АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2012, том 58, № 4, с. 535–548

АКУСТИЧЕСКАЯ ЭКОЛОГИЯ. ШУМЫ И ВИБРАЦИЯ

УДК 534.2.532

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА В КАНАЛЕ С ЗВУКОПОГЛОЩАЮЩЕЙ ОБЛИЦОВКОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ОДНОРОДНОГО ПОТОКА

© 2012 г. А. Ф. Соболев

Научно-исследовательский Московский комплекс ЦАГИ

105005 Москва, ул. Радио 17

E-mail: sobaf@yandex.ru

Поступила в редакцию 18.01.2012 г.

В случае двухмерного канала исследуется модальная структура акустического поля точечного источника в зависимости от адмитанса стенок канала. Исследование характеристического уравнения для определения собственных значений соответствующей краевой задачи проводится в зависимости от адмитанса, изменяющегося во всей комплексной плоскости. На основании полученной топографии характеристического уравнения представлена классификация всех без исключения мод, существующих в канале и формирующих поле источника. Получены выражения, описывающие амплитуды и пространственное распределение гидродинамических мод, скорость затухания (для устойчивых мод) или нарастания (для неустойчивых мод) в зависимости от адмитанса стенок и скорости потока. Показано, что кроме гидродинамических неустойчивых мод, существующих вниз по потоку от источника при любом адмитансе, существуют гидродинамические неустойчивые моды вверх по потоку от источника, причем они возникают только при адмитансе, имеющем характер упругости. Показано, что гидродинамические моды создаются только в том случае, когда источник находится близко к стенке или на стенке, причем амплитуда этих мод экспоненциально убывает при удалении от стенки.

Ключевые слова: двухмерный канал, функция Грина, адмитанс, характеристическое уравнение, акустические моды, гидродинамические моды, точечный источник.

ВВЕДЕНИЕ

Функция Грина играет важную роль при определении акустических полей, создаваемых заданными источниками. При правильном ее выборе для определения поля в канале достаточно проинтегрировать ее по пространству, занятому источником, с весовой функцией, описывающей этот источник. Впервые функция Грина в случае двухмерного канала с одной импедансной стенкой при наличии дозвукового потока была получена Тестером в работе [1]. Для построения функции Грина Тестер применил разработанный Л.М. Бреховских метод мнимых источников [2]. К сожалению, этот метод чрезвычайно трудно применить к каналам другой геометрии. В работе [3] для построения функции Грина в цилиндрическом канале без потока впервые был использован метод преобразования Фурье по координате, совпадающей с осью цилиндрического канала. Особенностью этого метода является то, что при построении функции Грина не требуется ортогональности собственных функций соответствующей краевой задачи. Этот метод оказался настолько эффективным, что позволил без особого труда построить функции Грина в каналах более сложной геометрии. В частности, это цилиндрический канал с импедансной стенкой при наличии потока [4], плоский канал с неодинаковым импедансом стенок при наличии потока [5, 6], плавно неоднородный цилиндрический канал с импедансной стенкой и потенциальным дозвуковым потоком [7], плавно неоднородный цилиндрический канал с потоком и пограничным слоем [8]. Подобный метод был использован в работе [9] для построения функции Грина в цилиндрическом и кольцевом каналах с импедансными стенками при наличии однородного дозвукового потока. Несмотря на различную форму записи акустических волн, формальное решение для функции Грина в цилиндрическом канале, полученное в этой работе, соответствует решению, полученному в более ранней работе [4]. Как правило, формальное решение представляется в виде бесконечной суммы мод, удовлетворяющих соответствующим импедансным граничным условиям в форме Майерса [10]. Основная проблема при практическом вычислении акустических полей с помощью функции Грина заключается в определении всех без исключения собственных значений соответствующей краевой задачи и в пра-

вильной интерпретации соответствующих мод по направлениям их распространения по потоку или против потока. Это тем более важно в случае так называемых гидродинамических мод (устойчивых и неустойчивых), исследованию которых в последнее время уделяется достаточно пристальное внимание [11–16]. В данной работе в частном случае двухмерного канала исследуется модальная структура акустического поля в зависимости от адмитанса стенок канала. Исследование характеристического уравнения (ХУ) для определения собственных значений соответствующей краевой задачи проводится в зависимости от адмитанса, изменяющегося во всей комплексной плоскости, а не только в полуплоскости, в которой действительная часть адмитанса положительна. Добавление адмитанса, не имеющего "физического смысла", дает возможность получить более четкое представление о расположении корней характеристического уравнения на комплексной плоскости собственных значений осевого волнового числа в зависимости от адмитанса. На основании полученной топографии ХУ представлена классификация всех без исключения мод, существующих в канале и формирующих поле источника.

Большой интерес с точки зрения понимания того места, которое они занимают в общей структуре поля, представляют упомянутые выше гидродинамические моды. В данной работе получены выражения, описывающие амплитуды и пространственное распределение этих мод, скорость затухания (для устойчивых мод) или нарастания (для неустойчивых мод) в зависимости от адмитанса и скорости потока. Показано, что кроме гидродинамических неустойчивых мод, существующих вниз по потоку от источника, существуют гидродинамические неустойчивые моды вверх по потоку от источника.

ТОПОГРАФИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим двухмерный канал с разным импедансом противоположных стенок, ориентированный вдоль оси x, с однородным потоком $M = V_0/c$, где V_0 – скорость потока, c – скорость звука. Предположим, что поле в этом канале возбуждается гармоническим точечным источником следующего вида

$$q = A_0\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\exp(-i\omega t). \quad (1)$$

Конвективное волновое уравнение с правой частью в виде (1) для независимой от времени части акустического поля имеет вид [5]

$$\nabla^2 p - \left(-i\frac{\omega}{c} + M\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 p = -q, \quad (2)$$

где $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, A_0 – начальная амплитуда.

Граничные условия записываются в следующем виде

$$\left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_{y=H,0} = \pm ik\beta_{1,2}\left(1 - \frac{M}{ik}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 p\Big|_{y=H,0}, \quad (3)$$

где β_1 – удельный (отнесенный к ρc воздуха) адмитанс стенки при $y = H$, β_2 – удельный адмитанс стенки при $y = 0$, знак $(\pm)$ относится к условиям соответственно при $y = H,0$, $k = \omega/c$ – волновое число. В работе [6] показано, что решение краевой задачи (1)–(3) имеет следующий вид

$$p = A_0\frac{i}{kH}\times$$
$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\chi_n y_0 - \varphi_n)\cos(\chi_n y - \varphi_n)\exp\left(i\xi_n(x - x_0)\right)}{q_n D_n}, \quad (4)$$

где

$$D = 1 - \left(1 - \chi\frac{S'_\chi}{S}\right)\frac{(G_1 + G_2)(1 + G_1G_2)}{\chi H\left(1 + G_2^2\right)\left(1 + G_1^2\right)},\ G_{1,2} = \frac{ik\beta_{1,2}S}{\chi},$$

$$q = \sqrt{1 - \frac{\chi^2(1 - M^2)}{k^2}},\ \mathrm{tg}(\varphi) = -G_2,$$

$$S = (1 - M\xi/k)^2,\ S'_\chi = dS/d\chi,\ k = \omega/c.$$

Собственные значения ξ и χ определяются из системы уравнений

$$F(\xi) = \mathrm{tg}(\chi H) + \frac{G_1 + G_2}{1 - G_1G_2} = 0, \quad (5)$$

$$\chi^2 = (k - M\xi)^2 - \xi^2. \quad (6)$$

Из выражений (4)–(6) следует, что определение поля точечного источника фактически сводится к решению характеристического уравнения (5) с учетом (6).

При разработке процедуры поиска корней этого уравнения чрезвычайно полезно иметь представление о его топографии, т.е. иметь представление о расположении всех корней ξ на комплексной плоскости в зависимости от всей бесконечной совокупности адмитансов стенок. В отсутствии потока такие диаграммы для цилиндрического и плоского канала с одной жесткой стенкой впервые были получены в работах Морза [17]. Тогда эти диаграммы имели и важное прикладное значение, поскольку фактически одной диаграммы было достаточно, чтобы определить осевые собственные значения при любых заданных адмитансе и частоте звука. Значительно сложнее обстоит дело при наличии потока. В этом случае необходимо строить диаграммы при каждом изменении скорости потока и адмитанса второй стенки (в случае плоского и кольцевого каналов). В настоящее время при наличии хороших программ численного решения ХУ такие диаграммы не имеют такого самостоятельного значения, однако дают общую картину и позволяют судить об эффективности вы-

числительной процедуры, на основе которой они фактически и строятся.

Характеристическое уравнение $F(\chi(\xi),\xi,\beta_1,\beta_2) = 0$ для любого случая канала можно рассматривать как конформное отображение $\xi = \xi(\beta_1)$ или $\chi = \chi(\beta_1)$ комплексной плоскости адмитанса β_1 на комплексную плоскость корней ξ или χ при наличии комплексного параметра β_2. Можно рассматривать, наоборот, $\xi = \xi(\beta_2)$, $\chi = \chi(\beta_2)$ с комплексным параметром β_1. В частных случаях (цилиндрический канал, двухмерный канал с одинаковым импедансом стенок) этот параметр может отсутствовать. В общем случае это многозначные функции. Для выделения регулярных ветвей этих функций следует определить все особые точки, выявить их характер и провести разрезы в комплексной плоскости адмитанса. Нам удобно провести разрезы вдоль лучей $\varphi = \text{const}$, где $\beta = |\beta|\exp(i\varphi)$, начинающиеся в особых точках и заканчивающиеся на бесконечности.

При конформном отображении комплексной плоскости $\nu = \chi/k$ на комплексную плоскость $\mu = \xi/k$ надо учитывать обе ветви функции $\mu(\nu)$

$$\mu = \frac{-M \pm \sqrt{1-\nu^2(1-M^2)}}{1-M^2}. \qquad (7)$$

Поскольку нами принята запись звуковых волн следующего вида $p \sim \exp(i(\xi x - \omega t))$, следовательно, значениям ξ, расположенным в верхней полуплоскости комплексной плоскости ξ, соответствуют волны, затухающие в положительном направлении оси x (по потоку) и нарастающие в обратном направлении, а значениям ξ, расположенным в нижней полуплоскости комплексной плоскости ξ, соответствуют волны, нарастающие по потоку и затухающие против потока. Не столь очевиден ответ на вопрос о направлении распространения звуковых волн, поскольку оно не определяется однозначно знаком $\mathrm{Re}(\xi)$. Тем не менее, для определенности принимаем пока, что решения ξ, расположенные в первом квадранте комплексной плоскости ξ, соответствуют затухающим волнам, распространяющимся в положительном направлении оси x; решения ξ, расположенные во втором квадранте, соответствуют нарастающим волнам, распространяющимся в обратном направлении; решения, расположенные в третьем квадранте, соответствуют затухающим волнам, распространяющимся в отрицательном направлении оси канала; решения ξ, расположенные в четвертом квадранте, соответствуют нарастающим волнам, распространяющимся в положительном направлении. Фактические области расположения корней ХУ на комплексной плоскости μ в зависимости от адмитанса стенок канала определятся в дальнейшем.

