АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2006, том 52, № 6, с. 777–783

УДК 534.26

О КОЛЕБАНИЯХ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ С НЕРОВНОЙ ГРАНИЦЕЙ

© 2006 г. А. О. Ватульян, П. С. Углич

Ростовский государственный университет, механико-математический факультет

344090 Ростов-на-Дону, ул. Зорге 5

E-mail: vatulyan@math.rsu.ru, puglich@inbox.ru

Поступила в редакцию 14.04.05 г.

Рассматривается плоская задача о вынужденных установившихся колебаниях упругой полосы с неровной нижней границей с неровностью, локализованной на конечном отрезке. При помощи функций Грина для полосы задача сведена к системе интегральных уравнений по границе неровности, которая решена на основе метода граничных элементов. Сформулирована обратная задача об определении формы неровного участка границы по информации о поле перемещений на части верхней границы. На основе метода линеаризации обратная задача сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода с гладким ядром, которое решается с помощью метода регуляризации Тихонова.

PACS: 43.40.Cw

ВВЕДЕНИЕ

Задачи о колебаниях слоистых структур с неровностями часто возникают в акустике, сейсмологии, технической диагностике и физике твердого тела. В частности, в работе [1] приводится детальный обзор исследований, в которых рассматривается влияние неровностей на амплитуды поверхностных волн в полупространстве. В большинстве постановок глубина выемки считается малой по сравнению с длиной волны, и задача исследуется методом возмущений. При использовании такого метода влияние неоднородности сводится к действию нагрузки на ровную границу, причем ее интенсивность прямо пропорциональна глубине выемки.

В работе [2] представлены результаты натурных экспериментов по прохождению волн Релея через "сильные" одиночные неровности, например, выемки с глубиной порядка длины волны. Отмечается, что характер рассеяния волн существенно зависит от геометрии неровности и механических параметров среды, и метод возмущений становится неприменимым.

В работах [3, 4] подобные задачи изучены методом граничного элемента. В частности, в [4] рассмотрена задача об антиплоских колебаниях упругого двухслойного полупространства с полостью, расположенной в верхнем слое, в том числе с полостью, выходящей на поверхность. Последнюю задачу можно рассматривать как задачу для упругой среды с неровностью, оказывающей сильное влияние на формирование амплитуд и фаз поверхностных волн.

Следует отметить, что существует направление [5], в котором неровность моделируется при помощи случайной функции, и задача решается статистическими методами.

В работе [6] решена методом возмущений задача об антиплоских колебаниях упругого слоя с неровной нижней поверхностью. Аналогичные задачи рассмотрены в работах [6–9].

Помимо прямых задач о расчете влияния неровности на волновое поле большой интерес представляют обратные задачи по определению характера и формы неровности по информации о поле упругих перемещений на поверхности. В частности, в работах [10, 11, 12] такие задачи были решены методом линеаризации в предположении небольшой амплитуды неровности. В [13, 14] были рассмотрены обратные задачи об определении формы дна по характеру волн в жидкости.

В настоящей работе рассматривается плоская задача о вынужденных установившихся колебаниях упругой полосы с неровной нижней поверхностью. Под упругой полосой понимается двумерная область $|x_1| < \infty$, $0 \le x_2 \le H$. Построены граничные интегральные уравнения для решения прямой задачи, а также соотношения, позволяющие по перемещениям на неровном участке границы найти перемещения в любой точке полосы.

Затем ставится обратная задача: найти по информации о перемещениях на некотором участке верхней границы форму неровного участка ниж-

ней границы. Такая задача является нелинейной и относится к классу обратных геометрических задач теории упругости. В рамках метода линеаризации она сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода с гладким ядром. Обращение такого операторного уравнения, как известно, является некорректной задачей (см. [15, 16]) и требует использования специальных численных методов. Приведены результаты модельных расчетов по восстановлению формы неровности.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим установившиеся колебания упругой полосы $|x_1| < \infty$, $0 \le \varepsilon f(x_1) \le x_2 \le H$ с неровной нижней границей. В дальнейшем считаем, что неровность локализована на отрезке $[a, b]$, то есть $f(x_1) = 0$ при $x_1 \notin [a, b], f(x_1) \in C^1[a, b], f(a) = f(b) = 0$.

Будем считать, что компоненты вектора упругих перемещений изменяются по закону $\exp(-i\omega t)$, где ω – круговая частота колебаний. Тогда для амплитуд смещений полосы имеем следующие уравнения [17]:

$$\begin{cases}(1-2\nu)^{-1}(u_{1,11}+u_{2,21})+\Delta u_1+\kappa_2^2 u_1 = 0,\\ (1-2\nu)^{-1}(u_{1,12}+u_{2,22})+\Delta u_2+\kappa_2^2 u_2 = 0.\end{cases} \quad (1)$$

Здесь и в дальнейшем $u_{i,j} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$, ν – коэффициент Пуассона, $\kappa_2 = \omega\sqrt{\dfrac{\rho}{G}}$ – волновое число поперечных волн, G – модуль сдвига, ρ – плотность полосы.

