АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2008, том 54, № 4, с. 517–521

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.26

СПИРАЛЬНО-ВИНТОВЫЕ ВОЛНЫ В УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ, ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

© 2008 г. В. В. Тютекин

Акустический институт им. Н.Н. Андреева
117036 Москва, ул. Шверника 4.
E-mail: Tyutekin@akin.ru

Поступила в редакцию 20.09.07 г.

В статье рассматриваются нормальные спирально-винтовые волны волновода, представляющего собой тонкую упругую оболочку, заполненную жидкостью. Получено дисперсионное уравнение для такого типа волн и приведены его решения для некоторых частных значений параметров задачи.

PACS: 43.20.Mv, 43.35.Cg, 46.40.Cd, 62.30.+d

В научной литературе имеется большое количество работ, посвященных исследованию распространения упруго-жидкостных волн в цилиндрических оболочках, взаимодействующих с жидкостью (см., например, [1–6]). Это связано, с одной стороны, с теоретическим интересом к данной проблеме, с другой – широким практическим применением таких работ. До сих пор в большинстве случаев в обоих этих аспектах рассматривались решения, периодические по углу θ. В этом случае они имеют зависимость от θ в виде $\cos n\theta$ или $\sin n\theta$, где $n = 0, 1, \ldots$, что соответствует по θ стоячей волне.

Рассмотрение непериодических решений ($\sim\exp(iv\theta)$ позволило установить возможность существования нормальных волн винтового типа в цилиндрической оболочке [7] и спирально-винтового типа в цилиндрическом акустическом волноводе [8, 9]. В настоящей работе такие решения применяются к задаче о нормальных волнах упругой цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью. В этой задаче, по существу, рассматривается взаимодействие волн, рассмотренных в этих работах.

В качестве уравнения движения оболочки возьмем те же, что и в работе [7]. При наличии жидкости внутри оболочки они могут быть записаны в виде следующей системы:

$$L\mathbf{U} = \mathbf{f}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{U} = (u, v, w)^T$ вектор смещения оболочки, L – матричный дифференциальный оператор, имеющий вид:

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1+\sigma}{2a^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + k_p^2;$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{1+\sigma}{2a}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\theta};$$

$$L_{13} = -L_{31} = -\frac{\sigma}{a}\frac{\partial}{\partial z};$$

$$L_{22} = \frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + k_p^2;$$

$$L_{23} = -L_{32} = -\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial\theta};$$

$$L_{33} = -\left(\frac{h^2}{12}\Delta^2 + \frac{1}{a^2} - k_p^2\right);$$

Здесь z и θ – цилиндрические координаты, u и v – смещения по осям z и θ, w – смещение, перпендикулярное к поверхности оболочки, a – ее радиус, h – толщина. Кроме того, $k_p^2 = \frac{\rho\omega^2(1-\sigma^2)}{E}$ – квадрат волнового числа продольных волн в пластине, c_p – их скорость, ρ – плотность, E – модуль Юнга, σ – коэффициент Пуассона, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$, $\mathbf{f} = g(0, 0, p(a))^T$, коэффициент $g = 1 - \frac{1-\sigma^2}{Eh}$, p – звуковое давление в жидкости, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца

$$(\Delta_1 + k_0^2)p = 0, \qquad (2)$$

где $\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$, k_0 – волновое число в жидкости.

Кроме уравнений (1) и (2) необходимо использовать граничное условие, заключающееся в равенстве нормальных смещений оболочки и жидкости;

$$w = -\frac{1}{\rho_0\omega^2}\frac{\partial p}{\partial r} \quad \text{при} \quad r = a, \tag{3}$$

где ρ_0 – плотность жидкости.

