АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2008, том 54, № 1, с. 32–39

ФИЗИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

УДК 534.535

СТРУКТУРА ПЛАНАРНОГО НЕМАТИЧЕСКОГО ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА В ОСЦИЛЛИРУЮЩЕМ ПОТОКЕ КУЭТТА ЗА ПОРОГОМ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

© 2008 г. Е. Н. Кожевников

Самарский государственный университет

443011 г. Самара, ул. Ак. Павлова 1

E-mail: kozhev@ssu.samara.ru

Поступила в редакцию 14.12.06 г.

Теоретически описана деформация планарно ориентированного нематического жидкого кристалла при воздействии осциллирующего потока Куэтта; рассмотрены амплитуды воздействия, превышающие порог потери устойчивости исходной структуры кристалла. Анализ эффекта строится методом возмущений на основе нелинейных уравнений нематодинамики. Определен вид и величина искажений НЖК-структуры в зависимости от частоты и амплитуды сдвига.

PACS: 43.35.Pt, 43.35.Sx, 43.35.Ig

Реакция структуры нематического жидкого кристалла (НЖК) на периодический сдвиг разнообразна и зависит от геометрии, частоты и интенсивности воздействия (напр. [1]). При гомеотропной ориентации кристалла малые амплитуды сдвига меняют прозрачность НЖК-слоя; с увеличением амплитуды в слое возникают пространственно-модулированные структуры, наблюдаемые оптически как "домены" [3–7]. Малые амплитуды периодического сдвига в НЖК-слое с исходной планарной ориентацией не приводят к значительной деформации структуры и изменению оптических свойств слоя. Искажения структуры планарного НЖК-слоя в осциллирующих потоках наблюдаются лишь при их критическом нарастании за порогом образования [8–12] и для описания реакции кристалла на периодический сдвиг необходимо анализировать механизмы неустойчивости нематической структуры.

При воздействии периодического течения Куэтта на планарный НЖК-слой, ориентированный вдоль потока, в слое возникают ролл-домены, вытянутые перпендикулярно направлению сдвига [8]. В теоретическом анализе эффекта [8] появление доменов объясняется инерцией среды, которая приводит к запаздыванию скорости вторичных осциллирующих потоков от скорости в потоке Куэтта. Экспериментальное наблюдение пороговой деформации планарного НЖК-слоя в осциллирующих потоках Куэтта и Пуазейля со скоростью потока, ортогональной ориентации кристалла, впервые описано в работах [9, 10]. В этих исследованиях частота осцилляций f и толщина h слоя менялись в широком диапазоне: $f = 10^{-3}$–10^{2} Гц, h = 30–300 мкм. Авторы отмечают появление как однородных искажений, так и ролл-доменов, ориентированных параллельно скорости потока, исследовано изменение вида искажений при наложении электрического и магнитного полей. В работе [11] исследованы экспериментально структуры, возникающие в планарном НЖК-слое при одновременном воздействии на него осциллирующих потока Куэтта и сжатия. Показано, что при малых амплитудах сжатия наблюдаемая деформация структуры схожа с описанной в работах [9, 10].

Воздействие осциллирующего потока Куэтта на структуру планарного НЖК-слоя впервые проанализировано в работах [12–14]. В работе [15] исследовано экспериментально и теоретически воздействие осциллирующего потока Куэтта на планарный НЖК-слой с ориентацией неортогональной скорости потока. Наблюдаемое в эксперименте увеличение пороговых значений s_0 и волнового числа доменов k при уменьшении угла между директором и скоростью потока объясняется изменением эффективных вязкостей нематического кристалла. Теоретическая картина искажений НЖК-структуры в осциллирующем потоке Куэтта уточнена в работе [16], где, в частности, дан анализ типа структуры в зависимости от частоты воздействия и коэффициента вязкости Лесли α_3, а также в работе [17], в которой проводится компьютерное моделирование воздействия осциллирующего потока Куэтта на планарный НЖК-слой.

В теоретических работах [9, 10, 12–17] вычисляются лишь пороговые характеристики эффекта: пороговая амплитуда сдвига и волновое число k, определяющее размер доменов на пороке эффек-

та при $k \neq 0$ или констатирующее однородность искажений при $k = 0$. В экспериментальных работах [9, 10, 12] также приводятся лишь пороговые значения амплитуды сдвига и размера доменов. Исключение представляет работа [11], в которой помимо пороговых параметров приведены данные экспериментального исследования искажений НЖК-структуры за порогом эффекта. Показано, что в НЖК-слое толщиной 35 мкм на частоте 20 Гц увеличение амплитуды сдвига за порогом эффекта приводит к уменьшению ширины доменов (примерно вдвое). Установлено также возникновение за порогом эффекта вторичных "несоразмерных" структур. Авторы высказывают предположение о природе вторичных структур, однако теоретический анализ эффекта отсутствует.

Наблюдаемые визуально искажения структуры кристалла за порогом неустойчивости в осциллирующих потоках разнообразны и зависят от расстояния до порога эффекта, геометрии и частоты воздействия, толщины слоя [11]. Искажения НЖК-структуры за порогом заслуживают отдельного теоретического анализа, однако до настоящего времени такой анализ не проводился, и в данной работе он проводится впервые. Рассматривается воздействие на кристалл низкочастотного осциллирующего потока Куэтта, определяется конфигурация и наблюдаемая картина искажений за порогом их образования. Предполагается отсутствие дополнительных факторов воздействия на НЖК-слой.

Анализ искажений НЖК-структуры проводится на основе нелинейных уравнений нематического кристалла, в которых сохраняются кубические по возмущениям слагаемые; решение нелинейных уравнений строится методом возмущений.

