АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2011, том 57, № 4, с. 435–437

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.121.2+517.984.54

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЗАКРЕПЛЕННОСТИ ТРЕУГОЛЬНОЙ МЕМБРАНЫ ПО ПЕРВОЙ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЕ ЕЕ КОЛЕБАНИЙ

© 2011 г. А. М. Ахтямов, Н. В. Семин*

Институт механики УНЦ РАН, 450054 Уфа, пр. Октября 71

** Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы 1*

E-mail: AkhtyamovAM@mail.ru

Поступила в редакцию 09.08.2010 г.

Рассматривается мембрана, имеющая форму равнобедренного прямоугольного треугольника, на каждой из сторон которой реализуются краевые условия либо Неймана, либо Дирихле. Уточняется решение соответствующей спектральной задачи, которая не допускает разделения переменных. На основе этого уточнения решается задача об идентификации закрепления треугольной мембраны по первой собственной частоте ее колебаний.

Ключевые слова: идентификация мембраны, краевые условия Неймана или Дирихле, спектральная задача, собственные значения.

В работах [1–3] разработаны методы решения задач идентификации закреплений прямоугольных, круговых и кольцевых пластин и мембран по собственным частотам их колебний. Однако эти методы не годятся для решения соответствующей задачи об идентификации закрепления треугольной мембраны, так как соответствующая задача на собственные значения не допускает разделение переменных. Для решения задачи на собственные значения для треугольника требуется применение теоретико-групповых методов [4–6].

Пусть $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Рассмотрим область D равнобедренного прямоугольного треугольника, ограниченную прямыми H_i $(i = 1, 2, 3)$:

$$H_1 = \{x;\, x_1 = a\}, \quad H_2 = \{x;\, x_1 = x_2\},$$
$$H_3 = \{x;\, x_2 = 0\}.$$

Обозначим через $T(k_1, k_2, k_3)$ следующие граничные задачи на собственные значения:

$$-\Delta u(x) = \lambda u(x), \quad x \in D,$$
$$k_i \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} + r_i u(x) = 0, \quad x \in \overline{D} \cap H_i, \tag{1}$$

где $k_i, r_i \in \mathbb{Z}$, $k_i \geq 0$, $r_i \geq 0$, $k_i + r_i = 1$, $i = 1, 2, 3$, ν – внешняя нормаль.

Д. Пойа (G. Polya) [7] нашел наименьшее собственное значение задачи Дирихле для прямоугольного треугольника с углом $\pi/6$ и соответствующую собственную функцию. Еще ранее Б.Р. Сетт (B.R. Seth) [8, 9] построил бесконечную, но неполную систему собственных функций для этой же задачи. Одной из наиболее ранних работ, в которой были найдены некоторые серии собственных функций для указанного треугольника, является работа Г. Ламе (G. Lame) [10]. Собственные значения и собственные функции для треугольной мембраны исследовались и в работах других авторов (см. [11]). В [12] собственные функции в виде произведений тригонометрических функций применялись для решения задачи, возникающей при изучении рассеяния плоской волны на пилообразной неровной поверхности.

Решение всех задач $T(k_1, k_2, k_3)$ для прямоугольного треугольника дано А.Ф. Шестопалом [4–6]. В [6] были построены функции Грина соответствующих задач и указан метод приведения их к спектральным разложениям, основанный на использовании обобщенной формулы суммирования Пуассона (см. также [13], где показана ортогональность соответствующих собственных функций).

Если собственные значения обозначить через λ_s, а собственные функции через $\psi_s(x)$, то решение, данное А.Ф. Шестопалом для соответствующих задач $T(k_1, k_2, k_3)$, запишется в следующем виде [6]: выражения для собственных значений задач $T(1,0,1)$, $T(0,1,0)$, $T(1,1,1)$, $T(0,0,0)$ даются формулой

$$\lambda_s = \frac{\pi^2}{a^2}(s_1^2 + s_2^2),$$

а выражения для собственных значений задач $T(1,0,0)$, $T(0,0,1)$, $T(1,1,0)$, $T(0,1,1)$ – формулой