Решение уравнений (1)–(3) будем искать в виде бегущих волн

$$\mathbf{U}(\theta, z) = \mathbf{U}_0 e^{i(kz + \nu\theta)}; \tag{4}$$

$$p(r, \theta, z) = p_0(r) e^{i(kz + \nu\theta)} \tag{5}$$

где $\mathbf{U}_0 = (u_0, v_0, w_0)^T$ и p_0 – амплитуды волн соответственно, в оболочке и жидкости, k – неизвестное волновое число, ν – произвольный параметр. Подставляя выражение (5) в уравнение (2) и решая полученное уравнение для p_0, будем иметь ограниченное при $r = 0$ решение

$$p_0(r) = A_0 J_\nu(qr) \tag{6}$$

Здесь $q = \sqrt{k_0^2 - k^2}$, A_0 – неизвестный коэффициент. Отметим, что условие ограниченности величины p_0 выполняется при всех $\nu \geq 0$.

Следуя работе [8], введем в рассмотрение волновое число $\mathbf{k}_B$, определяемое выражением

$$\mathbf{k}_B = \text{grad}\varphi = k\mathbf{z} + \frac{\nu}{r}\boldsymbol{\theta}$$

и связанное с волновыми числами k и $k_k = \frac{\nu}{r}$ (k_k – волновое число круговых волн) соотношениями

$$k_B^2 = k^2 + k_k^2 = k^2 + \frac{\nu^2}{r^2};$$

$$k = k_B\cos\alpha; \quad k_k = k_B\sin\alpha,$$

где α – угол между вектором k_B и осью. Этот угол изменяется при возрастании r от значения 90° на оси волновода до угла "выхода" волны на его поверхность $\alpha_0 = \text{arctg}\frac{\nu}{ka}$. Таким образом, направление винтовой волны в начале координат перпендикулярно оси волновода, а при увеличении r угол α уменьшается и достигает минимального значения α_0 на поверхности волновода [8]. При этом волновой вектор $\mathbf{k}_B$ образует винтовую линию, лежащую на цилиндрической поверхности любого радиуса $\alpha \leq r \leq 0$. Волновой фронт также является винтовой линией ортогональной волновому вектору. На основании этих свойств винтовых волн их совокупность (во всем объеме волновода) можно трактовать как стоячую спиральную волну, поскольку ее амплитуда зависит от r, но отсутствует изменение фазы в радиальном направлении.

Как было указано выше, решение (6) при $r = 0$ является ограниченным, в то время как такая ограниченность для другой физической величины – колебательной скорости – вызывает ограничение значений показателя ν [9], который определяются соотношениями $\nu = 0$ и $\nu \geq 1$. Первое значение соответствует известным осесимметричным нормальным волнам, которые здесь не рассматриваются.

Из соотношения $\nu = k_k a = k_B a\sin\alpha_0$ следует линейная связь между безразмерной скоростью $C = c_B/c_0$ на поверхности волновода и безразмерной частотой $Y = k_0 a$.

$$C = Y\sin\alpha_0/\nu \tag{7}$$

Значение $\nu = 1$ определяет критические значения этих величин C_r и Y_r

$$C_r = Y_r\sin\alpha_0 \tag{8}$$

Формулу (7) для размерной величины скорости можно переписать в виде

$$c = \frac{\omega a\sin\alpha_0}{\nu}$$

Требования по периодичности решения ($\nu = n$) должны выполняться только для волн кругового типа ($\alpha_0 = 90°$), что соответствует целому числу длин волн по углу θ.

Таковы общие свойства спирально-винтовых волн цилиндрических волноводов, не зависящие от граничных условий на их поверхности. Эти условия определяют только зависимость $C(Y)$ (величина ν переменная) и значения Y_r.