Характер поведения корней ХУ вблизи некоторой точки $\xi = \xi_0\left(\beta_1^0\right)$ определяется из анализа разложения в ряд Тейлора этой функции в окрестности рассматриваемой точки $\beta_1^{(0)}$. Это может быть регулярная точка, точка ветвления второго порядка (цилиндрический канал, двухмерный канал с одинаковым адмитансом стенок или с одной адмитансной стенкой), точка ветвления третьего порядка (двухмерный канал с разным адмитансом стенок или кольцевой канал) [6]. В особых точках происходит слияние соответственно двух и трех корней ХУ. Условие слияния корней можно рассматривать как возможный способ оптимизации затухания звука в канале.

Трансцендентное уравнение для определения особых точек ХУ в плоском канале, соответствующих точкам ветвления второго порядка при $\beta_1 \neq \beta_2$, имеет следующий вид [6]

$$\frac{1}{\cos^2(z)} + \frac{\mathrm{tg}(z)(1 - zS'/S)\left[1 - 2G_2\,\mathrm{tg}(z) - G_2^2\right]}{z(1+G_2^2)} = 0, \qquad (8)$$

где $G_{1,2} = i\beta_{1,2}S/\nu$, $S = (1-\mu M)^2$, $\nu = \chi/k$, $\mu = \xi/k$, $S' = \partial S/\partial z$, $z = \chi H$.

В этом уравнении β_2 играет роль комплексного параметра и задается произвольно. Адмитанс β_1 определяется из исходного ХУ

$$G_1 = -\frac{G_2 + \mathrm{tg}(z)}{1 - G_2\,\mathrm{tg}(z)}. \qquad (9)$$

В частном случае $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ (8) распадается на два уравнения

$$G^{(0)} = -\mathrm{tg}(z/2),\ G^{(0)} = \mathrm{ctg}(z/2).$$

Если эти соотношения подставить в (8), то оно переходит в уравнения следующего вида

$$\chi H \pm \sin(\chi H)(1 - \chi S'/S) = 0. \qquad (10)$$

Верхний знак в (10) соответствует симметричным модам, а нижний знак – антисимметричным модам. В уравнении (10) следует учитывать обе ветви $\mu(\nu)$.

На рис. 1 представлены результаты расчета особых точек второго порядка на комплексной плоскости μ, соответствующих симметричным модам двухмерного канала при заданных параметрах: $kH = 10.639$, $M = 0.5$. Расчетные точки, представленные на этом рисунке, можно условно разделить на четыре группы в соответствии с направлением распространения соответствующих мод и выбором ветви $\mu(\nu)$ в формуле (7). На рис. 2 показаны особые точки на комплексной плоскости β, соответствующие особым точкам на рис. 1. Для удобства идентификации мод точки, соответствующие каждой выделенной группе, соединены кривыми. Стрелками показано направление увеличения номера мод. Особая точка $\beta = 0$ и соответствующие значения $\mu = \pm 1/(1 \pm M)$ на этих рисунках не показаны. Следует обратить внимание на две особые точки $\beta = -0.09i$ и $\beta = -0.294i$ на

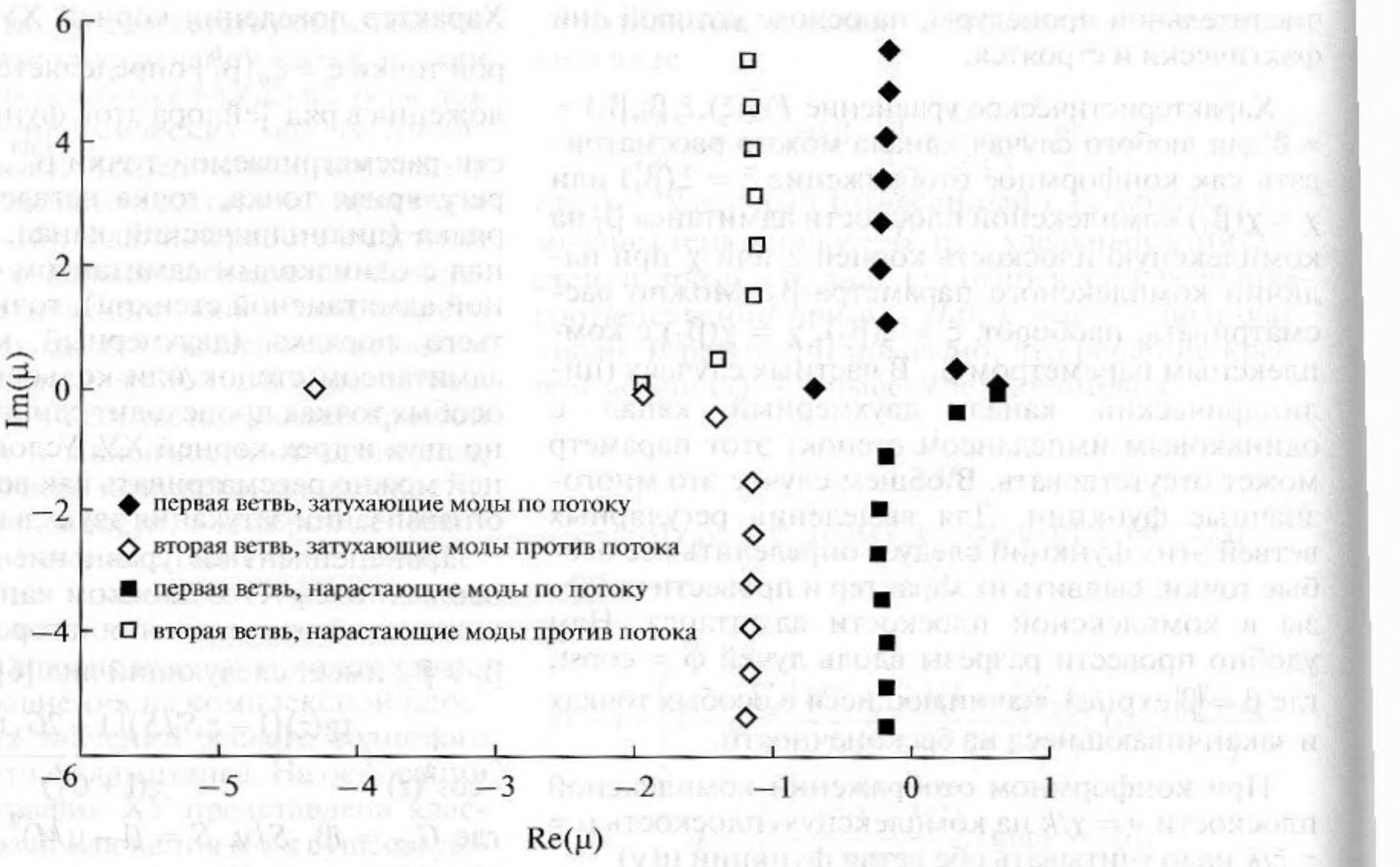

Рис. 1. Расположение особых точек на комплексной плоскости μ, соответствующих точкам ветвления второго порядка при $kH = 10.639$ и $M = 0.5$.

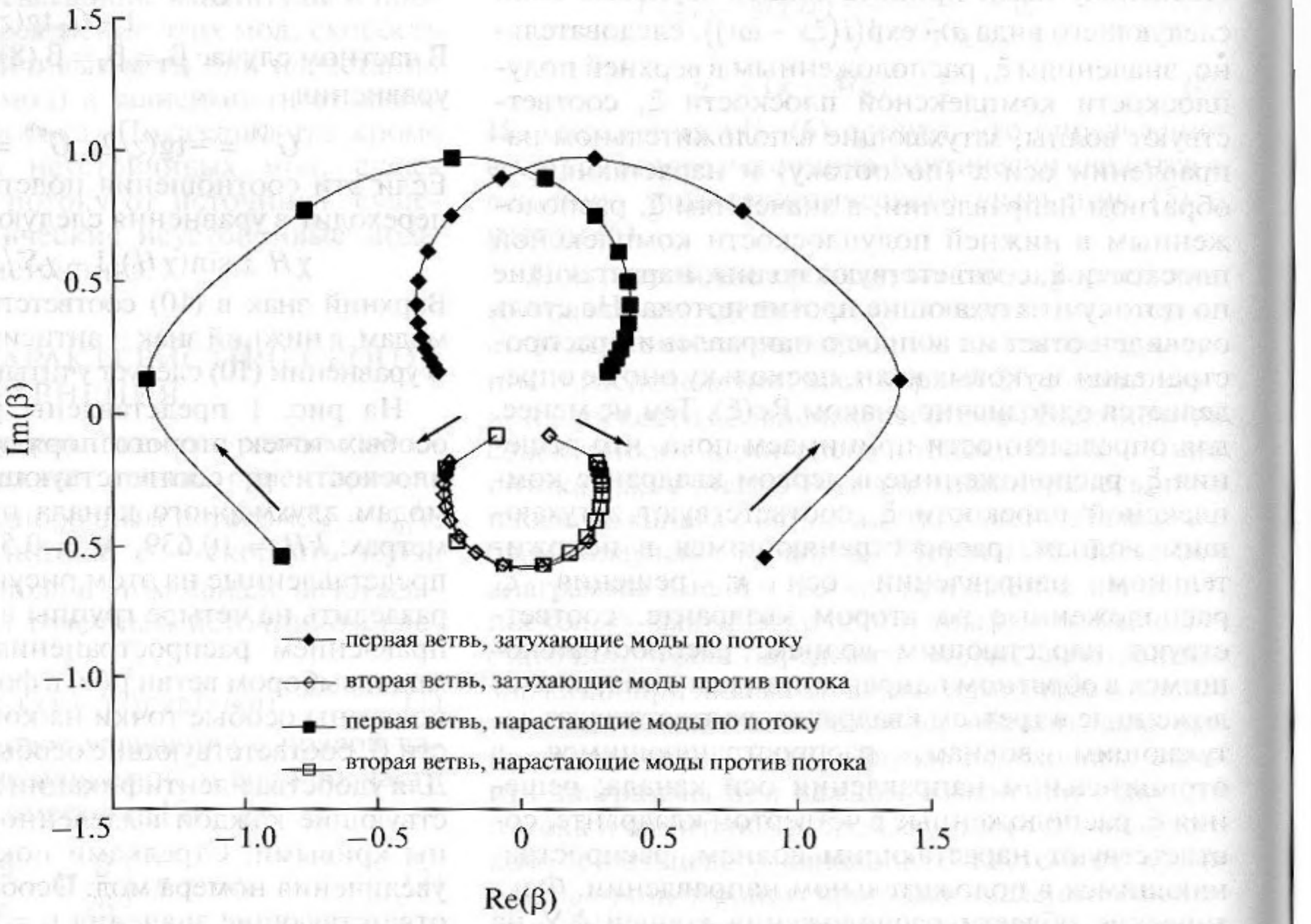

Рис. 2. Расположение точек ветвления второго порядка на комплексной плоскости адмитанса, соответствующих двойным симметричным модам при $kH = 10.64$ и $M = 0.5$.