Уравнения, описывающие течение жидкости и вращение молекул в нематическом жидком кристалле, следуя [18, 19], представим в виде

$$\gamma_1 N_i - \gamma_2[U_{ij}n_j - (U_{jk}n_jn_k)n_i] - \Gamma_i = 0,$$
$$\rho\dot{\mathbf{U}} = -\nabla P + \nabla\hat{\sigma} \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{n}$ – директор, определяющий направление выстраивания молекул, $\mathbf{U}$ – скорость жидкости, U_{ij} – компоненты тензора скорости деформации, $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{n}} - 1/2(\mathrm{rot}\,\mathbf{U} \times \mathbf{n})$ – скорость вращения молекул по отношению к окружающей жидкости, ρ – плотность, P – давление, $\hat{\sigma}$ – тензор вязких напряжений γ_α – коэффициенты вращательной вязкости, $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{h} - (\mathbf{h}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$, $\mathbf{h}$ – упругая сила Франка:

$$\mathbf{h} = \nabla_i\frac{\partial g}{\partial(\nabla_i\mathbf{n})} - \frac{\partial g}{\partial\mathbf{n}},$$

g – плотность упругой энергии Франка

$$g = \frac{1}{2}\{K_{11}(\mathrm{div}\mathbf{n})^2 + K_{22}(\mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{n})^2 + K_{33}(\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\mathbf{n})^2\},$$

K_{ii} – упругие модули. Компоненты вязких напряжений с учетом уравнения вращения молекул (1) приводятся к виду:

$$\sigma_{ij} = \alpha_4 U_{ij} + (\alpha_6 - \alpha_3\gamma_2/\gamma_1)(U_{ik}n_kn_j + U_{jk}n_kn_i) +$$
$$+ (\gamma_2^2/\gamma_1 + \alpha_1)U_{km}n_kn_mn_in_j + \alpha_2\Gamma_in_j + \alpha_3\Gamma_jn_i,$$

Рассмотрим искажения структуры кристалла в осциллирующем потоке Куэтта. Рассмотрим в анализе эффекта частоты ω, ограниченные сверху неравенствами

$$\frac{2\rho\omega h^2}{a_4} < 1, \quad \frac{\gamma\omega h^2}{K_{33}} < 2\times10^4. \tag{2}$$

Первое неравенство указывает на бóльшую длину вязких волн по сравнению с толщиной слоя h и позволяет рассматривать линейный профиль скорости в потоке Куэтта. При выполнении второго неравенства инерция среды не влияет на образование искажений [16], что позволяет опустить инерционные слагаемые в уравнениях движения.

Направим оси y и x в срединной плоскости соответственно вдоль и перпендикулярно плоскости потока, а ось z – перпендикулярно плоскости слоя, считая, что границы слоя соответствуют значениям $Z = \pm h/2$ (h – толщина слоя). Скорость в осциллирующем потоке Куэтта и ее градиент S имеют вид

$$U_{0x} = U_{0z} = 0, \quad U_{0y} = \omega s_0 Z\cos(\omega T)$$
$$S = \partial U_{0y}/\partial Z = \omega s_0\cos(\omega T) \tag{3}$$

Величина s_0 является безразмерной амплитудой сдвига и равна отношению амплитуды смещения граничной пластины к толщине слоя.

При амплитудах s_0, меньших некоторой пороговой величины, нематический кристалл сохраняет структуру с исходной ориентацией молекул. Если s_0 превышает пороговое значение, возникает устойчивое искажение, при котором молекулы колеблются около нового равновесного направления. Возможные конфигурации искажений описаны в работе [16], там же указано, что практически можно наблюдать искажения двух видов с конфигурациями (1.1) и (1.2): в первой из них возникает стационарная составляющая в отклонении молекул от исходной ориентации по нормали к плоскости НЖК-слоя, а во втором – стационарную составляющую имеет угол поворота в плоскости слоя. В том и другом случае возможны как однородные вдоль слоя искажения так и пространственно-модулированные структуры, в которых ориентация молекул периодически меняется в направлении ортогональном скорости потоков.

В данной работе анализ искажений за порогом эффекта проводится для конфигурации (1.1). Вычисляется как функция частоты и амплитуды

сдвига угол стационарного поворота молекул, определяющего переход кристалла в новое ориентационное состояние. Найден пространственный спектр искажений, анализируется вид искажений при их визуальном наблюдении для различных частот и амплитуд сдвига.

В исходной геометрии невозмущенный директор направлен вдоль оси x. В возмущенной структуре директор отклоняется от оси x на угол Ψ в плоскости XY и на угол Θ – в плоскости XZ, а в слое возникают замкнутые потоки со скоростью U. Углы Θ и Ψ считаем малыми и представим компоненты директора разложением в ряд по углам Θ и Ψ, ограничиваясь третьей степенью разложения

$$n_x \approx 1 - \Theta^2/2 - \Psi^2/2,$$

$$n_y \approx \Psi - \Psi^3/6 - \Theta^2\Psi/2, \quad n_z \approx \Theta - \Theta^3/6.$$

В дальнейшем описании перейдем к безразмерным координатам $x = X/h$, $z = Z/h$, времени $t = \omega T$, скоростям $V_k = U_k/\omega h$ и безразмерной скорости сдвига $s = S/\omega = s_0\cos t$, безразмерным коэффициентам вязкости $a_i = \alpha_i/\gamma_1$ для $i = 2, 3, 4$ и $a_6 = (\alpha_6 - \alpha_3\gamma_2/\gamma_1)/2\gamma_1$. Нелинейные уравнения для углов и скоростей потоков приводятся к виду

$$\begin{gathered}
(\partial_t - \varepsilon\Delta_\psi)\Psi + a_2 s(\Theta + V_{y,x}) = -a_2 s(\Theta^2/3 - \Psi^2/2) + \\
+ a_2\Psi^2 V_{y,x} + a_2\Theta\Psi V_{xz} + \varepsilon/2(\Theta^2 + \Psi^2)\Delta_\psi\Psi, \\
(\partial_t - \varepsilon\Delta_\theta)\Theta + a_2 V_{z,x} + a_3(s\Psi + V_{x,z}) = \\
= s(a_2\Theta^2 + a_3\Psi^2/6) + \\
+ a_2\Psi^2 V_{y,x} + a_2\Theta^2 V_{xz} + \varepsilon/2\Theta^2\Delta_\theta\Theta, \\
\hat{D}\partial_x V_z + a_6\partial_x(\partial_x^2 - \partial_z^2)(s\Psi) + \\
+ \varepsilon\partial_x(a_2\partial_x^2 - a_3\partial_z^2)\hat{\Delta}_\theta\Theta = \\
= \partial_z\partial_x^3[-4\Theta^2 V_{xx} - 2(1 + 2a_6)\Psi^2 V_{xx} + \\
+ (1 - 2a_6)\Theta\Psi V_{y,x}] + \\
+ \partial_x^2(\partial_z^2 - \partial_x^2)[s(1 - a_6)\Theta^2\Psi - 2sa_6\Psi^3/3 + \\
+ 2(\Theta^2 - a_6\Psi^2)V_{xz} + 2(1 + a_6)\Theta\Psi V_{xy}], \\
\Delta_y\partial_x V_y + a_6 s\Theta_x + \varepsilon a_2\hat{\Delta}_\psi\Psi = \\
= -\partial_x^2\{(\Psi^2 - a_6\Theta^2)V_{y,x} + 2(1 + a_6)\Theta\Psi V_{xz} + \\
+ s[(1 + a_6/2)\Psi^2 - 2a_6/3\Theta^2]\Theta\} - \\
- \partial_x\partial_z[a_6(\Theta^2 + \Psi^2)V_{y,z} + (1 - 2a_6)\Theta\Psi V_{xx}], \\
V_{x,x} + V_{z,z} = 0,
\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь

$$\hat{D} = \eta(k^4 + 4\pi^4) + (1 + 2\eta)\pi^2 k^2,$$

$$\Delta_y = (\eta k^2 + a_4/2\pi^2),$$

$$\Delta_\theta = (k^2 + L_1\pi^2), \quad \Delta_\psi = (k^2 + L_2\pi^2),$$

$$\Delta = k^2 + \pi^2,$$

$$\eta = \frac{\alpha_4 + \alpha_6}{2\gamma}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\omega\tau},$$

$$\tau = \frac{\gamma_1 h^2}{K_{33}}, \quad L_i = \frac{K_{ii}}{K_{33}}, \quad i = 1, 2.$$

В конфигурации искажений (1.1) углы θ, ψ и скорости V_z, V_y четны по координате z. В одномодовом по z приближении представим их в виде

$$\begin{pmatrix} \Theta \\ \Psi \\ V_z \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta\cos(\pi z) \\ \psi\cos(\pi z) \\ v_z[1 + \cos(2\pi z)] \\ v_y\cos(\pi z) \end{pmatrix}\cos(kx),$$

удовлетворяющем граничным условиям. Коэффициенты θ, ψ, v_z, v_y зависят от времени, за порогом эффекта эта зависимость периодическая. Волновое число k определяет ширину доменов $d = \pi h/k$.

Выделим систему уравнений для θ, ψ, v_z, v_y, умножая уравнения (4) на $\cos\pi z\cos kx$ и интегрируя по толщине слоя и по x в пределах от 0 до $2\pi/k$. Исключим из системы скорости потоков, сохраняя при преобразованиях кубические по возмущениям слагаемые и учитывая неравенства (2). Для угловых переменных θ, ψ получим следующую систему уравнений

$$\begin{gathered}
\dot{\theta} + \lambda_1\theta - h_1 s\psi = F_1, \\
\dot{\psi} + \lambda_2\psi - h_2 s\theta = F_2.
\end{gathered} \tag{5}$$

Параметры λ_k и h_k имеют вид

$$\begin{gathered}
\lambda_1 = \frac{1}{\omega\tau_1}, \quad \tau_1 = \frac{\tau}{\Delta_\theta}\left[1 + \frac{3(a_2k^2 - a_3\pi^2)^2}{16D}\right]^{-1}, \\
\lambda_2 = \frac{1}{\omega\tau_2}, \quad \tau_2 = \frac{\tau}{\Delta_\psi}\left[1 + a_2^2\frac{k^2}{\Delta_y}\right]^{-1}, \\
h_1 = -\left[a_3 - a_6\frac{(k^2 - \pi^2)(a_2k^2 - a_3\pi^2)}{D}\right], \\
h_2 = -a_2\left(1 - a_6\frac{k^2}{\Delta_y}\right).
\end{gathered} \tag{6}$$

Правые части уравнений (5) содержат кубические по θ и ψ слагаемые

$$F_1 = s(A\theta^2\psi + B\psi^3), \quad F_2 = s(C\theta^3 + E\psi^2\theta),$$

в которых параметры A, B, C, E определяются выражениями

$$A = \frac{9}{16} + \frac{9}{16}\frac{(1-2a_6)k^2(k^2-\pi^2) - a_6(k^2-\pi^2)^2}{D} +$$

$$+ \frac{a_6}{8}\frac{4\pi^2k^4(k^2-\pi^2) - 9(k^2-\pi^2)^3k^2}{D^2} - \frac{9a_6k^2}{8\Delta_y} -$$

$$- \frac{9}{8}\frac{a_6(1+2a_6)k^4(k^2-\pi^2)}{\Delta_y\Delta},$$

$$B = -\frac{a_6k^2(\pi^2-k^2)[9a_6(k^4+\pi^4) + (2-22a_6)k^2\pi^2 - 3D]}{8D^2},$$

$$C = \frac{3(1-a_6) + 18a_6^2}{16} + \frac{a_6^2k^2\pi^2}{8\Delta_y^2},$$

$$E = -\frac{9}{32} - \frac{6a_6^2(k^2-\pi^2)^2}{D} +$$

$$+ \frac{(18+37a_6)k^2}{32\Delta_y} - \frac{a_6[9k^4 + (1-2a_6)k^2\pi^2]}{8\Delta_y^2}.$$

Ищем решение уравнений (5) в виде

$$\theta = \theta_0, \quad \psi = \psi_1\cos t + \psi_2\sin t, \tag{7}$$

учитывающем лишь постоянную составляющую угла θ.

Подставим выражения (7) для углов θ, ψ в уравнения (5). Усредним первое из них по периоду колебаний, второе умножаем последовательно на $\cos t$ и $\sin t$ и также усредняем по времени. Нелинейные уравнения для амплитуд θ_0, ψ_1, ψ_2 принимают вид

$$\lambda_1\theta_0 - \frac{1}{2}h_1s_{00}\psi_1 = f_1 = \frac{1}{4}s_0\psi_1[4A\theta_0^2 +$$

$$+ 3E(\psi_1^2 + \psi_2^2)] + \frac{1}{2}h_2[s_0 - s_{00}\psi_1],$$

$$\psi_2 + \lambda_2\psi_1 - s_{00}h_2\theta = f_2 = \frac{1}{4}s_0\theta[4C\theta_0^2 + \tag{8}$$

$$+ E(3\psi_1^2 + \psi_2^2)] + h_2(s_0 - s_{00})\theta,$$

$$-\psi_1 + \lambda_2\psi^2 = f_3 = \frac{1}{2}s_0E\theta_0\psi_1\psi_2.$$

Здесь s_{00} – значение s_0 на пороге эффекта.