Подставляя выражения (4) и (6) в (1) и исключая множитель $\exp[e^{i(kz + \nu\theta)}]$, получим следующую систему уравнений относительно компонентов вектора $\mathbf{U}_1 = (u_0, v_0, w_0, A_0)^T$:

$$\left(k_p^2 - k^2 - \frac{1+\sigma}{2a^2}\nu^2\right)u_0 - \frac{1+\sigma}{2a}\nu k v_0 - i\frac{\sigma}{a}k w_0 = 0;$$

$$-\frac{1+\sigma}{2}\nu k u_0 + \left(k_p^2 - \frac{\nu^2}{a^2} - \frac{1-\sigma}{2}k^2\right)v_0 - i\frac{\nu}{a^2}w_0 = 0;$$

$$i\frac{\sigma}{a}k u_0 + i\frac{\nu}{a^2}v_0 - \left[\frac{h^2}{12}\left(k^2 + \frac{\nu^2}{a^2}\right)^2 + \right. \tag{9}$$

$$\left. + \frac{1}{a^2} - k_p^2\right]w_0 - gJ_\nu(qa)A_0 = 0;$$

$$w_0 + \frac{1}{\rho_0\omega^2}\left[qJ_{\nu+1}(qa) - \frac{\nu}{a}J_\nu(qa)\right]A_0 = 0$$

Для получения дисперсионного уравнения относительно величины k_B (в оболочке), подставим

в (10) величины k_B и α_0, используя указанные выше замены. (Для упрощения записи всюду в дальнейшем будем писать α). В результате, получим следующее матричное уравнение:

$$A(X, \alpha)\mathbf{U}_1 = 0 \qquad (10)$$

Здесь $A(X, \alpha)$ – матрица 4×4, имеющая составляющие:

$$A_{11} = (1 - c\sin^2\alpha)X^2 - 1;$$

$$A_{12} = A_{21} = \frac{c}{2}\sin 2\alpha X^2;$$

$$A_{13} = -A_{31} = i\sigma\cos\alpha\frac{X}{Y};$$

$$A_{22} = (1 - c\cos^2\alpha)X^2 - 1;$$

$$A_{23} = -A_{32} = i\sin\alpha\frac{X}{Y};$$

$$A_{33} = \frac{(HY)^2}{12}X^4 + \frac{1}{Y^2} - 1;$$

$$A_{34} = -\frac{m}{H}J_\nu(qY); \quad A_{43} = 1;$$

$$A_{44} = qaJ_{\nu+1}(qa) - \nu J_\nu(qa);$$

$$A_{14} = A_{41} = A_{24} = A_{42} = 0.$$

С целью безразмерного представления уравнения (10) здесь введены следующие обозначения: $X = \frac{k}{k_p}$; $Y = k_p a$; $H = \frac{h}{a}$; $c = \frac{1+\sigma}{2}$; $n = c_p/c_0$; $qa = Y\sqrt{n^2 - (X\cos\alpha)^2}$; $m = \rho_0/\rho$; $\nu = XY\sin\alpha$.

Дисперсионное уравнение можно представить в виде

$$\det A(X, \alpha) = 0 \qquad (11)$$

Все выполненные ниже расчеты проводились для водозаполненной оболочки при следующих ее параметрах

$$\sigma = 0.3; \quad H = 0.1; \quad c_p = 5000 m/s;$$

$$n = 3.33; \quad \rho = 7.8 t/m^3.$$

Начнем рассмотрение результатов со случая осесимметричных нормальных волн. Хотя они не относятся к типу спирально-винтовых волн, но могут служить первичным источником при рассмотрении процесса их трансформации при изменении угла α [7].

На рис. 1а представлены безразмерные волновые числа X отдельно для оболочки (кривые *1*) и жидкого волновода с абсолютно мягкой (2) и жесткой (3) стенками в зависимости от безразмерной частоты Y. Поскольку эти величины выражены через волновое число продольных волн в оболочке, критические частоты волновода в n раз меньше, а предельные значения волновых чисел в n раз больше, чем при обычном представлении. На рис. 1б представлены те же величины для оболочки с жидкостью, то есть при взаимодействии нормальных волн оболочки и волновода, приведенных на рис. 1а. Из рисунка видно, как эти волны взаимодействуют друг с другом около значений $X_p \approx 1$, (кривые *1a* и *1d*) соответствующих продольной волне в оболочке. Крутильная волна