Будем считать, что на верхней границе полосы действует нормальная нагрузка, а касательные напряжения отсутствуют:

при $x_2 = H$:

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = q(x_1). \quad (2)$$

Нижняя граница полосы свободна от нагрузок, что приводит к следующим граничным условиям:

$$\sigma_{n\tau} = 0, \quad \sigma_{nn} = 0. \quad (3)$$

Замыкают постановку задачи условия излучения, при формулировке которых использован принцип предельного поглощения [18].

Сформулированная задача при небольших амплитудах неровности может быть исследована на основании метода возмущений [10, 12]. Для сильных неровностей наиболее эффективным способом анализа полей в полосе является сведение к системе граничных интегральных уравнений при помощи стандартной процедуры, использующей фундаментальное решение уравнений Ляме [17]. Отметим, что при использовании известного фундаментального решения для упругой плоскости, которое выражается через функции Ганкеля, граничное уравнение будет содержать интегралы от неизвестных функций по бесконечным границам полосы. Поэтому гораздо более эффективно использовать фундаментальное решение или функцию Грина для ровной полосы, удовлетворяющее граничным условиям.

ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПОЛОСЫ

Обозначим через $U_i^{(m)}$ фундаментальное решение для упругой полосы с ровными границами, которое удовлетворяет следующим уравнениям и краевым условиям:

$$(1-2\nu)^{-1}U_{k,ki}^{(m)}+\Delta U_i^{(m)}+\kappa_2^2 U_i^{(m)}+\frac{\delta_{im}}{G}\delta(x-\xi) = 0, \quad (4)$$

$$\begin{cases} G(U_{1,2}^{(m)}+U_{2,1}^{(m)})\big|_{x_2=0,H} = 0,\\ \dfrac{2G}{1-2\nu}[\nu U_{1,1}^{(m)}+(1-\nu)U_{2,2}^{(m)}]\Big|_{x_2=0,H} = 0.\end{cases} \quad (5)$$

Решение задачи (4)–(5) имеет вид суммы двух слагаемых

$$U_i^{(m)}(x,\xi) = V_i^{(m)}(x,\xi)+W_i^{(m)}(x,\xi), \quad (6)$$

где $V_i^{(m)}(x,\xi)$ – решение неоднородных уравнений Ляме (4) для плоскости, а $W_i^{(m)}(x,\xi)$ – решение краевой задачи для системы однородных уравнений при следующих граничных условиях:

$$\begin{cases} G(W_{1,2}^{(m)}+W_{2,1}^{(m)})\big|_{x_2=0,H} = -G(V_{1,2}^{(m)}+V_{2,1}^{(m)})\big|_{x_2=0,H},\\ \dfrac{2G}{1-2\nu}[\nu W_{1,1}^{(m)}+(1-\nu)W_{2,2}^{(m)}]\Big|_{x_2=0,H} = \\ = -\dfrac{2G}{1-2\nu}[\nu V_{1,1}^{(m)}+(1-\nu)V_{2,2}^{(m)}]\Big|_{x_2=0,H}.\end{cases}$$

Трансформанты Фурье по x_1 функций $V_i^{(m)}$ имеют следующий вид:

$$\tilde{V}_i^{(m)}(\alpha, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} V_i^{(m)}(x_1, x_2)\exp(i\alpha x_1)dx_1$$

и представимы в форме:

$m = 1$:

$$\begin{cases} \tilde{V}_1^{(1)} = \dfrac{e^{i\alpha\xi_1}}{2G\kappa_2^2}\left(\dfrac{\alpha^2}{\gamma_1}\exp[-\gamma_1|x_2-\xi_2|] - \gamma_2\exp[-\gamma_2|x_2-\xi_2|]\right), \\ \tilde{V}_2^{(1)} = \dfrac{i\alpha e^{i\alpha\xi_1}}{2G\kappa_2^2}(\exp[-\gamma_1|x_2-\xi_2|] - \exp[-\gamma_2|x_2-\xi_2|])\operatorname{sign}(x_2-\xi_2), \end{cases}$$

$m = 2$:

$$\begin{cases} \tilde{V}_1^{(2)} = \dfrac{i\alpha e^{i\alpha\xi_1}}{2G\kappa_2^2}(\exp[-\gamma_1|x_2-\xi_2|] - \exp[-\gamma_2|x_2-\xi_2|])\operatorname{sign}(x_2-\xi_2), \\ \tilde{V}_2^{(2)} = \dfrac{e^{i\alpha\xi_1}}{2G\kappa_2^2}\left(\gamma_1\exp[-\gamma_1|x_2-\xi_2|] - \dfrac{\alpha^2}{\gamma_1}\exp[-\gamma_2|x_2-\xi_2|]\right), \end{cases}$$

$$\gamma_i = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_i^2}.$$

Краевая задача для определения функций $W_i^{(m)}$ решается методом интегральных преобразований, и они представимы в виде интегралов Фурье. В соответствии с формулой (6) построены функции Грина для полосы $U_i^{(m)}(x, \xi)$ в виде интегралов по контуру в комплексной плоскости. Следует отметить, что функции $V_i^{(m)}(x, \xi)$ имеют логарифмическую особенность при $\xi = x$, а $W_i^{(m)}(x, \xi)$ – непрерывны всюду внутри полосы, за исключением граничных поверхностей.