Определим амплитуды деформации кристалла за порогом эффекта методом Пуанкаре. Выделяя из (8) линейные уравнения

$$\lambda_1\theta_0 - \frac{1}{2}h_1s_0\psi_1 = 0,$$

$$\psi_2 + \lambda_2\psi_1 - s_0h_2\theta = 0, \tag{9}$$

$$-\psi_1 + \lambda_2\psi_2 = 0,$$

найдем из условия ненулевого решения системы (9) пороговое значение градиента скорости сдвига s_{00}, при превышении которого возникают стационарные по θ искажения структуры кристалла

$$s_{00} = \sqrt{\frac{2\lambda_1(1+\lambda_2^2)}{h_1h_2\lambda_2}} \tag{10}$$

и собственный вектор $\mathbf{u}$, определяющий соотношение между коэффициентами θ_0, ψ_1, ψ_2 на пороге эффекта

$$\mathbf{u} = \left(1, \frac{2\lambda_1}{h_1s_{00}}, \frac{2\lambda_1}{h_1\lambda_2s_{00}}\right)\theta_0. \tag{11}$$

Определим также собственный вектор $\mathbf{u}^*$ системы уравнений, сопряженных системе (9)

$$\mathbf{u}^* = \left(1, \frac{2\lambda_1}{h_1s_{00}}, -\frac{2\lambda_1}{h_1\lambda_2s_{00}}\right). \tag{12}$$

Приравнивая нулю произведение вектора $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ правых частей системы (8) на $\mathbf{u}^*$ и подставляя в произведение $\psi_1 = 2\lambda_1\theta_0/h_1s_{00}$, $\psi_2 = 2\lambda_1\theta_0/h_1\lambda_2s_{00}$ получим уравнение для амплитуды θ_0 за порогом эффекта. Решая его, найдем θ_0

$$\theta_0 = \sqrt{Q(s_0 - s_{00})}, \tag{13}$$

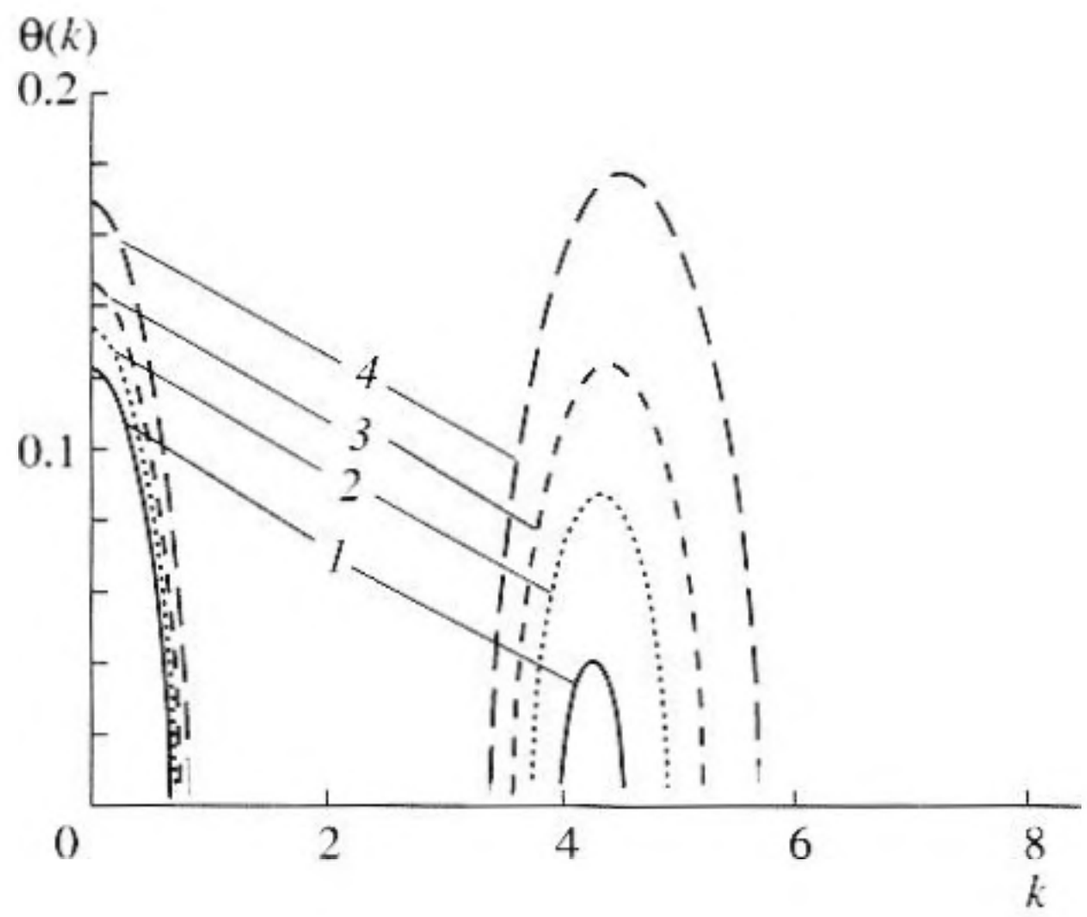

Рис. 1. Пространственный спектр возмущений постоянной составляющей угла $\theta_0 = \theta(k)$ за порогом потери устойчивости структуры НЖК-слоя на частоте $\omega\tau = 10$. Кривые: *1* – $s_0/s_{0,2} = 1.016$; *2* – $s_0/s_{0,2} = 1.04$; *3* – $s_0/s_{0,2} = 1.9$; *4* – $s_0/s_{0,2} = 1.17$.

где Q – функция параметров НЖК-слоя и частоты сдвига

$$Q = 2\lambda_2^2 h_1^3 h_2 s_{00}^2 \times$$
$$\times \{E\lambda_1^2 h_1(1-3\lambda_2^2) - 2Ah_1^2 h_2 \lambda_2^2 s_{00}^2 - \quad (14)$$
$$-6Bh_2\lambda_1^2(1+\lambda_2^2) - Ch_1^3\lambda_2 s_{00}^2\}^{-1}.$$

Амплитуда угла ψ при этом определятся выражением

$$\psi = \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} = \sqrt{\frac{2\lambda_1 h_2}{\lambda_2 h_1}}\theta_0. \quad (15)$$

Формула (13) описывает возмущение стационарной составляющей угла θ. Если амплитуда сдвига s_0 меньше порога s_{00} образования устойчивых искажений НЖК-структуры, подкоренное выражение в (13) отрицательно и угол θ_0 равен нулю (а также $\psi = 0$). При $s_0 > s_{00}$ появляются конечные искажения θ_0, нарастающие с продвижением за порог эффекта. Одновременно нарастает и амплитуда осциллирующего угла ψ.