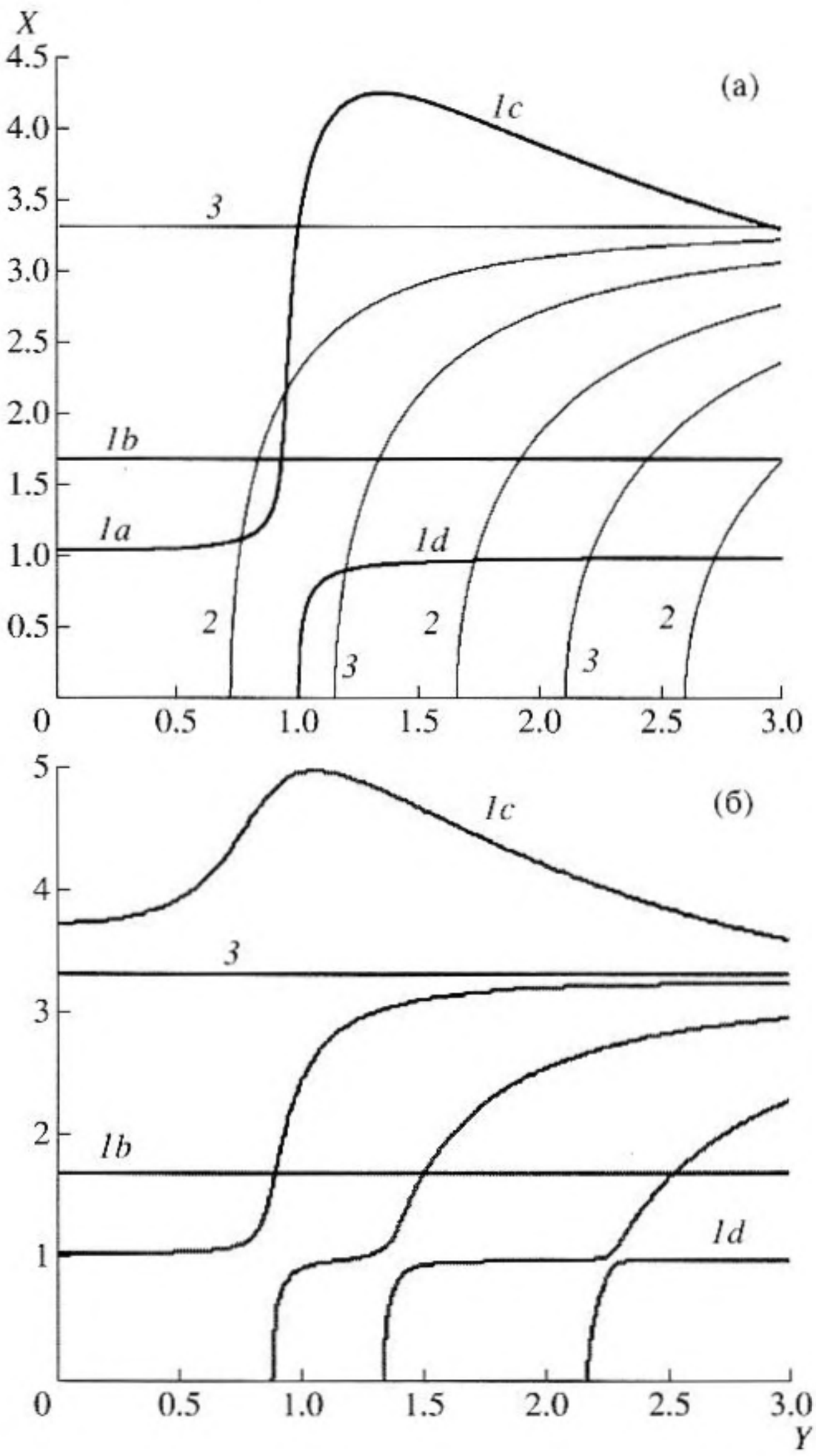