ФОРМУЛИРОВКА СИСТЕМЫ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ

Обозначим область, занятую полосой через S, верхнюю поверхность полосы через L_+, нижнюю – через L_-, неровный участок – Γ_f, причем $\Gamma_f \subset L_-$.

Рассмотрим теперь область $S_R = S \cap \{|x_1| < R\}$. По формулам Сомильяны [17] получаем:

$$u_m(\xi) = \int\limits_{\partial S_R} [\sigma_{kl}(x)n_l U_k^{(m)}(x, \xi) - u_k(x)\sigma_{kl}^{(m)}(x, \xi)n_l]dl_x, \quad (7)$$

где $\sigma_{ij}^{(m)}$ – поле напряжений, полученное из фундаментального решения в соответствии с законом Гука.

Теперь, устремляя R в (7) к бесконечности и принимая во внимание краевые условия и условия излучения, получим:

$$u_m(\xi) = u_m^{et}(\xi) - \int\limits_{\Gamma_f} u_k(x)\sigma_{kl}^{(m)}(x, \xi)n_l dl_x, \quad (8)$$

где $u_k^{et}(\xi)$ – поле смещений в полосе с ровными границами от действия нагрузки $q(x_1)$. Отметим, что граничные условия на ровных участках выполняются автоматически.

Устремляя в (8) $\xi \longrightarrow y \in \Gamma_f$ и используя аналоги теорем о предельных значениях потенциала двойного слоя [19], получим систему граничных уравнений относительно компонент вектора перемещений на неровной части границы:

$$c_{mi}u_i(y) = u_m^{et}(y) - \text{v.p.}\int\limits_{\Gamma_f} u_i(x)\sigma_{ij}^{(m)}(x, y)n_j dl_x, \quad y \in \Gamma_f. \quad (9)$$

Здесь $c_{ij} = \dfrac{1}{2}\delta_{ij}$, если точка y является внутренней точкой кривой Γ_f, а интеграл в (9) понимается в смысле главного значения по Коши.

Полученная система (9) может быть исследована лишь численно на основе идей метода граничного элемента [19], [20]. Разобьем отрезок $[a, b]$ на N отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-1}$, $x_i = a + hi$, $h = (b-a)/N$. Кривая Γ_f аппроксимируется ломаной, состоящей из прямолинейных отрезков (элементов) l_i с концами в точках $(x_i, f(x_i))$, $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Предположим, что функции u_i постоянны на отрезках l_i. В качестве узлов, в которых выполнены интегральные уравнения (9), выбираем точки, расположенные в серединах отрезков l_i. Для нахождения узловых неизвестных u_i получаем систему линейных алгебраических уравнений вида:

Таблица 1

ε	$\lvert A_{11}\rvert$	$\arg A_{11}$	$\lvert A_{21}\rvert$	$\arg A_{21}$
0.1	7.367436	3.131605	9.194590	–1.584710
0.01	7.516407	3.140440	9.453334	–1.572389
0.001	7.534192	3.141476	9.484249	–1.570957
0	7.536200	3.141593	9.487741	–1.570796

$$\frac{1}{2}u_{mp} = u_{mp}^{et} - \sum_{i=1}^{2}\sum_{q=1}^{N} A_{imqp}u_{iq},$$
$$A_{impq} = \text{v.p.}\int_{l_q}\sigma_{ij}^{(m)}(x, \xi_p)n_j dl_x. \tag{10}$$

Коэффициенты алгебраической системы (10) представляют собой двойные интегралы, однако за счет явного интегрирования по элементу удалось их выразить через однократные интегралы. Найдя из системы (10) узловые неизвестные, согласно представления (8) могут быть рассчитаны волновые поля всюду внутри полосы, в том числе и на ее границе.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Предположим, что известно поле перемещений на некотором конечном участке верхней границы. Исходя из этой информации, определим неизвестную форму неровного участка нижней границы. Границы неровного участка считаются известными. Соотношения (8) можно истолковать как систему нелинейных интегральных уравнений относительно формы неровности и смещений на ней. В общем случае численное решение такой системы представляет непростую задачу, однако, считая амплитуду неровности малой, можно существенно упростить решение поставленной задачи, используя метод линеаризации [10, 21].