рис. 2, обе соответствующие чистой упругости, которым соответствуют точки $\mu = -0.70$ и $\mu = -4.31$ на рис. 1. Нетрудно сообразить, что первая точка из этих двух является корневой точкой ветвления функции $\mu(\nu)$. Что касается второй особой точки, то ее значение зависит от числа Маха и практически не зависит от волнового числа. При стремлении числа Маха к нулю эта точка уходит на минус бесконечность по действительной оси, а адмитанс – на минус бесконечность по мнимой оси.

Из рис. 2 видно, что особые точки для первой и второй ветви, соответствующие модам, распространяющимся как по потоку, так и против потока, расположены симметрично относительно мнимой оси. Особые точки β_n, соответствующие особым точкам μ_n, расположенным в правом верхнем квадранте на рис. 1, при увеличении номера n перемещаются из четвертого квадранта (адмитанс упругого типа) в первый (адмитанс массового типа) и далее во второй квадрант (в котором $\mathrm{Re}\beta < 0$) и, таким образом, вся бесконечная совокупность особых точек сосредоточивается во втором квадранте. Как было отмечено выше, эти точки соответствуют волнам, распространяющимся в положительном направлении и затухающим в этом направлении. Легко можно показать, что при $n \to \infty$ $|\beta_n| \to 0$, $\arg(\beta_n) \to \pi$. Аналогично, особые точки β_n, соответствующие особым точкам μ_n, расположенным в левом нижнем квадранте на рис. 1, при увеличении номера перемещаются из четвертого квадранта в третий (в котором $\mathrm{Re}\beta < 0$) и там сосредотачиваются. Причем, при $n \to \infty$ $|\beta_n| \to 0$, $\arg(\beta_n) \to -\pi$. Эти точки соответствуют волнам, распространяющимся в отрицательном направлении и затухающим в этом направлении. Расположение особых точек во втором и третьем квадранте плоскости β (где $\mathrm{Re}\beta < 0$) при $M > 0$, казалось бы, должно соответствовать модам, нарастающим в направлении своего распространения. В действительности же эти моды являются затухающими (однако для них $\mathrm{Re}(\xi_n) < 0$). Противоречие разрешается, если воспользоваться выражением для потока энергии в канале [18], из которого следует, что для сильно неоднородных мод поток энергии пропорционален величине $\Pi \approx M\,\mathrm{Re}\left(i\beta(1-\mu M)\right)/kH$. Расчеты показывают, что величина Π всегда положительна для мод, затухающих в направлении своего распространения, независимо от степени неоднородности моды.

С целью более подробного изучения второй особой точки, о которой упоминалось выше, вернемся к ХУ для симметричных мод, которое запишем в виде

$$\beta = \frac{i\nu\,\mathrm{tg}\left(\nu kH/2\right)\left(1-M^2\right)^2}{\left(1 \mp M\sqrt{1-\nu^2(1-M^2)}\right)^2}, \qquad (11)$$

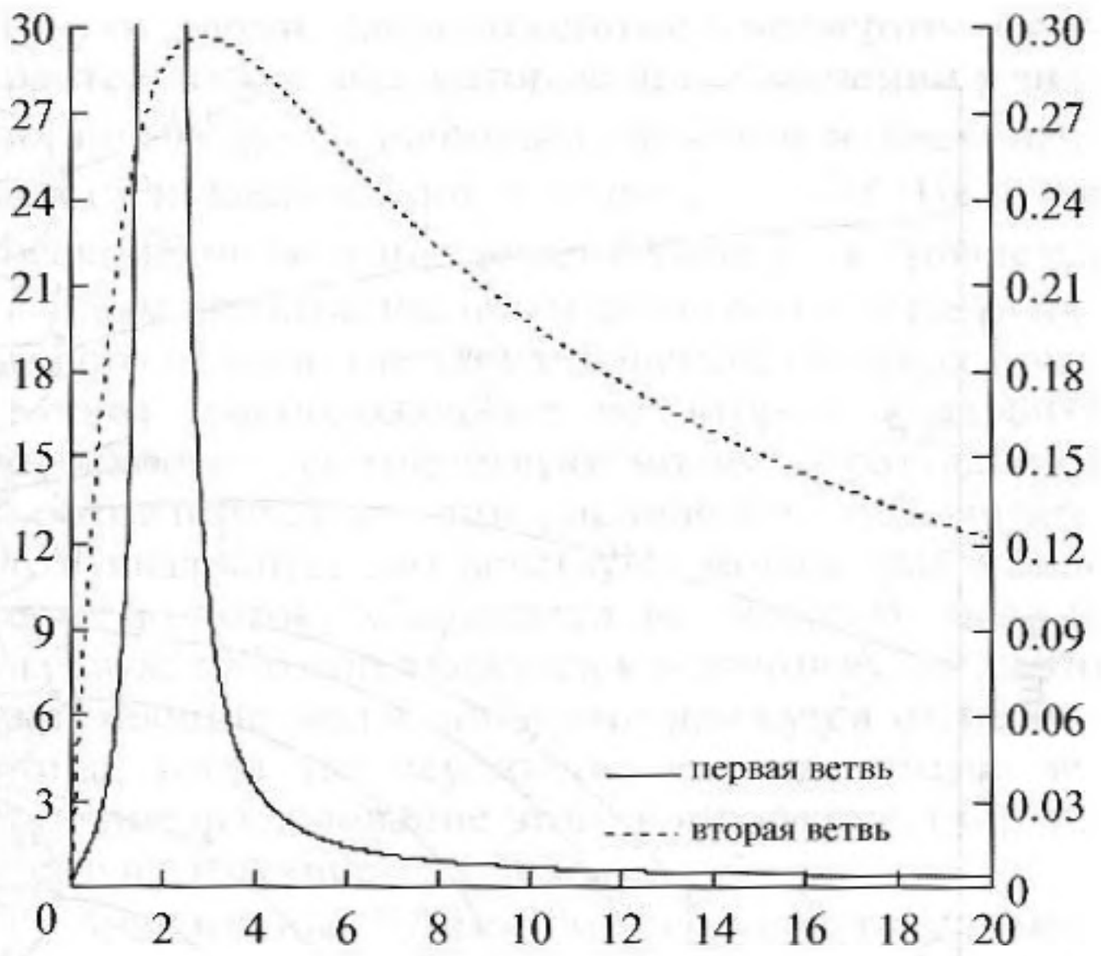

Рис. 3. К графическому определению мнимых корней ХУ.

где верхний знак перед корнем соответствует первой ветви, а нижний – второй. Для определения чисто мнимых корней этого уравнения полагаем $\nu = \pm ix$. В результате получим $\beta = -if(x)$, где

$$f(x) = \frac{x\,\mathrm{th}\left(xkH/2\right)\left(1-M^2\right)^2}{\left(1 \mp M\sqrt{1+x^2(1-M^2)}\right)^2}. \qquad (12)$$

На рис. 3 представлены графики функции $f(x)$, соответствующие первой и второй ветви. Пересечение графика горизонтальной прямой дает для обеих ветвей два решения x и, соответственно, β. В случае первой ветви для любого β, изменяющегося от нуля до ∞ вдоль отрицательной мнимой оси, существует два корня. Один из корней изменяется от нуля и асимптотически приближается к двум слева, а второй корень изменяется от ∞ и асимптотически приближается к двум справа. Ниже будет показано, что это точка $1/M$. В случае второй ветви два действительных решения существуют только в интервале $0 < |\beta| < 0.294$. При $|\beta| \to 0.294$ оба корня сливаются с образованием двойного корня $x = 2.94$. При $|\beta| \to 0$ один корень стремится к нулю, а второй к ∞. Оказывается, что существуют корни, стремящиеся к бесконечности, также и при комплексных β, таких что $|\beta| \to 0$.

Наличие бесконечно больших корней при $|\beta| \to 0$ является принципиальной особенностью канала с потоком. Для случая $kH = 10.639$, $M = 0.5$ был проведен расчет 10 корней ХУ при изменении $|\beta|$ в пределах $0.01 \le |\beta| \le 8$ с шагом 0.01 для каждого фиксированного значения аргумента β ($\beta = |\beta|\exp(i\varphi)$) в диапазоне $-\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$ с ша-