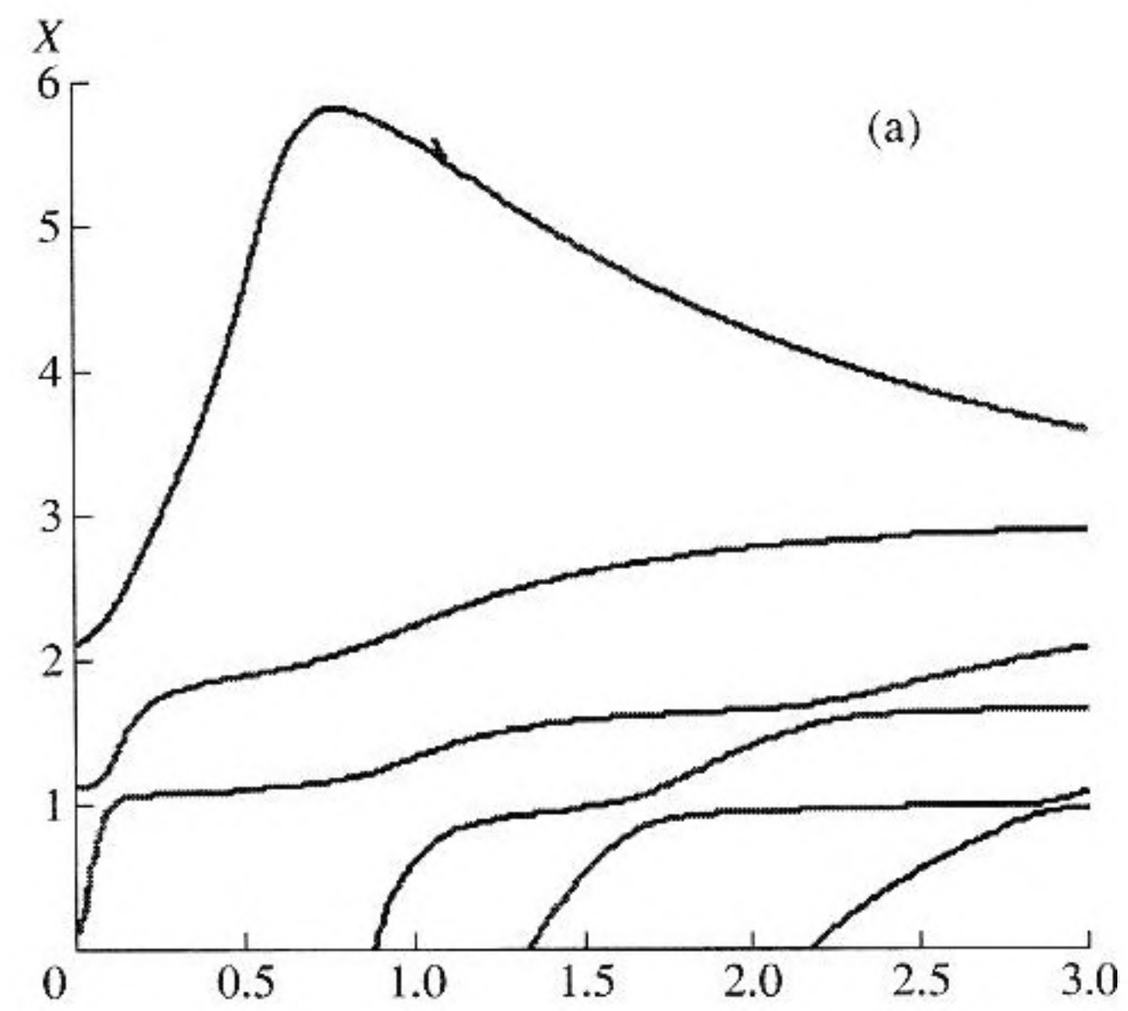