$$\lambda_s = \frac{\pi^2}{4a^2}\left((2s_1 + 1)^2 + (2s_2 + 1)^2\right).$$

При этом собственные функции $\psi_s(x)$ для соответствующих задач $T(k_1, k_2, k_3)$, представляются в следующем виде:

$$1^\circ.\ T(1,0,1).\ \ \psi_s(x)=\begin{vmatrix}\cos\dfrac{\pi s_1x_1}{a} & \cos\dfrac{\pi s_2x_1}{a}\\ \cos\dfrac{\pi s_1x_2}{a} & \cos\dfrac{\pi s_2x_2}{a}\end{vmatrix},\ s_2>s_1>0.$$

$$2^\circ.\ T(0,1,0).\ \ \psi_s(x)=\begin{vmatrix}\sin\dfrac{\pi s_1x_1}{a} & \sin\dfrac{\pi s_2x_1}{a}\\ -\sin\dfrac{\pi s_1x_2}{a} & \sin\dfrac{\pi s_2x_2}{a}\end{vmatrix},\ s_2\ge s_1>0.$$

$$3^\circ.\ T(1,1,1).\ \ \psi_s(x)=\begin{vmatrix}\cos\dfrac{\pi s_1x_1}{a} & \cos\dfrac{\pi s_2x_1}{a}\\ -\cos\dfrac{\pi s_1x_2}{a} & \cos\dfrac{\pi s_2x_2}{a}\end{vmatrix},\ s_2\ge s_1\ge 0.$$

$$4^\circ.\ T(0,0,0).\ \ \psi_s(x)=\begin{vmatrix}\sin\dfrac{\pi s_1x_1}{a} & \sin\dfrac{\pi s_2x_1}{a}\\ \sin\dfrac{\pi s_1x_2}{a} & \sin\dfrac{\pi s_2x_2}{a}\end{vmatrix},\ s_2>s_1>0.$$

$$5^\circ.\ T(1,0,0).\ \ \psi_s(x)=\begin{vmatrix}\sin\dfrac{\pi(2s_1+1)x_1}{2a} & \sin\dfrac{\pi(2s_1+1)x_1}{2a}\\ \sin\dfrac{\pi(2s_1+1)x_2}{2a} & \sin\dfrac{\pi(2s_2+1)x_2}{2a}\end{vmatrix},\ s_2>s_1>0.$$

$$6^\circ.\ T(0,0,1).\ \ \psi_s(x)=\begin{vmatrix}\cos\dfrac{\pi(2s_1+1)x_1}{2a} & \cos\dfrac{\pi(2s_2+1)x_1}{2a}\\ \cos\dfrac{\pi(2s_1+1)x_2}{2a} & \cos\dfrac{\pi(2s_2+1)x_2}{2a}\end{vmatrix},\ s_2>s_1>0.$$

$$7^\circ.\ T(1,1,0).\ \ \psi_s(x)=\begin{vmatrix}\sin\dfrac{\pi(2s_1+1)x_1}{2a} & \sin\dfrac{\pi(2s_2+1)x_1}{2a}\\ -\sin\dfrac{\pi(2s_1+1)x_2}{2a} & \sin\dfrac{\pi(2s_2+1)x_2}{2a}\end{vmatrix},\ s_2\ge s_1\ge 0.$$

$$8^\circ.\ T(0,1,1).\ \ \psi_s(x)=\begin{vmatrix}\cos\dfrac{\pi(2s_1+1)x_1}{2a} & \cos\dfrac{\pi(2s_2+1)x_1}{2a}\\ -\cos\dfrac{\pi(2s_1+1)x_2}{2a} & \cos\dfrac{\pi(2s_2+1)x_2}{2a}\end{vmatrix},\ s_2\ge s_1\ge 0.$$

Нетрудно однако заметить, что при $s_1=0$ и $s_2=1$ представленные А.Ф. Шестопалом функции $\psi_s(x)$ для задач $T(1,0,1)$, $T(1,0,0)$ и $T(0,0,1)$ с соответствующими собственными значениями λ_s также являются решениями задач (1). Поэтому для индекса s_1 в выражениях для собственных значений и собственных функций задач $T(1,0,1)$, $T(1,0,0)$, $T(0,0,1)$ правильнее писать $s_1\ge 0$.