Формула (13) предсказывает появление как однородных, так и пространственно-модулированных искажений. Обозначим через $s_{0,1}$ и $s_{0,2}$ соответствующие значения пороговой амплитуды сдвига s_0. Вид искажений на пороге эффекта определяется минимальным из значений $s_{0,1}$ и $s_{0,2}$ и зависит от приведенной частоты $\omega\tau$. Непосредственно за порогом возможно появление искажений лишь с волновыми числа k_{th}, определяющими минимальное значение s_{00}. На низких частотах $s_{0,1} < s_{0,2}$ – в НЖК-слое возникают однородные по x искажения: $k_{th} = k_{th,1} = 0$. На высоких частотах $s_{0,2} < s_{0,1}$ – в слое возникают пространственно модулированные искажения с волновым числом $k_{th} = k_{th,2} \neq 0$, в которых угол θ гармонически меняется по x: $\theta_0 \sim \cos(k_{th,2}x)$, Для безразмерной частоты, разделяющей эти случаи получено значение $\omega\tau = \Omega_1 \approx 12$.

С продвижением за порог эффекта спектр возмущений расширяется. Появляются пространственные гармоники искажений θ (соответственно и ψ) с волновыми числами в диапазоне $k \in (0, k_1)$ вблизи $k_{th,1} = 0$ и волновыми числами в диапазоне $k \in (k_2, k_3)$, содержащем критическое число $k_{th,2} \neq 0$; ширина этих диапазонов k_1, $k_3 - k_2$ нарастает с увеличением амплитуды сдвига. Причем, вначале при малом продвижении за порог появляются пространственные гармоники искажений с волновыми числами лишь из одного диапазона, содержащего критическое волновое число k_{th}. При дальнейшем увеличении амплитуды сдвига возникают также искажения с волновыми числами из второго диапазона. Наложение друг на друга этих возмущений обусловливает особенности оптической картины искажений планарной НЖК-структуры при воздействии периодического сдвига.

Обсудим вначале видимую картину искажений за порогом эффекта на низких частотах, отвечающих неравенству $\omega\tau < \Omega_1$. Для численной демонстрации особенности формирования искажений остановимся на значении приведенной частоты $\omega\tau = 10$. На этой частоте порог возникновения однородных искажений $s_{0,1}$ меньше порога образования пространственно-модулированной структуры (доменов) $s_{0,2} = 1.19s_{0,1}$. Следовательно, при увеличении амплитуды сдвига в интервале значений $s_{0,1} < s_0 < s_{0,2}$ в НЖК-слое возможно появление лишь слабо модулированных в пространстве искажений; практически деформация структуры выглядит однородной. Если амплитуда сдвига превышает значение $s_{0,2}$, в НЖК-слое возникает также деформация структуры, периодическая вдоль слоя. Для приведенной частоты $\omega\tau = 10$ при $s_0 = s_{0,2}$ безразмерное волновое число искажений k равно $k = k_{th,2} = 4.24$. При дальнейшем увеличении амплитуды сдвига s_0 диапазон волновых чисел вблизи этого значения $k_{th,2}$ расширяется; одновременно, также, как и вблизи $k = 0$, нарастают амплитуды пространственных гармоник. Это изменение пространственного спектра возмущений продемонстрировано на рис. 1, где по формулам (13, 14) построена зависимость $\theta_0 = \theta_0(k)$ для четырех значений амплитуды сдвига, превышающих $s_{0,2}$: $s_0/s_{0,2} = 1.016$; 1.04; 1.09; 1.17.

Результаты расчета, приведенные на рис. 1, показывают, что при увеличении амплитуды сдвига $s_0 > s_{0,2}$, интенсивность пространственных гармоник вблизи $k = k_{th,2}$ нарастает быстрее, чем интенсивность слабо модулированных гармоник с

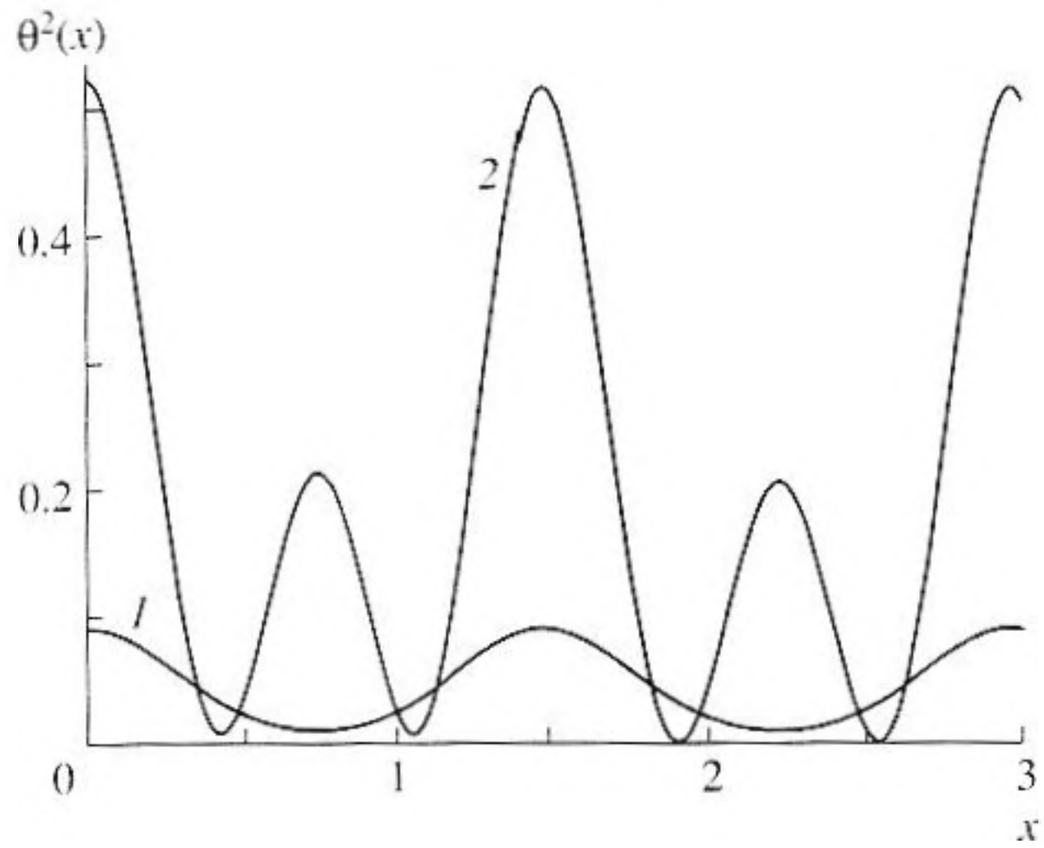

Рис. 2. Пространственное распределение квадрата стационарного угла $\theta^2 = [\theta_{01} + \theta_{02}\cos(kx)]^2$ для приведенной частоты $\omega\tau = 10$ и амплитуд сдвига $s_0 = 1.02s_{0,2}$ (кривая *1*), $s_0 = 1.3s_{0,2}$ (кривая *2*).