Разложим граничные значения $u_i(x_1, x_2)$ и при $x_2 = \varepsilon f(x_1)$ в ряд Тейлора по x_2 в окрестности точки $x_2 = 0$:

$$u_i(x_1, \varepsilon f(x_1)) = u_i(x_1, 0) + \varepsilon f(x_1)u_{i,2}(x_1, 0) + \ldots,$$
$$\sigma_{ij}(x_1, \varepsilon f(x_1)) = \sigma_{ij}(x_1, 0) + \varepsilon f(x_1)\sigma_{ij,2}(x_1, 0) + \ldots.$$

Вектор нормали представляется в виде: $\bar{n} = \{\varepsilon f'(x_1), -1\}$.

В работе [12] построено формальное решение аналогичной задачи в виде ряда по степеням ε. Аналогично будем искать решение исходной задачи (1)–(3):

$$u_i = u_i^0 + \varepsilon u_i^1 + \ldots$$

$u_i^0 = u_i^{et}$ совпадает с "эталонным" решением для ровного слоя. Исходя из соотношений Сомильяны (2), найдем:

$$u_m^1(\xi) = \int_a^b \{u_1^0(x_1)[f(x_1)\sigma_{12,2}^{(m)}(x_1, 0; \xi) - f'(x_1)\sigma_{11}^{(m)}(x_1, 0; \xi)] + u_2^0(x_1)f(x_1)\sigma_{22,2}^{(m)}(x_1, 0; \xi)\}dx_1. \tag{11}$$

Последнее равенство после некоторых преобразований представляет собой линейное интегральное уравнение Фредгольма первого рода с гладким ядром относительно функции f. Решение такого уравнения, как известно, является некорректной задачей и требует использования специальных численных методов. В настоящей работе для его решения использован метод регуляризации Тихонова [15, 16].

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Как известно, волновое поле в упругой полосе представляет из себя суперпозицию конечного числа бегущих волн и счетного множества затухающих волн [22]. Выражение для волнового поля на поверхности полосы можно представить в виде:

$$u_i(x_1, H) = \sum_{j=1}^{M} A_{ij}e^{i\alpha_j x_1} + O(e^{-\zeta x_1}),$$

$\zeta > 0, x_1 > 0.$

Исследуем поведение бегущих волн в зависимости от глубины выемки. В расчетах принято, что неровность имеет форму дуги синусоиды $f(x_1) = \varepsilon\sin(\pi x_1)$, $[a, b] = [0, 1]$, материал слоя – сталь, толщина слоя $H = 1$ м, нагрузка принята сосредоточенной вида: $\frac{q(x_1)}{G} = = \delta(x_1 - 0.5)$.

Ниже представлены значения амплитуды и фазового сдвига при $\kappa_2 H = 1$ ($\omega = 4$ кГц). Для этого волнового числа в полосе возникают две распространяющиеся волны, с волновыми числами $\alpha_1 = 1.6817$ и $\alpha_2 = 0.5933$. В табл. 1 представлены значения модуля и аргумента амплитуды бегущей волны, соответствующей $\alpha_1 = 1.6817$ и имеющей наибольшую (по модулю) амплитуду.

Была проведена серия расчетов при разных количествах числа элементов ($N = 20, 40$). Расчеты показали, что амплитуды распространяющихся волн, полученные при $N = 20$, при удвоении элементов меняются незначительно (расхождения начинаются с шестого знака после запятой).

Рассмотрим равенство (11). Его, как и (8), можно использовать для отыскания волнового поля