Рис. 1. а) Безразмерные волновые числа осесимметричных ($\nu = 0$) нормальных волн для оболочки (1) и для жидкого волновода (2) и (3).

1a – юнговская волна; *1b* – крутильная волна; *1c* – изгибная волна; *1d* – продольная волна. *2* – с мягкой границей. *3* – с жесткой границей. б) То же, что на рис. 1а для оболочки, заполненной жидкостью. Обозначения те же.



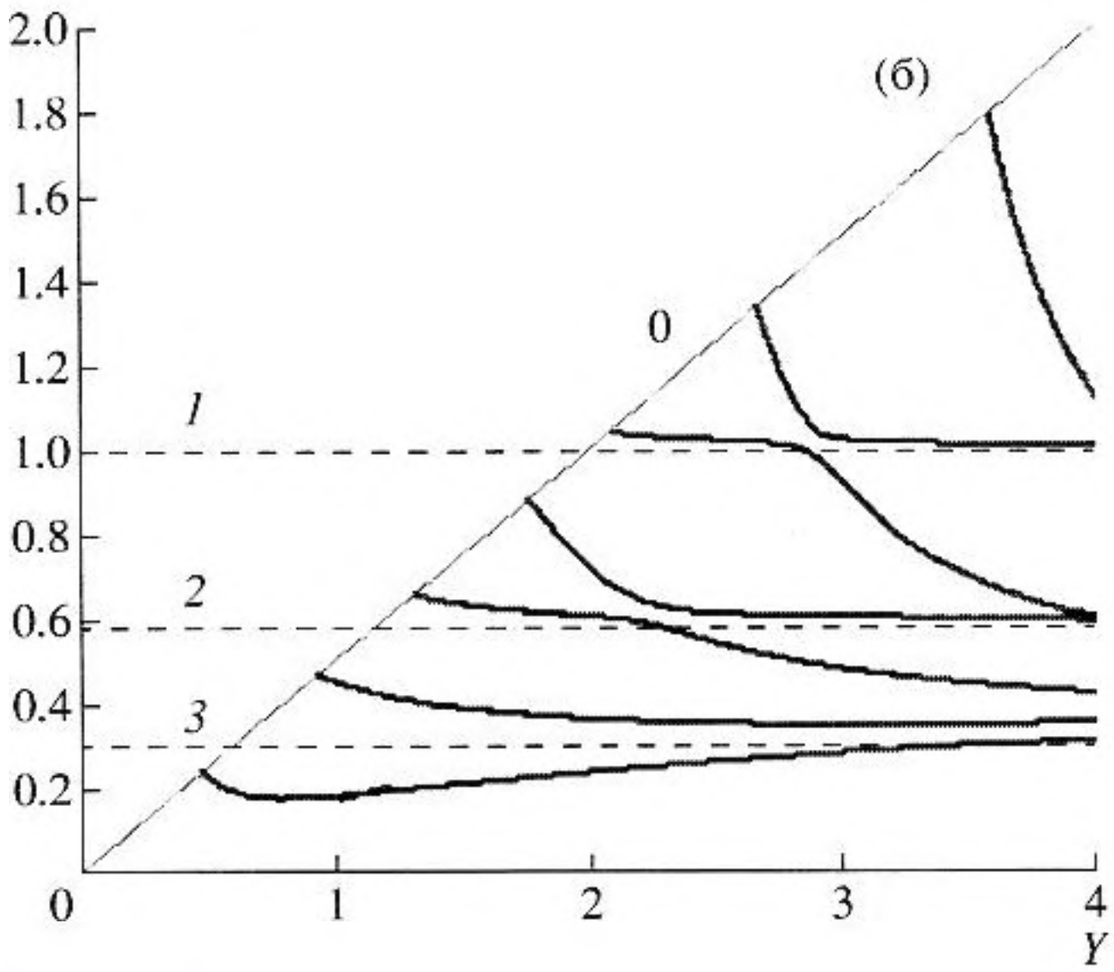


Рис. 2. а) То же, что на рис. 1б для нормальных винтовых волн с величиной $\alpha_0 = 30°$. б) Безразмерные фазовые скорости нормальных винтовых волн с величиной $\alpha_0 = 30°$. Прямая 0 соответствует критическому значению $\nu = 1$.