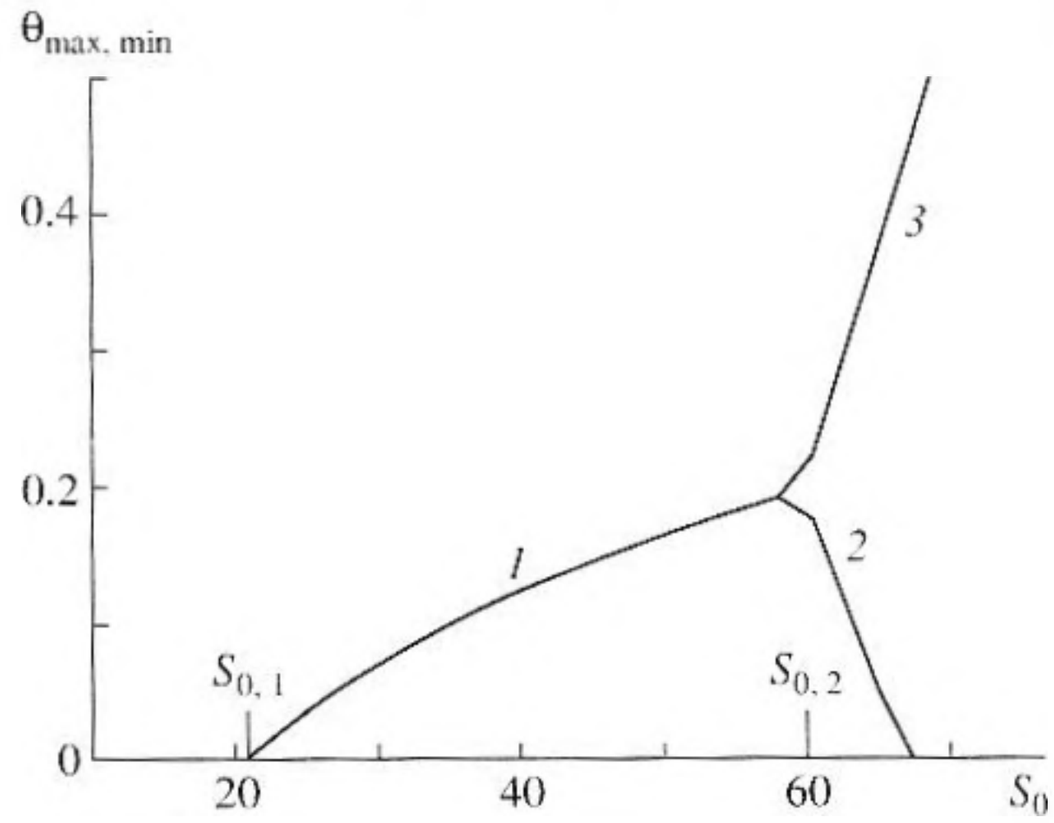

Рис. 3. Зависимость от амплитуды сдвига максимального и минимального по координате x значений угла θ_0 для приведенной частот $\omega\tau = 10$. Кривая *1* – $s_{0,1} < s_0 < s_{0,2}$, кривые *2*, *3* – $s_0 > s_{0,2}$.

волновыми числами вблизи $k = 0$. Оценивая интегрально интенсивность тех и других гармоник

$$\theta_{01} = \int_0^{k_1} \theta_0(k)dk, \quad \theta_{02} = \int_{k_2}^{k_3} \theta_0(k)dk,$$

представим пространственную зависимость угла $\theta = \theta(x)$ в виде

$$\theta(x) \approx \theta_{01} + \theta_{02}\cos(4.24x). \qquad (16)$$

Считая, что выход молекул из плоскости первоначальной ориентации на углы θ и $-\theta$ одинаково наблюдается оптически, будем оценивать видимую картину деформации НЖК-слоя квадратом угла θ

$$\theta^2(x) = [\theta_{01} + \theta_{02}\cos(4.24x)]^2.$$

Распределение квадрата угла $\theta^2(x)$ зависит от значения интегральных амплитуд искажения θ_{01} и θ_{02}. С возрастанием амплитуды s_0 ($> s_{0,2}$) амплитуда θ_{02}, начиная с нулевого значения при $s_0 = s_{0,2}$, нарастает быстрее чем θ_{01}; при некотором значении $s_0 = s_{tr}$ амплитуды θ_{01} и θ_{02} сравниваются. На частоте $\omega\tau = 10$ численный расчет дает значение $s_{tr} = 1.04s_{0,2}$. В диапазоне амплитуд сдвига $s_{0,2} < s_0 < s_{tr}$ на фоне однородного по x искажения структуры θ_{01}, возникает пространственно-модулированное искажение, амплитуда которого $\theta_{02} < \theta_{01}$, а пространственный период искажений наблюдаемой структуры равен $d_1 = 2\pi/k$. При амплитудах сдвига $s_0 > s_{tr}$ получим $\theta_{02} > \theta_{01}$ – в этом случае пространственный период структуры, определяемый как расстояние по x между соседними максимумами, становится равным $d_2 = \pi/k$. Переход от первоначальной ширины доменов d_1 к половинной $d_2 = d_1/2$ продемонстрирован на рис. 2, на котором построено пространственное распределение $\theta^2(x)$ для значений амплитуды сдвига $s_0 = 1.02s_{0,2} < s_{tr}$ и $s_0 = 1.3s_{0,2} > s_{tr}$. Этот же результат представлен графически на рис. 3, на котором построена зависимость от s_0 минимального и максимального по x значений θ, соответственно θ_{min} и θ_{max}.

Уменьшение (примерно вдвое) периода доменов в эксперименте при незначительном увеличении амплитуды сдвига за порогом образования доменов отмечено в работе [11], однако детально эта особенность формирования доменов не исследована.

Видимая картина деформации НЖК-слоя зависит от контрастности в доменах. Оценим ее величиной

$$M = \frac{\theta_{max} - |\theta_{min}|}{\theta_{max} + |\theta_{min}|},$$

где θ_{min}, θ_{max} – соответственно минимальное и максимальное по x значения угла θ_0. При $s_{0,1} < s_0 < s_{0,2}$ деформация кристалла однородна вдоль слоя и контрастность равна нулю; при $s_0 \geq s_{0,2}$ контрастность возрастает с увеличением амплитуды сдвига от нуля до единицы при $s_0 = s_{tr}$. Зависимость контрастности в доменах от амплитуды сдвига отражена на рис. 4.