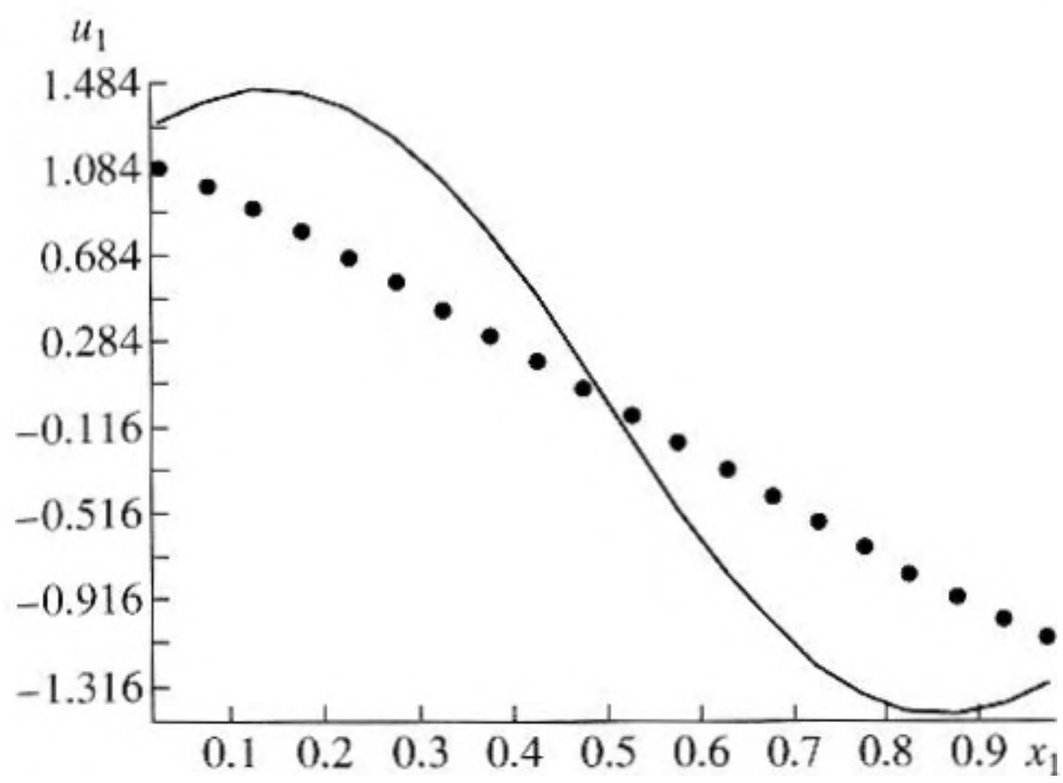

Рис. 1. Результат численного решения интегрального уравнения (9) при $\kappa_2 H = 1$ ($\omega \approx 4$ кГц) и $\varepsilon = 0.1$. Сплошной линией показана вещественная часть горизонтального перемещения, точками – его мнимая часть.

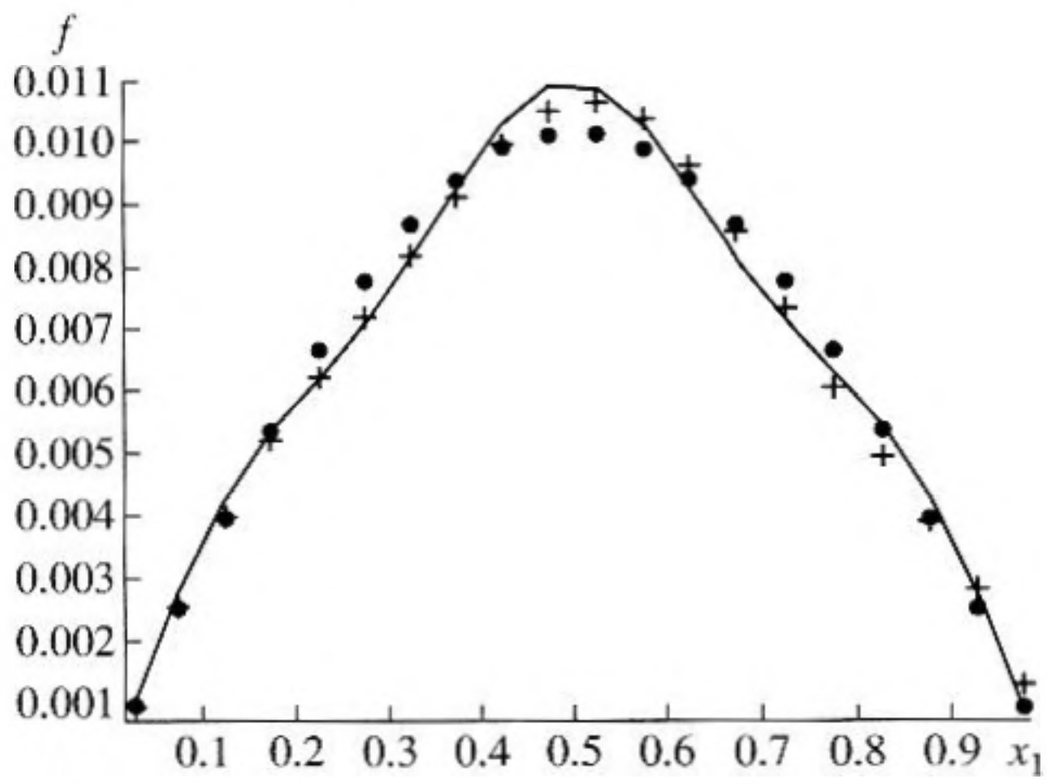

Рис. 2. Результаты численного эксперимента при $\kappa_2 = 5$ ($\omega \approx 20$ кГц) и $\varepsilon = 0.01$. Точками изображена исходная форма неровности, сплошной линией изображена форма неровности, восстановленная по информации на отрезке $[c, d] = [-1, 4]$, крестами изображена форма, восстановленная при $[c, d] = [1, 10]$.

