11}$	$-4.26 \times 10^{-6}$
30	-0.079	0	-0.079
35	$-3.462 \times 10^3$	0	$-3.462 \times 10^3$
40	$-3.176 \times 10^8$	0	$-3.176 \times 10^8$

Из табл. 2 видно, что вычисление функций Бесселя и с большими полуцелыми индексами по формуле в виде степенного ряда сохраняет малую погрешность расчета.

Автор признателен В.В. Тютекину за обсуждение и замечания, позволившие устранить ошибки расчета.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Medwin H. Shadowing by finite noise barriers // J. Acoust. Soc. Am. 1981. V. 69. № 4. P. 1060–1064.
2. Nadeau P. Conception et efficacite des ecrans acoustique // Rev. Gen. Routes. 2002. № 803. P. 56–58.
3. Вовк И.В., Мацура И.Т., Сотникова Т.А. Об одном методе повышения эффективности шумопоглощающих барьеров // Акуст. вестн. 2006. Т. 9. № 2. С. 17–26.
4. Li K.M., Law M.K., Kwok V.P.J. Absorbent parallel noise barriers in urban environments // Sound Vibr. 2008. V. 315. № 1, 2. P. 239–257.
5. Mözer M., Volz R. Improvement of sound barriers using headpieces with finite acoustic impedance // J. Acoust. Soc. Am. 1999. V. 106. № 6. P. 3049–3060.
6. Миронов М.А., Урусовский И.А. Затухающие волны в тени цилиндра // Акуст. журн. 2002. Т. 48. № 5. С. 661–665.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1962. 1094 с.