Следует заметить, что при $s_0 > s_{tr}$ значения θ^2_{max} различны в соседних доменах, поэтому при амплитудах сдвига незначительно превышающих s_{tr} в доменах должна наблюдаться чередующаяся степень деформации НЖК-слоя.

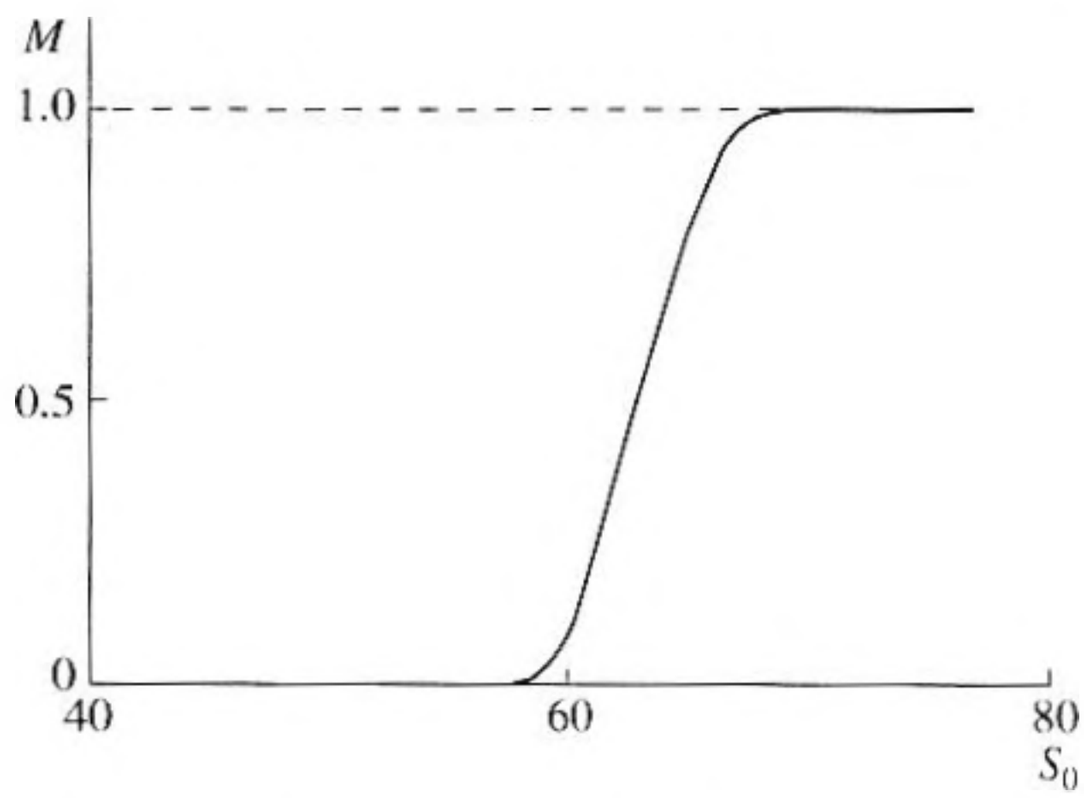

Рис. 4. Зависимость глубины модуляции (контрастность) в доменах $M = (\theta_{max} - |\theta_{min}|)/(\theta_{max} + |\theta_{min}|)$ от амплитуды сдвига s_0 для приведенной частоты $\omega\tau = 10$.

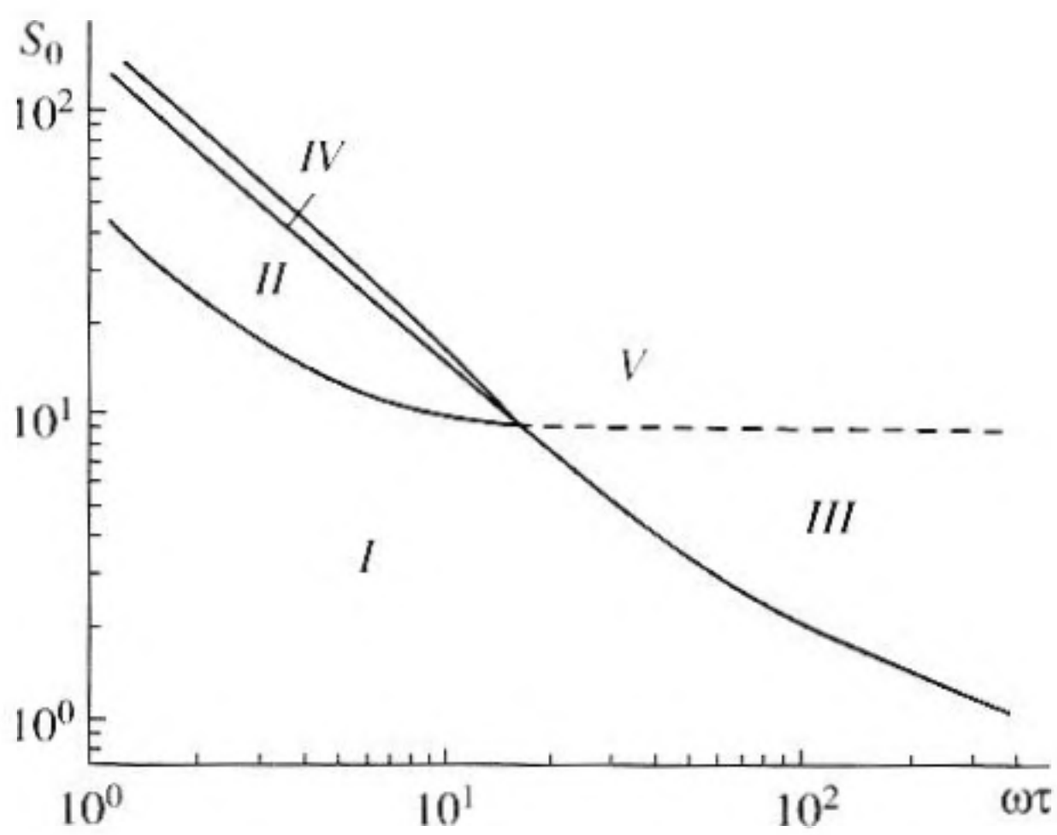

Рис. 5. Пространственное распределение угла θ для различных частот и амплитуд сдвига: *I* – недеформированная структура; *II* – однородная деформация; *III* – пространственно-модулированная структура с периодом $d_2 = 2\pi/k$; *IV* – пространственно модулированная структура с периодом $d_1 = \pi/k$; *V* – пространственно-модулированная структура с периодом $d_2 = \pi/k$ и чередующейся степенью деформации кристалла.