на отрезке $[c, d]$. Обозначим через g_i^{I} волновое поле, найденное по формуле (11), а через g_i^{II} – поле, найденное по формуле (8). Введем в рассмотрение величину

$$\delta_i = \frac{\|g_i^{\mathrm{I}} - g_i^{\mathrm{II}}\|}{\|g_i^{\mathrm{I}}\|} \times 100\%, \quad \|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |u_i|^2}$$

и исследуем ее поведение в зависимости от амплитуды неровности. В следующей табл. 2 приведены значения (в процентах) параметра δ_1 при различных значениях амплитуды неровности и волнового числа.

Из таблицы видно, что когда амплитуда неровности не превышает одну десятую ширины полосы, расхождение между полями, найденными двумя разными способами, незначительно, однако при большей амплитуде расхождение становится значительным, что не позволяет использовать линеаризованное уравнение (11) для решения обратной задачи.

На рис. 1 показан результат численного решения интегрального уравнения (9) при $\kappa_2 H = 1$ ($\omega \approx 4$ кГц) и $\varepsilon = 0.1$. Сплошной линией показана вещественная часть горизонтального перемещения, точками – его мнимая часть.

Далее представлены результаты численного эксперимента по восстановлению формы неровности. Численные эксперименты производились следующим образом: сначала при известной форме неровности для отыскания неизвестных перемещений на неровном участке границы решалась система интегральных уравнений (9), затем для найденных перемещений с помощью соотношений Сомильяны (7) находились поля перемещений на $[c, d]$ – участке верхней поверхности полосы. Найденные перемещения использованы в качестве исходной информации для решения обратной задачи (в линеаризованной постановке – для решения интегрального уравнения (11)). Всюду в дальнейшем в качестве правой части (11) используется вещественная часть u_1.

На рис. 2 приведены результаты расчета при $\kappa_2 = 5$ ($\omega \approx 20$ кГц), $\varepsilon = 0.01$, для решения СЛАУ использовался метод Воеводина с автоматическим подбором параметра регуляризации по критерию обобщенной невязки [16]. Здесь точками изображена исходная форма неровности, сплошной линией изображена форма неровности, восстановленная по информации на отрезке $[c, d] = [-1, 4]$, крестами изображена форма, восстановленная при $[c, d] = [1, 10]$. Расчеты показывают, что для решения обратной задачи желательно выбирать отрезок $[c, d]$, соизмеримый по длине с неровным участком $[a, b]$ и расположенный близко к нему. Кроме того, следует отметить, что при малых частотах колебаний ($\kappa_2 H < 1$) восстановление формы ухудшается.

Таблица 2

ε	$\kappa_2 = 1$		$\kappa_2 = 5$	
	$N = 20$	$N = 40$	$N = 20$	$N = 40$
0.1	8.41	5.60	3.44	3.300
0.01	3.02	0.84	0.43	0.360
0.001	2.95	0.85	0.46	0.049
0.0001	2.95	0.86	0.48	0.063