С учетом этого замечания из представленных выше выражений для собственных значений и собственных функций следует, что первыми собственными значениями λ_1 задач $T(k_1,k_2,k_3)$ (т.е. наименьшими из неотрицательных λ_s) являются следующие числа:

$$1^\circ.\ T(1,0,1):\ \lambda_1=\frac{\pi^2}{a^2},\ (s_1=0,\ s_2=1).$$

$$2^\circ.\ T(0,1,0).\ \lambda_1=\frac{2\pi^2}{a^2},\ (s_1=1,\ s_2=1).$$

$$3^\circ.\ T(1,1,1).\ \lambda_1=0,\ (s_1=0,\ s_2=0).$$

$$4^\circ.\ T(0,0,0).\ \lambda_1=\frac{5\pi^2}{a^2},\ (s_1=1,\ s_2=2).$$

$$5^\circ.\ T(1,0,0).\ \lambda_1=\frac{9\pi^2}{4a^2},\ (s_1=0,\ s_2=1).$$

$$6^\circ.\ T(0,0,1).\ \lambda_1=\frac{9\pi^2}{4a^2},\ (s_1=0,\ s_2=1).$$

$$7^\circ.\ T(1,1,0).\ \lambda_1=\frac{\pi^2}{2a^2},\ (s_1=0,\ s_2=0).$$

$$8^\circ.\ T(0,1,1).\ \lambda_1=\frac{\pi^2}{2a^2},\ (s_1=0,\ s_2=0).$$

Как видим, чем больше собственное значение λ_1, тем выше закрепленность мембраны; наименьшему из первых собственных значений

$\lambda_1 = 0$ соответствует задача Неймана $T(1,1,1)$, а наибольшему $\lambda_1 = \frac{5\pi^2}{a^2}$ – задача Дирихле $T(0,0,0)$. Более длинной закрепленной стороне соответствует более высокое первое собственное значение. Окончательный вывод таков: *для мембраны, имеющей форму равнобедренного прямоугольного треугольника, закрепление ее сторон определяется по первому собственному значению однозначно с точностью до перестановки закреплений на равных сторонах.* Этот вывод полностью согласуется с решением соответствующей задачи для однородной прямоугольной мембраны [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахтямов А.М.* Диагностирование закрепления кольцевой пластины по собственным частотам ее колебаний // Известия РАН. МТТ. 2003. № 6. С. 137–147.
2. *Ахтямов А.М.* Диагностика закрепления прямоугольной мембраны по собственным частотам ее колебаний // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 3. С. 293–296.
3. *Ахтямов А.М.* Теория идентификации краевых условий и ее приложения. М.: Физматлит, 2009. 272 с.
4. *Шестопал А.Ф.* О собственных колебаниях треугольных пластин и мембран // Всесоюзная конференция по теории оболочек и пластин. Ереван, 1962. С. 99.
5. *Шестопал А.Ф.* Об одной спектральной задаче для оператора Лапласа в областях зеркально-симметричных многогранников // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 4. С. 725–731.
6. *Шестопал А.Ф.* Геометрия оператора Лапласа, Киев: Вища школа, 1991. 159 с.
7. *Polya G.* A note on the principal frequency of a triangular membrane // Qyart. Appl. Math. 1951. V. 8. № 4. P. 386.
8. *Seth B.R.* Transverse vibrations of triangular membranes // Proc. Indian Acad. Sci. 1940. Ser. A-12. P. 487.
9. *Seth B.R.* Fransverse vibrations of rectilinear plates // Proceedings Mathematical Sciences. 1947. V. 25. № 1. P. 25–29.
10. *Lame G.* Leqons sur la theorie de la chalor. Paris, 1861. 189 p.
11. *Gottlieb H.P.W.* Exact vibration solutions for some irregularly shaped membranes and simply supported plates // J. Sound and Vibration. 1989. V. 103. Issue 3. P. 333–339.
12. *Лапин А.Д.* Об отражении нормальных волн от закрытого конца волновода // Акуст. журн. 1962. Т. 8. № 2. С. 189–193.
13. *Дубровский В.В., Кравченко В.Ф., Семин Н.В.* Функция Грина оператора Лапласа со смешанными краевыми условиями на равнобедренном треугольнике // ДАН. 1995. Т. 343. № 3. С. 314–316.