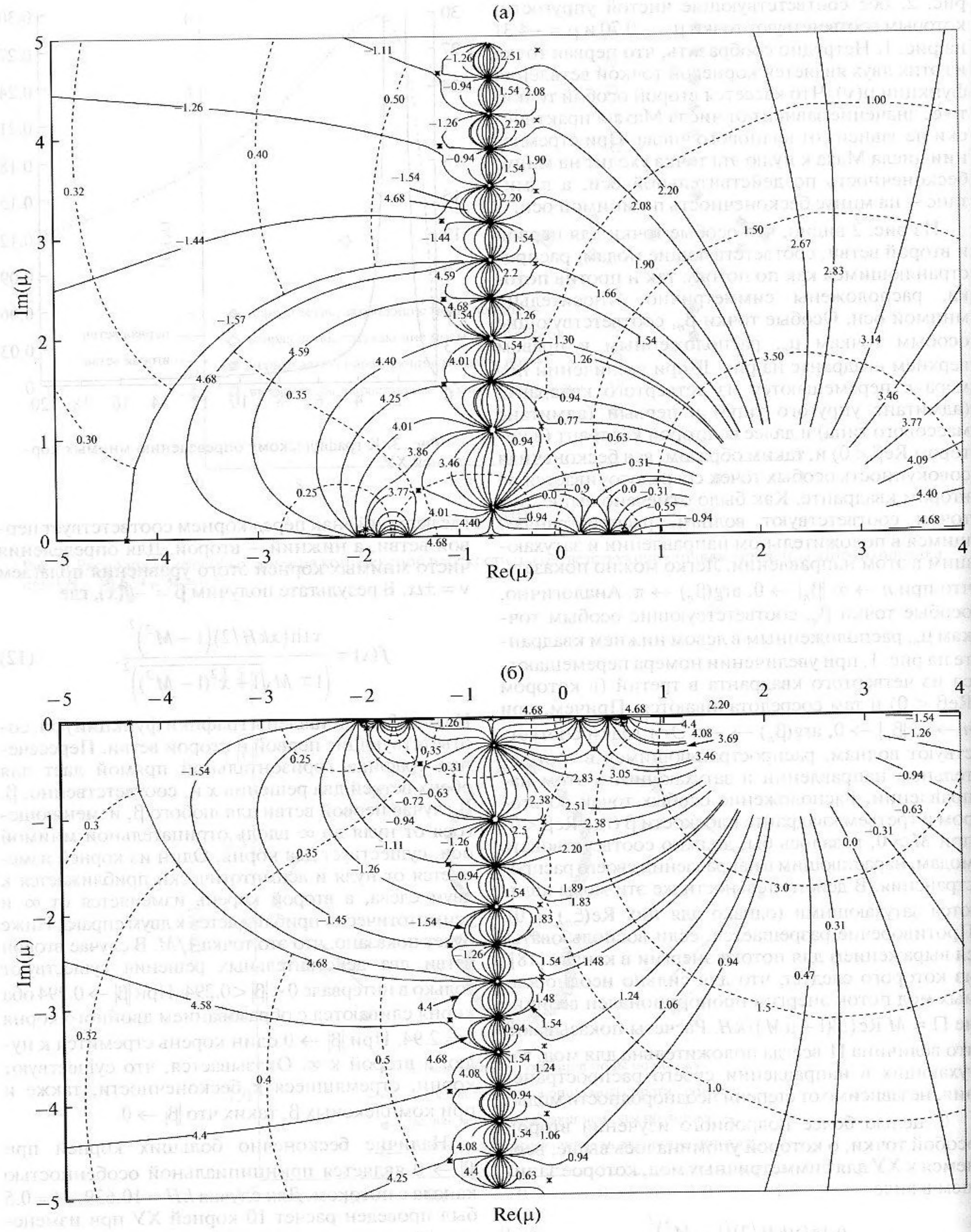

Рис. 4. Траектории корней, соответствующие первой (а) и второй (б) ветви функции μ(ν).

гом $\Delta\varphi = \pi/10 = 0.31$. Также был проведен расчет корней ХУ вдоль линий на комплексной плоскости β, проходящих вблизи особых точек. На рис. 4а, 4б сплошными кривыми представлены траектории корней на комплексной плоскости μ, образуемые при изменении $|\beta|$ от 0.01 до 8 вдоль линии с фиксированным φ, соответствующие первой и второй ветви $\mu(\nu)$. Вместе оба эти рисунка представляют единое конформное отображение многолистной поверхности β на комплексную плоскость μ. Штриховыми линиями показаны некоторые кривые, соответствующие постоянным значениям $|\beta|$, которые дают представление о фактических значениях адмитанса в некоторых областях на плоскости μ. К сожалению, все кривые привести невозможно из-за существенно различного масштаба изменения корней в разных областях плоскости μ. Из рис. 4а, 4б видно, что при изменении $|\beta|$ от нуля до бесконечности при всех φ $-\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$ корни ХУ движутся по траекториям, которые в основном начинаются в точках, соответствующих абсолютно жестким стенкам, а заканчиваются в зависимости от аргумента β в точках, соответствующих или абсолютно мягким стенкам, или в точке $\mu = 1/M$. Вторая возможность является следствием наличия конвективного члена $(1 - \mu M)^2$, умноженного на адмитанс в ХУ. Чтобы корни имели конечное значение при $|\beta| \to \infty$, необходимо, чтобы $\mu \to 1/M$. Это обстоятельство также является принципиальным отличием от случая нулевого потока, когда соответствующие значения μ стремятся к бесконечности. Наличие корней, существующих при $M > 0$, таких что $\mu\big|_{\beta\to\infty} = 1/M$, наводит на мысль, что такие моды уже не являются акустическими и скорее всего это гидродинамические моды. К сожалению, весьма трудно найти границу возникновения этих мод, поскольку при малых β их поведение ничем не отличается от поведения обычных акустических мод.

Из рис. 4а видно, что для адмитанса с положительной действительной частью в диапазоне аргумента β $-\pi/2 < \varphi < 0$, т.е. для адмитанса упругого типа существуют корни, расположенные во втором квадранте плоскости μ, которые начинают движение из бесконечности и заканчивают его в точках, соответствующих абсолютно мягким стенкам. В частности, при движении в плоскости β от 0 до точки $\beta = -i0.294$ по отрицательной мнимой оси соответствующий корень на плоскости μ движется из бесконечности в точку $\mu = -4.31$. При дальнейшем движении по мнимой оси в плоскости β образуются два комплексно сопряженных корня, что полностью согласуется с результатами, представленными на рис. 3. Аналогично в диапазоне изменения аргумента адмитанса $0 < \varphi < \pi/2$, т.е. для адмитанса массового типа (рис. 4б) существуют корни, расположенные в четвертом квадранте плоскости μ, которые при изменении в диапазоне $0 < |\beta| < \infty$, начинают движение из бесконечности и заканчивают в точке $\mu = 1/M$. Наличие бесконечно больших решений при $|\beta| \to 0$ является вторым принципиальным отличием от случая нулевого потока, где таких решений не существует. Корни, расположенные во втором квадранте плоскости μ, соответствуют модам, нарастающим против потока, а корни, расположенные в четвертом квадранте, соответствуют модам, нарастающим по потоку. Следовательно, может быть одно из двух: либо они движутся к источнику, тогда это затухающие моды, либо они движутся от источника, тогда это неустойчивые моды. Более детальное исследование этого вопроса будет проведено в следующем разделе.

Аналогичный эффект можно увидеть для мод, соответствующих адмитансу с отрицательной действительной частью. Существуют траектории, соответствующие диапазону аргументов β $\pi < \varphi < 3\pi/2$ (рис. 4а), расположенные в правом верхнем квадранте плоскости μ, которые начинаются на бесконечности и заканчиваются в точке $\mu = 1/M$, а также траектории, соответствующие диапазону аргументов β $3\pi/2 < \varphi < 2\pi$ (рис. 4б), расположенные в нижнем левом квадранте плоскости μ, которые начинаются на бесконечности и заканчиваются в точке, соответствующей абсолютно мягким стенкам. Следовательно, соответствующие моды либо движутся к источнику и нарастают, либо движутся от источника и затухают.

Из приведенного выше анализа видно, что в случае пассивного адмитанса ($\mathrm{Re}(\beta) > 0$) в классических областях размещения корней – это первый квадрант для мод, распространяющихся вниз по потоку от источника, и третий квадрант для мод, распространяющихся вверх по потоку от источника решения, существуют только в ограниченных областях. На основе проведенного анализа можно предложить следующую классификацию акустических мод, соответствующих $\mathrm{Re}(\beta) > 0$:

а) однородные моды – распространяются от источника, затухают в направлении распространения;

б) неоднородные моды – затухают в направлении своего распространения независимо от аргумента β. Это является следствием запирающих свойств канала, который не пропускает моды независимо от адмитанса стенок канала;

в) гидродинамические моды – распространяются от источника (предположение).

Однородные и неоднородные моды располагаются в относительной близости соответственно к оси абсцисс и к вертикальной прямой $\mu = -M/(1 - M)^2$. Общее правило здесь заключается в том, что при полном обходе предельных точек на плоскости μ, соответствующих $\beta = 0$ и $\beta = \infty$,

аргумент β изменяется от 0 до 2π. Исключением является точка $\mu = 1/M$. При полном обходе этой точки аргумент β изменяется на 4π. Остальную весьма значительную область комплексной плоскости μ занимают гидродинамические моды. Гидродинамическими их можно назвать потому, что в силу больших значений μ по абсолютной величине не соответствующие моды имеют малую фазовую скорость, которая может быть меньше не только скорости звука, но и скорости потока. Вниз по потоку от источнику существуют такие моды с $\mathrm{Im}(\mu) > 0$ (затухающие) и $\mathrm{Im}(\mu) < 0$ (нарастающие), вверх по потоку от источника существуют только моды с $\mathrm{Im}(\mu) > 0$.

ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

В предыдущем разделе на численном примере для одного частного, но важного случая двухмерного канала с одинаковым адмитансом стенок было показано, что для пассивного адмитанса ($\mathrm{Re}(\beta) > 0$) существуют решения ХУ, которые на первый взгляд не укладываются в существующие представления об акустических модах. В частности, это решения, расположенные в 4-м и во 2-м квадрантах комплексной плоскости μ. В 4-м квадранте решения существуют главным образом при больших β, таких что $-\pi/2 < \arg(\beta) < \pi/2$. Во втором квадранте решения существуют при малых β, таких что $-\pi/2 < \arg(\beta) < 0$. Для мод, соответствующих этим решениям, справедливо одно из двух: либо они распространяются от источника и нарастают, либо они распространяются по направлению к источнику и затухают. Характерным для этих мод является то, что собственные значения имеют, как правило, достаточно большую мнимую составляющую. В интересующих нас частях комплексной плоскости μ с хорошей степенью точности можно считать, что $|\mathrm{Im}(\chi H)| > 1.5$. В этом случае в ХУ (5) можно положить $\mathrm{tg}(\chi H) = \pm i$. Отсюда следует, что

$$1 \pm i(G_1 + G_2) - G_1 G_2 = 0, \qquad (13)$$

где $G_{1,2}(\mu) = i\beta_{1,2}S(\mu)/\nu(\mu)$. Эта система уравнений распадается на два независимых уравнения

$$G_1 = \pm i, \quad G_2 = \pm i. \qquad (14)$$

Соотношения (14) означают, что существуют области значений адмитанса, для которых найдется две пары мод, каждая из которых определяется адмитансом "собственной" стенки и не чувствует наличия второй стенки. Из соотношений (14) видно, при $\beta_1 \to \beta_2$ корни сближаются и в пределе получаются два совершенно одинаковых корня. Возникает вопрос, что происходит с соответствующими модами. Очевидно, что они не преобразуются в двойную моду, поскольку при этом сближении на адмитанс не накладывается никаких условий. В то же время моды по своей структуре не должны быть совершенно одинаковыми даже при одинаковых корнях ХУ.