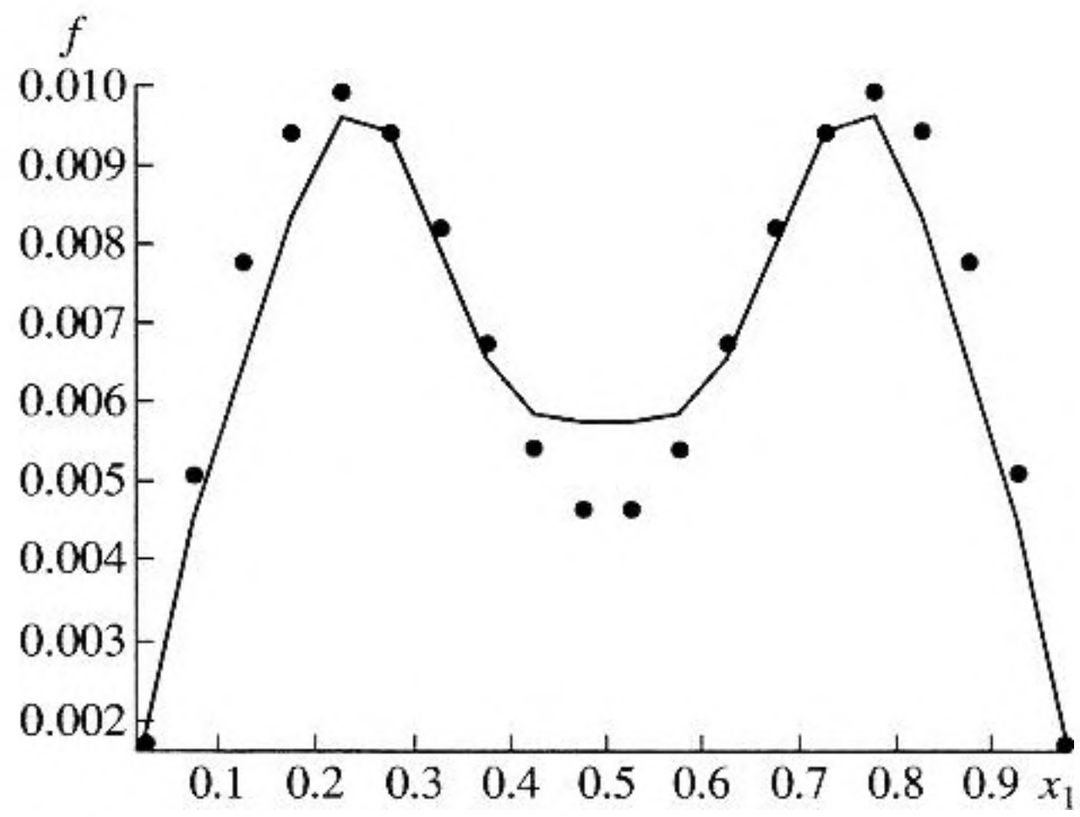

Рис. 3. Результаты решения обратной задачи при $\kappa_2 = 5$ ($\omega \approx 20$ кГц), $[c, d] = [-1, 2]$, $f(x_1) = 0.0093(\sin\pi x_1 + 0.5\sin 3\pi x_1)$. Точками изображена исходная форма неровности, сплошной линией – восстановленная.

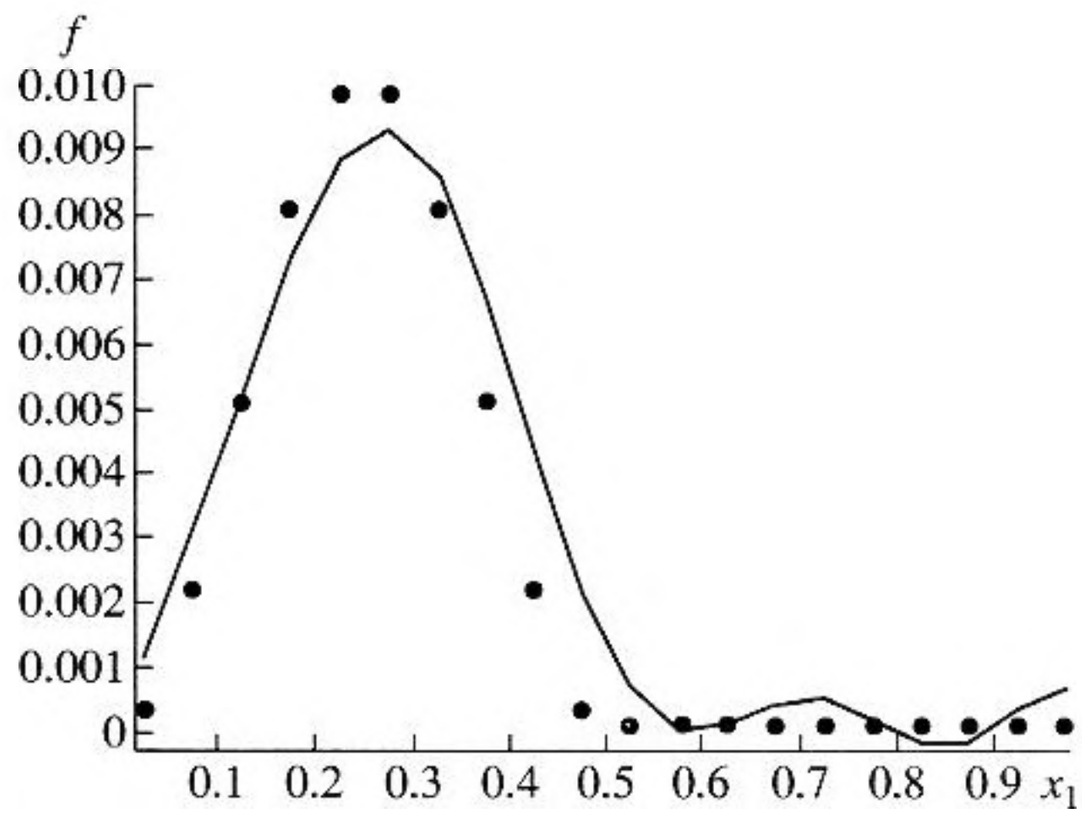

Рис. 4. Результаты расчета при $\kappa_2 = = 10$ ($\omega \approx 40$ кГц), $[c, d] = [0, 1]$, $f(x_1) = 0.01\sin^2 2\pi x_1$ при $x_1 < 0.5$; $f(x_1) = 0$; $x_1 \geq 0.5$.

На рис. 3 приведены результаты решения обратной задачи при более сложной форме неровного участка, $\kappa_2 = 5$, ($\omega \approx 20$ кГц), $[c, d] = [-1, 2]$, $f(x_1) = 0.0093(\sin\pi x_1 + \sin 3\pi x_1)$. Здесь и далее точками изображена исходная форма неровности, сплошной линией – восстановленная.