На частотах больших $\omega\tau > \Omega_1$ порог образования пространственно-модулированных искажений $s_{0,2}$ меньше порога образования однородных вдоль слоя искажений структуры $s_{0,1}$. В этом случае за порогом эффекта $\theta_{01} = 0$ и в слое возникают домены с размером, определяемым волновым числом $k_{th,2}$: $d_2 = \pi/k_{th,2}$. Увеличение амплитуды сдвига до значения $s_{0,1}$ приводит лишь к увеличению интегральной амплитуды θ_{02}. Если амплитуда сдвига превысит значение $s_{0,1}$, в слое возникают дополнительно однородные искажения с интегральной амплитудой θ_{01}. Численный расчет показывает, что при значениях безразмерной амплитуды сдвига s_0 вплоть до величин $\sim 10^2$ ($>s_{0,1}$) сохраняется неравенство $\theta_{01} < \theta_{02}$. Таким образом, на частотах $\omega\tau > \Omega_1$ и амплитудах сдвига $s_0 > s_{0,1}$ в НЖК-слое должна наблюдаться доменная структура с постоянной шириной доменов d_2, но с чередующейся прозрачностью.

Описанные типы искажений структуры НЖК-слоя в осциллирующем потоке Куэтта представлены на рис. 5, где на плоскости $\omega\tau$, s_0 определены области стабильности и нестабильности исходной НЖК-структуры, а также указан вид пространственного распределения искажений угла θ_0).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Грант № 04-02-17454).

ПРИЛОЖЕНИЕ

В численном анализе эффекта параметры жидкого кристалла принимались равными соответствующим значениям для жидкого кристалла МБАА [18]:

$\gamma_1 \approx -\alpha_2 = 0.78$ пуаз, $\alpha_3 = 0.02$ пуаз, $\alpha_4 = 0.83$ пуаз, $\alpha_6 = -0.34$ пуаз, $\eta = 0.31$ пуаз, $K_{11} = 5.8 \times 10^{-6}$ дин, $K_{22} = 0.33 \times 10^{-6}$ дин, $K_{33} = 0.8 \times 10^{-6}$ дин; $\rho = 1$ г см$^{-3}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Капустин А.П., Капустина О.А.* Акустика жидких кристаллов. М.: Наука, 1986. 248 с.
2. *Белова Г.Н., Ремизова Е.И.* Акустооптический эффект в неориентированном слое нематического жидкого кристалла при его периодической сдвиговой деформации // Кристаллография. 1986. Т. 31. Вып. 3. С. 517–521.
3. *Белова Г.Н., Ремизова Е.И.* Особенности акустооптического взаимодействия в гомеотропно ориентированном слое нематического жидкого кристалла при его периодической сдвиговой деформации // Акуст. журн. 1985. Т. 31. Вып. 3. С. 289–295.
4. *Börsönyi T., Buka Á., Krekhov A.P., Kramer L.* // Response of homeotropic nematic liquid crystal to rectilinear oscillatory shear Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 7419–7427.
5. *Guazelli E., Guyon E.* Cusp shaped hydrodynamic instability in nematic // J. Phys. (Fr.) 1982. V. 43. P. 915–928.
6. *Kozhevnikov E.N.* Domain structure in a normally oriented liquid crystal layer under action of low-frequency shear // Sov. Phys. JETF. 1986. V. 64. № 5. P. 793–796.
7. *Кожевников Е.Н.* Доменная структура в слое нематического жидкого кристалла в низкочастотном потоке Куэтта // Кристаллография. 2005. Т. 50. № 4. С. 705–711.
8. *Hagan S.J., Mullen T., Woodford P.* Rectilinear low-frequency shear of homogeneously aligned nematic liquid crystals // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1993. V. 441. P. 559.
9. *Pieransky P., Guyon E.* Instability of certain shear flows in nematic liquids // Phys. Rev. A. 1974. V. 9. № 1. P. 404–417.
10. *Guyon E., Pieransky P.* Poiseuille flow instabilities in nematics // J. Phys Coll. (Fr). 1975. V. 36. № 3. P. c1–203–208.

11. *Аникеев Д.Н., Капустина О.А.* Особенности модулированных структур в жидких кристаллах, индуцированных воздействием звука // ЖЭТФ. 1996. Т. 110. Вып. 4(10). С. 1328–1338.

12. *Manneville P., Dubois-Violette E.* Shear flow instabilities in nematics // J. Phys. (Fr.). 1976. V. 37. № 4. P. 285–296.

13. *Dubois-Violette E., Guyon E., Janossy I., Pieransky P., Manneville P.* Theory and experiments on plane shear flow instabilities in nematics // J. Mecanique. 1977. V. 16. № 5. P. 733–767.

14. *Manneville P.* Theoretical analysis of Poiseuille flow in nematics // J. Phys. (Fr.). 1979. V. 40. № 7. P. 713–724.

15. *Решетов В.Н.* Ориентационная неустойчивость нематических жидких кристаллов в ориентационном потоке // Акуст. журн. 1985. Т. 31. Вып. 5. С. 639–643.

16. *Кожевников Е.Н.* Доменная структура в планарном слое нематического жидкого кристалла в осциллирующем потоке Куэтта // Кристаллография. 2006. Т. 51. № 4. С. 717–724.

17. *Tarasov O.S., Krehov A.P.,Krmaer L.* Transition to spatially periodic patterns in mematics under oscillatory shear flow: linear analysis // ArXive: condmat/0205399 v1. 2004.

18. *Де Жен П.* Физика жидких кристаллов. М.: Мир, 1977. 399 с.

19. *Stephen M.J., Straley J.P.* Physics of liquid crystals // Rev. of Modern Physics. 1974. V. 46. P. 617–704.

The Structure of a Planar Nematic Liquid Crystal in an Oscillating Couette Flow beyond the Stability Threshold

E. N. Kozhevnikov

Samara State University, ul. Akademika Pavlova 1, Samara, 443011 Russia
e-mail: kozhev@ssu.samara.ru

Abstract—The deformation of a nematic liquid crystal with a planar molecule alignment under the effect of an oscillating Couette flow is theoretically described. The case of external action with amplitudes exceeding the instability threshold of the initial crystal structure is considered. The effect is analyzed by the perturbation method on the basis of the nonlinear equations of nematodynamics. The type and magnitude of the NLC structure distortions are determined as functions of the frequency and amplitude of shear.