С целью получения приближенных решений уравнений (14) возведем каждое из уравнений (14) в квадрат и выразим его относительно μ. В результате после некоторых преобразований получим представленное в каноническом виде уравнение четвертой степени

$$x^4 - 4x^3 + \left[6 + \frac{Z^2(1-M^2)}{M^2}\right]x^2 - 4\left(1 - \frac{Z^2}{2}\right)x + 1 - Z^2 = 0, \qquad (15)$$

где $x = \mu M$, $Z = 1/\beta$ (индекс опущен). Вначале рассмотрим случай малых $Z < \sqrt{2}$. В этом случае уравнение (15) допускает следующие решения

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{M} - \frac{iZ}{2M^2} \pm \frac{\sqrt{(2M - iZ)^2 - 4M^2\sqrt{1-Z^2}}}{2M^2}, \qquad (16)$$

$$\mu_{3,4} = \frac{1}{M} + \frac{iZ}{2M^2} \pm \frac{\sqrt{(2M + iZ)^2 - 4M^2\sqrt{1-Z^2}}}{2M^2}. \qquad (17)$$

Численные расчеты показывают, что при $M > 0$ исходному уравнению удовлетворяют только первые два решения, а при $M < 0$ – вторые два. При этом корни, удовлетворяющие исходному уравнению при $M < 0$, равны со знаком минус корням при $M > 0$. Учитывая, что при одновременной замене M на $-M$ и μ на $-\mu$ исходное ХУ не меняется, можно утверждать, что это одни и те же решения. Таким образом, при больших значениях адмитанса β существуют фактически два решения, определяемые выражением (16), справедливые при любом $M > 0$. Одно из этих решений располагается в первом квадранте комплексной плоскости μ, а второе располагается в 4-м квадранте (см. рис. 4а, 4б). Интуитивно ясно, что появление решений (16) связано с наличием конвективного члена $(1 - \mu M)^2$ в ХУ. Из него видно, что при $\beta \to \infty$ наряду с другими должен существовать корень, такой что $\mu \approx 1/M$, поскольку $\mathrm{tg}(\chi H)$ при комплексных χ конечная величина. И действительно, характер приближенного решения (16) соответствует этому предположению. При $Z \to 0$ оба решения стремятся к одному пределу $\mu_{1,2} \to 1/M$ (см. рис. 4а, 4б).

Определим, чему равен предел выражения (16) при $M \to 0$. После простых алгебраических преобразований получим

$$\lim_{M\to 0} \mu_1 = \sqrt{1-\beta^2}, \qquad (18)$$

$$\lim_{M\to 0} \mu_2 = \frac{2}{M} - \frac{iZ}{M^2} - \sqrt{1-\beta^2}. \qquad (19)$$

Выражение (18) совпадает с непосредственным решением уравнений (14) при $M = 0$. Решение (19) стремится к бесконечности. При этом становится очевидным, что при выполнении условия $\mathrm{Re}(Z) >$

> 0 (импеданс пассивного типа) μ имеет отрицательную мнимую часть. Это означает, что волна, соответствующая данной моде, является либо экспоненциально затухающей и распространяющейся против потока, либо экспоненциально нарастающей и распространяющейся по потоку.

Остается еще возможность существования решений такого же плана в другом предельном случае ($\beta \to 0$) при одновременной поддержке ограниченности конвективного адмитанса. Поскольку при $\beta \to 0$ соответствующие решения уравнения (15) должны стремиться к бесконечности, отбрасываем в этом уравнении члены с нулевой и первой степенью μ. Тогда уравнение (15) принимает следующий вид

$$\mu^2 M^4 - 4\mu M^3 + \frac{1-M^2}{\beta_{1,2}^2} + 6M^2 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, получим

$$\mu_{1,2} = \frac{2}{M} \pm \frac{i\sqrt{2M^2 + \left(1-M^2\right)/\beta^2}}{M^2},$$

Выполняя дальнейшее упрощение, получим $\mu_{1,2} = \pm i\sqrt{\left(1-M^2\right)}/\beta M^2$. Из этого соотношения видно, что в случае адмитанса упругого типа корни располагаются во втором и четвертом квадранте комплексной плоскости μ. Во втором квадранте направление фазовой скорости соответствующей моды противоположно направлению, в котором эта волна затухает.

Решения (16), расположенные в нижней полуплоскости μ, в определенной степени являются интригующими, поскольку позволяют сделать предположение о существовании неустойчивых гидродинамических волн в канале с однородным дозвуковым потоком (точнее, конвективно-неустойчивых, поскольку они обусловлены наличием конвективного члена в ХУ) [19]. Число таких мод в двухмерном канале равно двум. Из рис. 4б видно, что корни, соответствующие конвективной неустойчивости, существуют при любом β, таком что $-\pi/2 < \arg(\beta) < \pi/2$. При этом они имеют большую действительную и большую мнимую части. Причем корни по абсолютной величине тем больше, чем меньше адмитанс стенок. Возможно, по этой причине эти корни трудно обнаружить при решении ХУ. Из рис. 4б, в частности, следует, что при чисто реактивном адмитансе, имеющем характер упругости, корни являются действительными и, следовательно, пространственно не нарастают.

При детальном исследовании этих мод следует использовать принцип причинности [20, 21]. Вопрос заключается в том, существуют ли такие моды в действительности и какую роль они играют при многомодовом возбуждении. При выводе функции Грина путем преобразования контурного интеграла в разложение по модам предполагается, что интеграл по окружности бесконечно большого радиуса стремится к нулю при стремлении радиуса к бесконечности. Фактически это означает, что $|p| \to 0$ при $|x - x_0| \to \infty$. При наличии нестабильности такое преобразование становится некорректным, поскольку интеграл по дуге большого радиуса уже не стремится к нулю. В соответствии с принципом причинности следует ввести комплексное волновое число $K = k + ib$, у которого действительная часть равна реальному волновому числу $k = \omega/c$, а мнимая часть – большое положительное число. При достаточно большой мнимой части волнового числа корни, соответствующие полю, существующему вниз по потоку от источника, будут располагаться в верхней полуплоскости плоскости ξ, а полю вверх по потоку от источника – в нижней полуплоскости. В этом случае операция замыкания контура интегрирования в верхней и нижней полуплоскости становится корректной. В соответствии с принципом причинности корни при уменьшении b до нуля при движении по своим траекториям не должны пересекать контур интегрирования. Для этого он должен соответствующим образом деформироваться. Оказывается, что некоторые корни $\xi = k\mu_1 + b\mu_2 + i(b\mu_1 - k\mu_2)$, где $\mu = \mu_1 - i\mu_2$, расположенные при достаточно большом $b > k\mu_2/\mu_1$ в верхней полуплоскости, при уменьшении b до нуля перемещаются (деформируя при этом контур интегрирования) в нижнюю полуплоскость. Этим корням соответствуют моды, распространяющиеся в положительном направлении от источника и нарастающие в этом направлении. Те моды, которые вещественную ось не пересекают, остаются затухающими в этом же направлении. На рис. 5 показаны траектории движения десяти корней ХУ при следующих параметрах расчета $0 \le b \le 4.5$, $kH = 10.639$, $M = 0.5$, $\beta_1 = 2 - i3$, $\beta_2 = 3 - i2$. Из рис. 5 видно, что только два корня (квадрат с заливкой и треугольник без заливки) пересекают действительную ось сверху вниз и, следовательно, соответствуют двум неустойчивым решениям. Кроме двух неустойчивых гидродинамических мод на этом рисунке показаны также две гидродинамические устойчивые моды, отмеченные такими же значками, которые действительную ось не пересекают и являются хорошо затухающими.

Если корни пересекают действительную ось снизу вверх, то этим корням соответствуют моды, распространяющиеся в обратном направлении (против потока) и нарастающие в этом направлении. На рис. 6 представлено движение корней на комплексной плоскости ξH при уменьшении мнимой части волнового числа от 4.5 до нуля в случае одинакового адмитанса стенок плоского канала, равного $\beta = 0.035 - 0.286i$. Из рис. 6 вид-