оболочки $X_c = 1.69$ (кривая *1b*) не взаимодействует с нормальными волнами волновода из-за различия в поляризации. При увеличении частоты Y величины X стремятся к предельному значению $X_0 = n = 3.33$ (кривая *3*).

На рис. 2а приведены данные расчета величины X для угла $\alpha_0 = 30°$ без учета ограничения $\nu \geq 1$, поскольку они дают наглядное представление об изменении взаимодействия нормальных волн оболочки и волновода по сравнению с рис. 1б. Так появляется связь волноводных волн с крутильной волной оболочки. На рис. 2б представлены те же данные, пересчитанные на величину безразмерной скорости $C = 1/X$ и с учетом указанного ограничения. Видно, что дисперсионные ветви начинаются в точках (Y_r, C_r), лежащих на прямой 0, задаваемых соотношением (8). Значения C, при которых происходит наибольшее взаимодействие, отмечены прямыми *1* ($C_p = 1$) и 2 ($C_c = 1/X_c = 0.59$). Прямая *3* ($C_0 = 1/X_0 = 0.3$) соответствует скорости звука в жидкости.

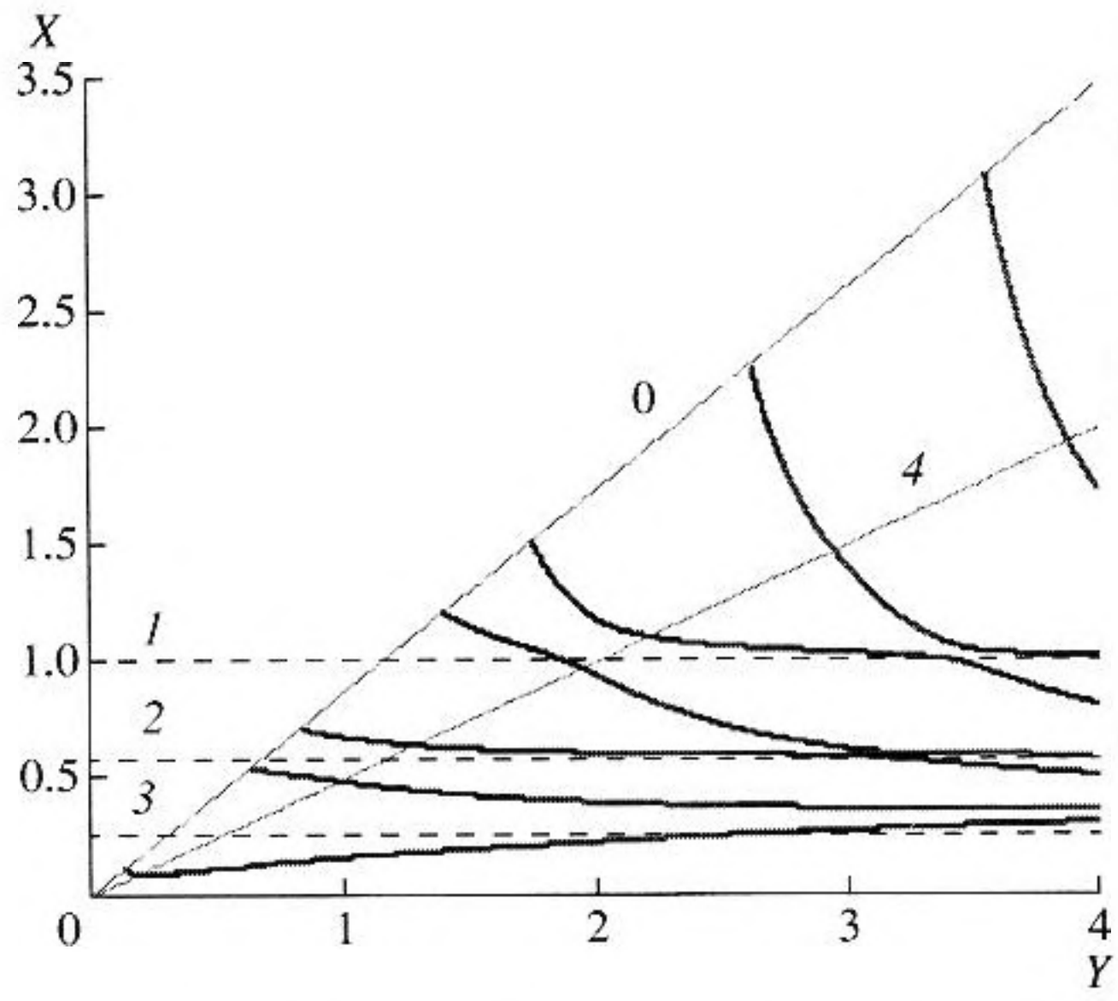


Рис. 3. То же, что на рис. 2б для $\alpha_0 = 60°$. Прямая *4* соответствует значению $\nu = 2$.

На рис. 3 представлены аналогичные данные для угла $\alpha_0 = 60°$. Видно, что область значений скорости C расширяется в область ее больших значений. Необходимо отметить, что по мере увеличения частоты значения ν вдоль каждой ветви увеличиваются. В качестве примера на рис. 3 проведена прямая 4, задаваемая формулой (7) при значении $\nu = 2$. Ее пересечение с дисперсионными ветвями дает значения скорости нормальных винтовых волн для этой величины ν. Используя подобные графики, можно этим весьма простым способом, определить спектр частот и скоростей таких волн для любых значений параметра ν.

В заключение отметим, что все дисперсионные ветви, приведенные выше, на любой частоте соответствуют одному и тому же углу "выхода" волны на поверхность волновода α_0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kennard E.H.* The new approach to shell theory of circular cylinders // J. Appl. Mech. 1953. V. 20. № 1. P. 33–40.