Расположение неровного участка предполагается известным, и, сожалению, такое условие может оказаться серьезным препятствием при решении реальных задач. Было произведено моделирование случая, когда местоположение неровного участка точно неизвестно. На рис. 4 показаны результаты расчета при $\kappa_2 = 10$, ($\omega \approx 40$ кГц), $[c, d] = [0, 1]$

$$f(x_1) = \begin{cases} 0.01\sin^2 2\pi x_1; & x_1 < 0.5 \\ 0; & x_1 \geq 0.5. \end{cases}$$

Результаты расчетов показывают, что положение неровности можно уточнить, не имея априорной информации о ее локализации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках метода линеаризации обратная геометрическая задача об определении формы неровного участка границы упругой полосы сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода с гладким ядром. Численные эксперименты показывают, что данный подход эффективен только при малой амплитуде неровности, не превышающей одну десятую ширины полосы. При большей амплитуде неровности следует использовать итерационные схемы решения обратных задач [21]. Предложенная методика может быть использована для диагностики неровностей в волноводах.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации по поддержке ведущей научной школы РИ-112/001/428, госконтракт № 02.445.11.7042.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гуляев Ю.В., Плесский Б.П.* Распространение поверхностных акустических волн в периодических структурах // Успехи физических наук. 1989. Т. 157. № 1. С. 85–127.
2. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 288 с.
3. *Захаров Е.В., Ильин И.В.* Метод расчета электромагнитных полей в плоскопараллельной среде с локальными неоднородностями // Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1971. Вып. 16. С. 103–108.
4. *Ляпин А.А.* О возбуждении волн в слоистой среде с локальным дефектом // Прикл. мех. и тех. физика. 1994. № 5. С. 87–91.
5. *Косачев В.В., Гандурин Ю.Н., Барсуков К.В.* Дисперсия и затухание поверхностных акустических волн на свободной статистически-шероховатой поверхности гексагонального кристалла // Физика твердого тела. 2004. Т. 46. Вып. 10. С. 1886–1892.
6. *Мухсихачоян А., Белубекян М.* Распространение SH-волн в упругом слое с неровной поверхностью // Математичні проблеми механіки неоднорідных структур. Зб. мистить праці. Т. 2. Ін-т прикл. пробл. мех. і мат. НАН Украіны. Львів. 2000. С. 212–215.
7. *Багдоев А.Г., Шекоян А.В., Амбарцумян В.А.* Влияние рельефа земной поверхности на интенсивность сейсмических взаимодействий // Физика Земли. 2003. № 7. С. 17–24.
8. *Fang Yingyuang.* Series solution for scattering of plane SH-waves by multiple shallow circular arc canyons // Xingyong shuxue he lixue.= Appl. math. and mech. 1995. V. 16. № 7. С. 615–624.

9. *Roberts R.A.* Elastodynamic scattering by a surface-breaking void // J. Acoust. Soc. Amer. 1989. V. 85. № 2. P. 561–566.
10. *Ватульян А.О., Коренский С.А.* Метод линеаризации в геометрических обратных проблемах теории упругости // ПММ. 1997. Т. 61. № 4. С. 639–646.
11. *Ватульян А.О., Коренский С.А.* О восстановлении формы приповерхностного дефекта в полупространстве // Доклады РАН. 1995. Т. 334. № 6. С. 753–755.
12. *Ватульян А.О., Углич П.С.* Определение формы неровной границы раздела между упругой и жидкой средами // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский Регион. 2001. Спецвыпуск Математическое моделирование. С. 44–46.
13. *Захаренко А.Д.* Рассеяние звука на малых компактных неоднородностях в морском волноводе // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 2. С. 200–204.
14. *Захаренко А.Д.* Рассеяние звука на малых компактных неоднородностях в морском волноводе: обратная задача // Акуст. журн. 2002. Т. 48. № 2. С. 200–204.
15. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
16. *Тихонов А.Н., Степанов В.В., Гончарский А.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 232 с.
17. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1980. 872 с.
18. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
19. *Колтон Д., Кресс Р.* Интегральные уравнения в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
20. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
21. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.
22. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев. Наукова думка, 1981. 284 с.

Vibrations of an Elastic Strip with a Rough Boundary

A. O. Vatul'yan and P. S. Uglich

Rostov State University, ul. Zorge 5, Rostov-on-Don, 3440090 Russia
e-mail: vatulyan@math.rsu.ru, puglich@inbox.ru

Abstract—A plane problem of steady-state forced vibrations of an elastic strip whose lower boundary contains a rough segment is considered. Using Green's functions for a strip, the problem is reduced to a system of integral equations with integrals over the rough boundary, which is solved by the boundary-element method. The inverse problem of determining the shape of the rough boundary segment from the data on the displacement field of a certain part of the upper boundary is formulated. By the linearization procedure, the inverse problem is reduced to a Fredholm integral equation of the first kind with a smooth kernel, which is solved by Tikhonov's regularization method.