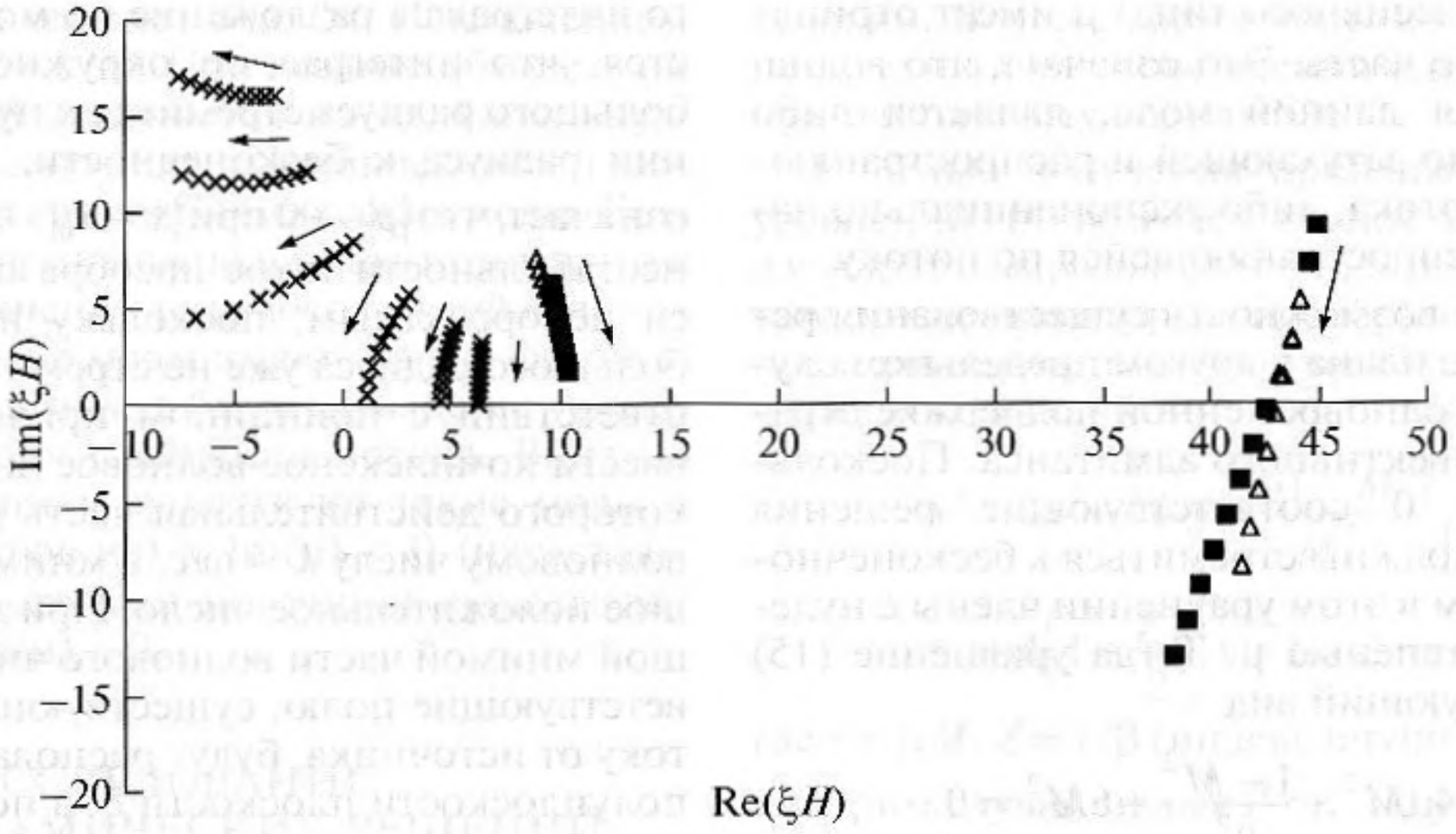

Рис. 5. Траектории корней ХУ при уменьшении мнимой части волнового числа от 4.5 до 0 при $\beta_1 = 2 - 3i$, $\beta_2 = 3 - 2i$, $kH = 10.639$, $M = 0.5$ для волн по потоку.

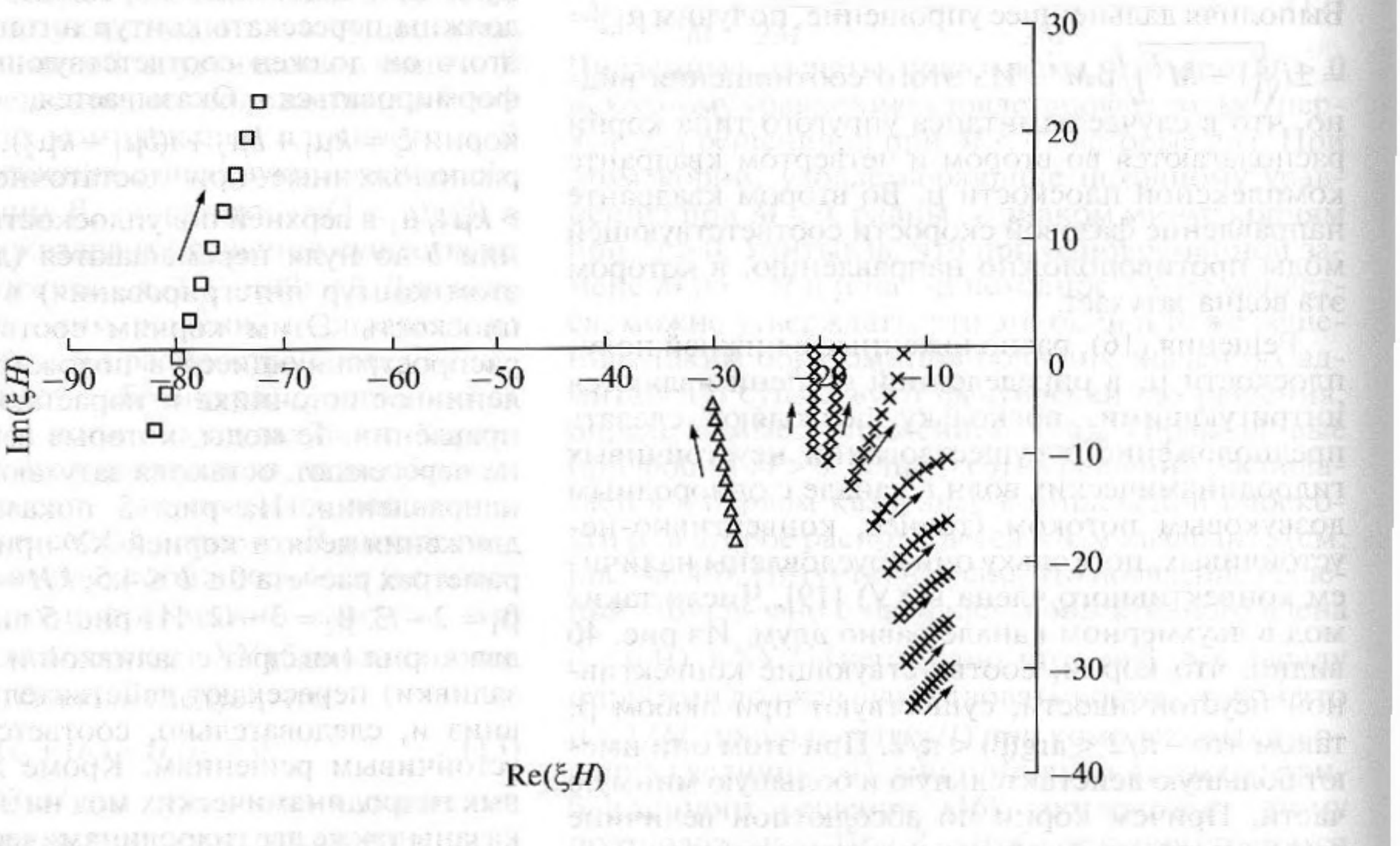

Рис. 6. Траектории корней ХУ при уменьшении мнимой части волнового числа от 4.5 до 0 при $\beta_{1,2} = 0.035–0.268i$, $kH = 10.639$, $M = 0.5$, для волн против потока.

но, что наряду с обычными корнями существует корень (в данном случае один), пересекающий действительную ось снизу вверх. Этот корень в соответствии с принципом причинности соответствует нарастающей моде, распространяющейся против потока. Численные расчеты показывают, что появление неустойчивых мод возможно только при достаточно малом адмитансе. Определение границы перехода неустойчивых решений в устойчивые решения на комплексной плоскости адмитанса в настоящее время не представляется возможным. В любом случае, эта граница определенным образом связана с точками ветвления.

Рассмотрим более подробно одно из неустойчивых решений в сумме (4), соответствующее распространению по потоку. Корень, соответствующий

неустойчивой моде, является достаточно большим комплексным числом с отрицательной мнимой частью. В этом случае для соответствующего члена ряда (4) имеем $G_{1,2} \to i$, следовательно, $D \to \infty$, $\cos(\chi y - \varphi) \to \infty$, $\cos(\chi y_0 - \varphi) \to \infty$, и этот член представляет собой отношение двух больших чисел. Это приводит к определенным трудностям при вычислении поля для соответствующей моды, поскольку необходимо с достаточно большой точностью вычислять соответствующий корень ХУ. Чем выше частота, тем больше соответствующий корень ξ и, следовательно, необходима все более увеличивающаяся точность вычисления корня ХУ. При $D \to \infty$ единицей в выражении для D соответствующего члена в (4) можно пренебречь. Тогда для него можно записать два альтернативных представления

$$p_{NS} \approx -A_0 \frac{i}{kH} \frac{\exp\left(i\xi(x-x_0)\right)\dfrac{\cos(\chi y_0 - \varphi)\cos(\chi y - \varphi)}{\cos^2(\chi H - \varphi)}\chi H\left(1+G_2^2\right)}{q\left(1-\chi S'_\chi/S\right)(G_1+G_2)(1+G_1G_2)}, \tag{20}$$

$$p_{NS} \approx -A_0 \frac{i}{kH} \frac{\exp\left(i\xi(x-x_0)\right)\dfrac{\cos(\chi y_0 - \varphi)\cos(\chi y - \varphi)}{\cos^2(\varphi)}\chi H\left(1+G_1^2\right)}{q(G_1+G_2)(1+G_1G_2)(1-\chi S'_\chi/S)}. \tag{21}$$

Выражение (20) удобнее анализировать, когда источник находится на верхней стенке или вблизи ее, а (21) – когда источник находится вблизи нижней стенки.

Пусть источник и точка наблюдения находятся на нижней стенке канала $y_0 = 0$, $y = 0$ (где β_2). Из выражения (20) имеем

$$p_{NS} \approx -A_0 \frac{i\nu\exp\left(i\xi(x-x_0)\right)\left(1+G_1^2\right)}{q(G_1+G_2)(1+G_1G_2)(1-\chi S'_\chi/S)}, \tag{22}$$

где $\nu = \chi/k$. Если корень ХУ такой, что $G_1 \approx -i$, то $p \approx 0$, т.е. вклад от первой неустойчивой моды на нижней стенке равен нулю. Если же корень такой, что $G_2 \approx -i$, то

$$p_{NS} \approx -A_0 \frac{i}{kH} \frac{\exp\left(i\xi(x-x_0)\right)\chi H}{q(1-\chi S'_\chi/S)(-i)} = A_0 \frac{i\nu\exp\left(i\xi(x-x_0)\right)G_2}{q(1-\chi S'_\chi/S)}, \tag{23}$$

т.е. поле на нижней стенке определяется только параметрами нижней стенки и оно пропорционально адмитансу нижней стенки. Если точка наблюдения находится на верхней стенке, а источник остается на нижней, тогда

$$p_{NS} \approx -A_0 \frac{i\nu\exp\left(i\xi(x-x_0)\right)\sqrt{1+G_1^2}\sqrt{1+G_2^2}}{q(G_1+G_2)(1+G_1G_2)(1-\chi S'_\chi/S)} \tag{24}$$

и вклад от обеих мод в точке наблюдения равен нулю.

Аналогично можно анализировать выражения (20), (21) при других взаимных расположениях источника и точки наблюдения. В любом случае выполняются следующее два правила, которые заключаются в том, что: а) каждая из двух неоднородных мод возбуждается вблизи "своей" стенки и вблизи нее концентрируется; б) источники, расположенные вдали от стенки, не возбуждают неустойчивые моды.