2. *Lin T.C., Morgan C.W.* Wave propagation through fluid contained in a cylindrical elastic shell // J. Acoust. Soc. America. 1956. V. 28. № 6. P. 1165–1176.
3. *Kumar Ram.* Dispersion of axially symmetric waves in empty and fluid-filled cylindrical shells // Acustica. 1972. V. 27. № 6. P. 317–329.

4. *Kumar R.* Axially symmetric vibrations of a thin cylindrical elastic shell filled with fluid // Acustica. 1966. V. 17. № 4. P. 218–222.
5. *Меркулов В.Н., Приходько В.Ю., Тютекин В.В.* Возбуждение и распространение нормальных волн в тонкой упругой цилиндрической оболочке, заполненной жидкостью // Акуст. журн. 1978. Т. 24. № 5. С. 723–730.
6. *Шендеров Е.Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: "Судостроение", 1972. 348 с.
7. *Тютекин В.В.* О винтовых волнах упругой цилиндрической оболочки // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 3. С. 331–336.
8. *Тютекин В.В.* Круговые и спирально-винтовые нормальные волны цилиндрического волновода. Спиральные волны в свободном пространстве // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 4. С. 549–555.
9. *Тютекин В.В.* О свойствах круговых и спирально-винтовых волн цилиндрического волновода // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 1. С. 18–19.

Helical Waves in a Fluid-Filled Cylindrical Elastic Shell

V. V. Tyutekin

Andreev Acoustics Institute, Russian Academy of Sciences, ul. Shvernika 4, Moscow, 117036 Russia
e-mail: Tyutekin@akin.ru

Abstract—Helical normal waves of a waveguide that has the form of a fluid-filled thin elastic shell are considered. A dispersion equation for this kind of waves is derived, and its solutions are presented for certain values of parameters characterizing the problem.