Здесь хотелось бы обратить внимание на кажущееся противоречие. Действительно, если в выражении (21) положить $\beta_1 = \beta_2$, тогда

$$p_{NS} \approx -A_0 \frac{i\nu\exp\left(i\xi(x-x_0)\right)}{2qG(1-\chi S'_\chi/S)} \frac{\cos(\chi y_0 - \varphi)}{\cos(\varphi)} \frac{\cos(\chi y - \varphi)}{\cos(\varphi)},$$

и если одновременно источник и точка наблюдения находятся на нижней или верхней стенках канала, то

$$p_{NS} \approx A_0 \frac{i\nu\exp\left(i\xi(x-x_0)\right)G}{2q(1-\chi S'_\chi/S)}. \tag{25}$$

По сравнению с (23) амплитуда поля оказалась в два раза меньше. Для того чтобы понять, с чем это связано, подробнее рассмотрим случай $\beta_1 = \beta_2$. В этом случае два корня ХУ совпадают. На первый взгляд кажется, что при одинаковых корнях и решения, определяемые формулой для точечного источника (21) или (20), будут одинаковыми, однако это не так. На самом деле одно решение (21) или (20) относится к сумме симметричной и антисимметричной мод. При равенстве адмитансов следует рассматривать ХУ отдельно для симметричных и антисимметричных мод. Из них следует, что для достаточно больших комплексных χ, таких что $\mathrm{tg}(\chi H/2) \approx \pm i$, собственные значения, соответствующие симметричным и антисимметричным модам, одинаковы и определяются из решения $G \approx -i$ для гидродинамических неустойчивых мод и $G \approx i$ для гидродинамических устойчивых мод. Фактически каждый такой корень мы должны учесть дважды, один раз в составе симметричной моды и второй раз в составе антисим-

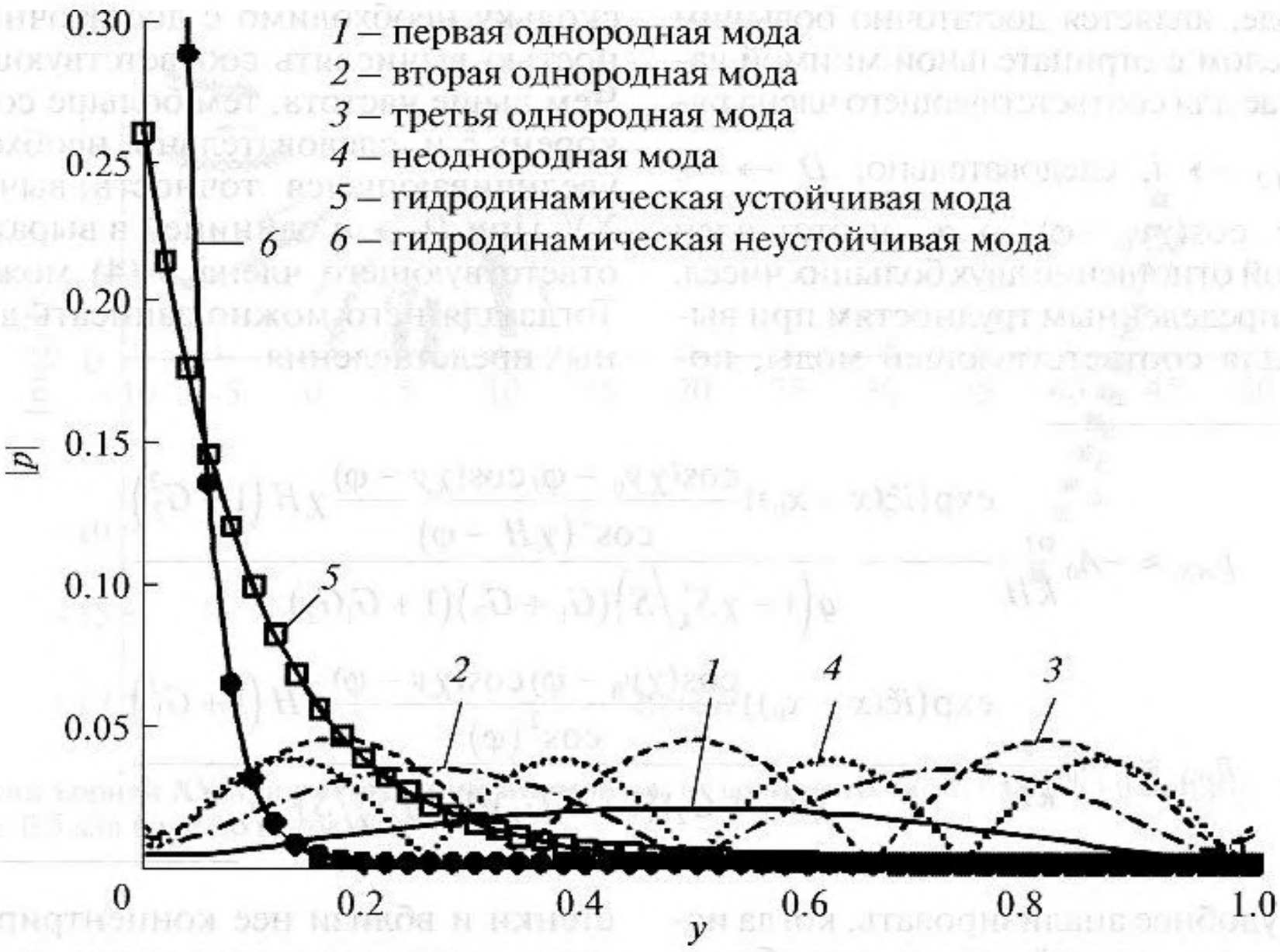

Рис. 7. Распределение давления по сечению канала на расстоянии $x = 0.1H$ от источника, расположенного на нижней стенке, соответствующее различным модам при $kH = 10.639$, $M = 0.5$, $\beta_1 = 2 - i3$, $\beta_2 = 3 - i2$.

метричной моды. Действительно, в рассматриваемом приближении имеем для симметричной моды

$$\frac{\cos(\chi y_{1,0})\cos(\chi y_1)}{qD} \approx \frac{G\chi H\cos(\chi y_{1,0})\cos(\chi y_1)}{2q\left(1-\chi S'_\chi/S\right)\cos^2(\chi H/2)},$$

где $y_1 = y - H/2$. Аналогично для антисимметричной моды

$$\frac{\sin(\chi y_{1,0})\sin(\chi y_1)}{qD} \approx$$

$$\approx \frac{G\chi H}{2q(1-\chi S'/S)}\frac{\sin(\chi y_{1,0})}{\sin(\chi H/2)}\frac{\sin(\chi y_1)}{\sin(\chi H/2)}.$$

Из этих выражений следует, что при одинаковом χ форма мод различна. Таким образом, выражения для описания неустойчивых решений имеют вид

$$p_{NS,1} \approx A_0\frac{i\nu\exp(i\xi(x-x_0))G\cos(\chi y_{1,0})\cos(\chi y_1)}{2q\left(1-\chi S'_\chi/S\right)\cos^2(\chi H/2)}$$

в случае симметричной моды,

$$p_{NS,2} \approx A_0\frac{i\nu\exp(i\xi(x-x_0))G\sin(\chi y_{1,0})\sin(\chi y_1)}{2q\left(1-\chi S'_\chi/S\right)\sin^2(\chi H/2)}$$

в случае антисимметричной моды. Если источник и точка наблюдения находятся на нижней стенке $(y_{1,0} = -H/2,\ y_1 = -H/2)$, то

$$p_{NS,1} \approx A_0\frac{i\nu\exp(i\xi(x-x_0))}{2q\left(1-\chi S'_\chi/S\right)}G,$$

$$p_{NS,2} \approx A_0\frac{i\nu\exp(i\xi(x-x_0))}{2q\left(1-\chi S'_\chi/S\right)}G.$$

Суммарное давление $p = p_1 + p_2$ совпадает с (22). Если источник находится на нижней стенке, а точка наблюдения – на верхней $(y_{1,0} = -H/2,\ y = H/2)$, то

$$p_{NS,1} = \frac{A_0 i\nu\exp(i\xi(x-x_0))}{2q\left(1-\chi S'_\chi/S\right)}G,$$

$$p_{NS,2} = -\frac{A_0 i\nu\exp(i\xi(x-x_0))}{2q\left(1-\chi S'_\chi/S\right)}G.$$

В точке наблюдения симметричная и антисимметричная моды находятся в противофазе и результирующее поле равно нулю. В целом для суммы симметричной и антисимметричной мод проявляются те же закономерности, что и для моды, порождаемой вблизи стенки при неодинаковом адмитансе стенок канала (когда нет разделения на симметричные и антисимметричные моды).

На рис. 7 показано распределение давления по сечению канала на расстоянии $x = 0.1H$ от источника, расположенного на нижней стенке, соответствующее различным модам при $kH = 10.639$, $M = 0.5$, $\beta_1 = 2 - i3$, $\beta_2 = 3 - i2$. Первые четыре моды, из которых три однородные и одна неоднородная, – это обычные моды плоского канала. Характерным для этих мод является чередование максимумов и минимумов. Число максимумов, а также миниму-

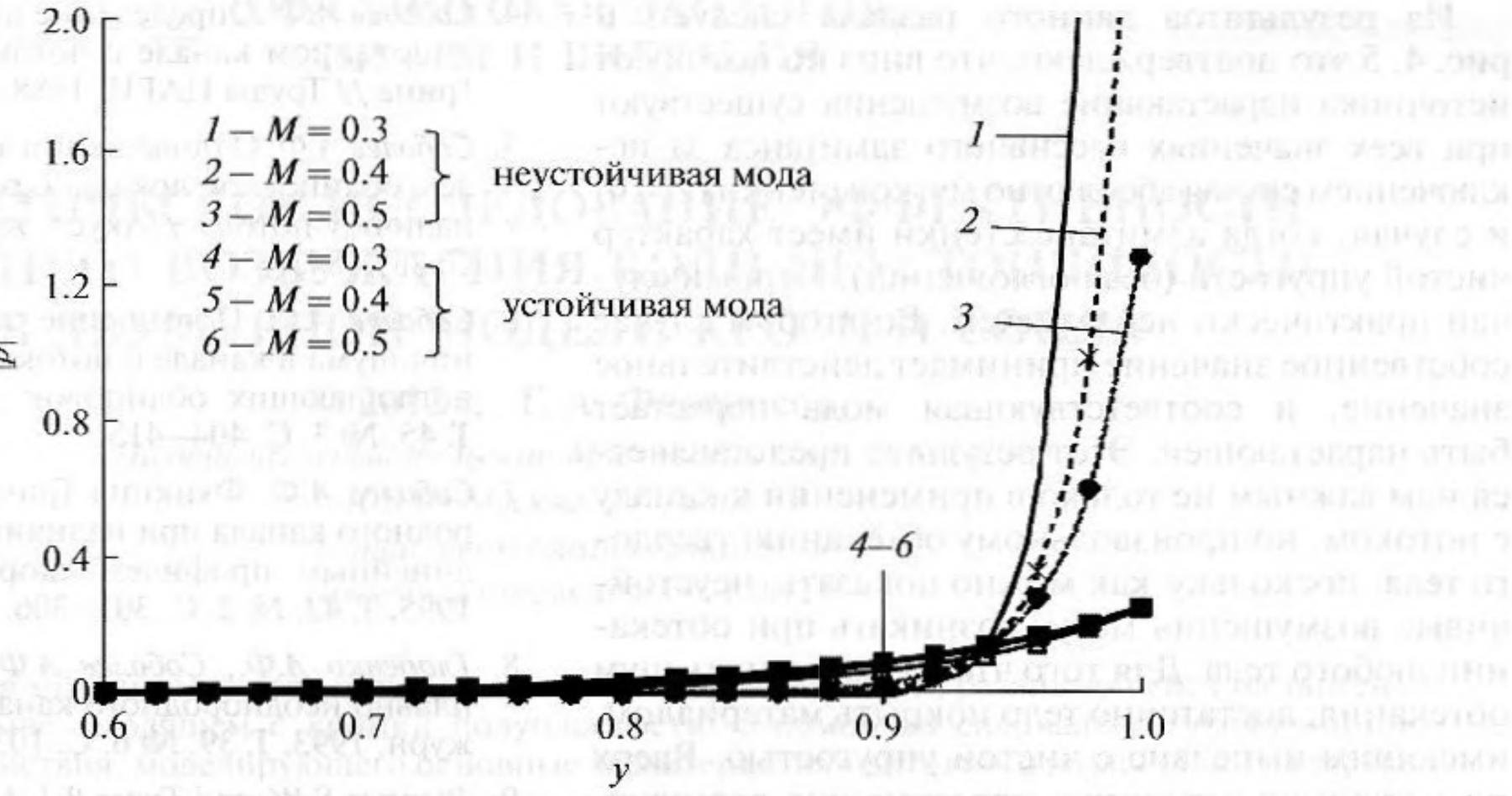

Рис. 8. Распределение давления по сечению канала при различных числах M на расстоянии $x = 0.1H$ от источника, расположенного на верхней стенке, соответствующее гидродинамическим модам $kH = 10.639$, $M = 0.5$, $\beta_1 = 3 - i2$, $\beta_2 = 2 - i3$.

мов увеличивается с номером моды. Пятая и шестая – это соответственно устойчивая и неустойчивая гидродинамические моды. Характерным для этих мод является монотонное уменьшение амплитуды от максимального значения на стенке до практически нуля на сравнительно небольшом расстоянии от стенки канала. Если источник смещается от стенки вглубь канала, максимум амплитуды остается на стенке, но величина ее уменьшается, причем для нестабильной моды уменьшение происходит значительно резче. Из рис. 7 видно, что гидродинамические моды по амплитуде существенно превосходят обычные акустические моды. В силу независимости выражения для поля от перемены y и y_0 местами кривые *5* и *6* дают величину амплитуды давления на стенке в зависимости от положения источника. Выше было установлено, что собственное значение μ гидродинамических мод практически не зависит от частоты, следовательно, $\xi = k\mu$ пропорционально частоте. Отсюда можно заключить, что с увеличением частоты увеличивается скорость нарастания неустойчивой гидродинамические моды и увеличивается крутизна падения ее амплитуды при удалении от стенки канала.

На рис. 8 показано распределение амплитуды давления, соответствующее гидродинамическим модам при различной скорости потока в канале при тех же параметрах канала, что и на рис. 7. При уменьшении числа Маха увеличивается амплитуда неустойчивой моды и ее крутизна. Влияние числа Маха на амплитуду устойчивой гидродинамической моды при данных параметрах расчета практически незаметно. Из рис. 7, 8 следует парадоксальный на первый взгляд результат, а именно, уменьшение $|\beta|$, а также числа Маха, приводит к увеличению осевого собственного значения гидродинамической моды по абсолютной величине и, следовательно, к увеличению скорости нарастания амплитуды соответствующего акустического возмущения до пределов, ограниченных только рамками линейной теории. С другой стороны, если изначально рассмотреть аналогичную задачу с абсолютно жесткими стенками, то таких мод не обнаружить. В действительности же даже абсолютно жесткая стенка обладает малым, но конечным адмитансом за счет эффектов вязкости и теплопроводности. Действительно, адмитанс жесткой стенки с учетом вязкости и теплопроводности равен [22]

$$\beta = (1 - i)\left(\cos^2(\theta)\sqrt{\nu\omega/2c^2} + (\gamma - 1)\sqrt{\varsigma\omega/2c^2}\right),$$

где ν – кинематический коэффициент вязкости, ς – коэффициент температуропроводности, θ – угол скольжения звуковой волны, γ – отношение теплоемкостей, c – скорость звука. В интересующем нас диапазоне частот адмитанс жесткой стенки очень мал: $|\beta| < 0.01$. Следовательно, начальная амплитуда неустойчивого возмущения, которая имеет порядок β, также мала. Однако скорость нарастания неустойчивых возмущений настолько велика, что, по-видимому, сразу же наступает нелинейный режим, приводящий к разрушению тангенциального разрыва. Иными словами, вязкость и теплопроводность выступают здесь только как первопричина. С этой точки зрения шум потока как такового в канале с жесткими стеками будет больше, чем в канале с импедансными стенками за счет большей скорости нарастания амплитуды возмущений.

Из результатов данного раздела следует, и рис. 4, 5 это подтверждают, что вниз по потоку от источника нарастающие возмущения существуют при всех значениях пассивного адмитанса за исключением случая абсолютно мягкой стенки ($Z=0$) и случая, когда адмитанс стенки имеет характер чистой упругости (без поглощения). Первый случай практически нереализуем. Во втором случае собственное значение принимает действительное значение, и соответствующая мода перестает быть нарастающей. Этот результат представляется нам важным не только в применении к каналу с потоком, но произвольному обтеканию твердого тела, поскольку, как можно показать, неустойчивые возмущения могут возникать при обтекании любого тела. Для того чтобы уменьшить шум обтекания, достаточно тело покрыть материалом, имеющим импеданс с чистой упругостью. Вверх по потоку от источника нарастающие возмущения существуют только при достаточно малом адмитансе упругого типа. В случае чистой упругости, а также в случае адмитанса массового типа нарастающие возмущения вверх по потоку от источника не возникают. В этом случае, чтобы уменьшить шум обтекания от источника, расположенного ниже по потоку, можно попробовать воспользоваться облицовкой, имеющей адмитанс массового типа или чистой упругости.

В заключение раздела следует сказать несколько слов о роли и месте неустойчивых возмущений в общем шуме, распространяющемся по каналам авиационных двигателей. Как только что было показано, неустойчивые возмущения участвуют в создании пограничного слоя и формировании шума пограничного слоя. Экспериментальные исследования показывают, что шум потока, вообще говоря, значительный сам по себе, существенно меньше шума, создаваемого вентилятором двигателя, в той области частот, в которой вентилятор создает шум. Поэтому при разработке звукопоглощающих конструкций в первую очередь следует ориентироваться на шум вентилятора, распространяющийся по каналу в виде обычных волноводных мод.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tester B.J.* The propagation and attenuation of sound in lined duct containing uniform or “plug” flow // J. Sound and Vibr. 1973. V. 28. № 2. P. 151–203.
2. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: АН СССР, 1957. 503 с.
3. *Леонтьев Е.А. Соболев А.Ф.* Исследование звукового поля точечного источника в цилиндрическом канале в отсутствие потока / В кн. Аэроакустика. М.: Наука, 1980. С. 33–46.
4. *Соболев А.Ф.* Определение шума вентилятора в облицованном канале с потоком методом функции Грина // Труды ЦАГИ. 1988. Вып. 2355. С. 75–82.
5. *Соболев А.Ф.* О повышении затухания звука в канале с облицовкой локально реагирующего типа при наличии потока //Акуст. журн. 1994. Т. 40. № 5. С. 837–843.
6. *Соболев А.Ф.* Повышение эффективности снижения шума в канале с потоком при наличии звукопоглощающих облицовок // Акуст. журн. 1999. Т. 45. № 3. С. 404–413.
7. *Соболев А.Ф.* Функция Грина для плавно неоднородного канала при наличии пограничного слоя с линейным профилем скорости // Акуст. журн. 1995. Т. 42. № 2. С. 301–306.
8. *Гладенко А.Ф., Соболев А.Ф.* Функция Грина для плавно неоднородного канала с потоком // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 6. С. 1037–1042.
9. *Rienstra S.W. and Tester B.J.* An analytic Green’s function for a lined circular duct containing uniform mean flow // J. Sound and Vibr. 2008. V. 317. P. 994–1016.
10. *Myers M.K.* On the acoustic boundary condition in the presence of flow // J. Sound and Vibr. 1980. V. 71. P. 429–434.
11. *Соболев А.Ф.* Распространение звука в плоском канале при наличии слоистого потока // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 2. С. 273–282.
12. *Rienstra S.W.* A Classification of duct modes based on surface waves // Wave Motion. 2003. V. 37. P. 119–135.
13. *Brambley E.J., Peake N.* Classification of aeroacoustically relevant surface modes in cylindrical lined ducts // Wave Motion. 2006. V. 43. P. 301–310.
14. *Vilenski G.G., Rienstra S.W.* On hydrodynamic and acoustic modes in a ducted shear flow with wall lining // J. Fluid Mech. 2007. V. 583. P. 45–70.
15. *Vilenski G.G., Rienstra S.W.* Numerical study of acoustic modes in ducted shear flow // J. Sound and Vibr. 2007. V. 307. P. 610–626.
16. *Rienstra S.W., Darau M.* Boundary layer thickness effects of the hydrodynamic instability along an impedance wall // J. Fluid Mech. 2011. V. 671. P. 559–573.
17. *Morse P.M., Ingard P.U.* Theoretical acoustics. McGraw-Hill Book Co., Inc., 1968.
18. *Соболев А.Ф.* К вопросу о потоке энергии в облицованном канале с податливыми стенками при наличии потока воздуха // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 4. С. 499–505.
19. *Соболев А.Ф.* Распространение звука в плоском канале при наличии слоистого потока // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 2. С. 273–282.
20. *Briggs R.J.* Electron-stream interaction with plasmas. Monograph no. 29, MIT Press, Gambridge Mass., 1964.
21. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 10. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
22. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.