АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2005, том 51, № 1, с. 90–100

УДК 551.463

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЛУЧЕВОГО ХАОСА В ПОДВОДНОМ АКУСТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

© 2005 г. А. Л. Вировлянский

Институт прикладной физики РАН 603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46

E-mail: viro@hydro.appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 4.08.03 г.

Разработан приближенный аналитический подход для описания хаотического поведения лучевых траекторий в глубоководных акустических волноводах на трассах длиной до 3–5 тысяч километров. Динамика лучей исследована с помощью гамильтонова формализма, выраженного в терминах канонических переменных действие–угол. Использована реалистическая модель волновода с флуктуациями показателя преломления, обусловленными случайным полем внутренних волн. Получено уравнение Фоккера–Планка для переменной действия и показано, что зависимость этой переменной от дистанции может быть аппроксимирована винеровским случайным процессом, представляющим простейшую модель диффузии. Выведены формулы для расчета плотности вероятности координаты и других характеристик лучей. Найдено приближенное выражение для сглаженной интенсивности поля точечного источника. Для иллюстрации и тестирования полученных формул выполнено сравнение их предсказаний с результатами численного решения лучевых уравнений и расчета поля методом параболического уравнения.

ВВЕДЕНИЕ

Численное моделирование полей в подводных акустических волноводах свидетельствует о том, что лучевая теория позволяет правильно предсказывать многие важные характеристики принимаемых сигналов даже на трассах протяженностью до нескольких тысяч километров. Многие результаты, полученные в приближении геометрической оптики, неплохо согласуются как с расчетами, выполненными методом параболического уравнения, так и с данными натурных экспериментов [1, 2, 3, 4]. Это стимулирует интерес к развитию новых методов анализа лучевой структуры поля при дальнем распространении звука в океане.

Как известно, горизонтальные масштабы вариаций скорости звука в морской воде существенно (как минимум на два порядка) превышают вертикальные [5]. Данное обстоятельство позволяет пренебречь горизонтальной рефракцией лучей и, соответственно, ограничиться анализом двумерной модели среды [6, 7]. При этом скорость звука задается функцией $c(r, z)$ с аргументами r – дистанция и z – глубина. В типичных моделях волноводов эта функция представлена в виде

$$c(r, z) = c_0(r, z) + \delta c(r, z), \qquad (1)$$

где $c_0(r, z)$ – невозмущенное поле скорости звука, плавно зависящее от обеих координат, и $\delta c(r, z)$ – малое возмущение. Предполагается, что $\delta c(r, z)$ – случайная функция и поэтому изучение лучевой структуры поля требует применения статистических методов.

В теории распространения волн в случайных средах описание лучей (как и других характеристик волновых полей) базируется на использовании понятия статистического ансамбля реализаций среды. Статистические характеристики луча с заданными стартовыми параметрами z_0 и χ_0 – начальная глубина и угол выхода соответственно – определяются усреднением по лучам с такими же начальными условиями в различных реализациях среды, образующих ансамбль. Этот подход является общепринятым и большинство работ по анализу стохастической лучевой структуры поля выполнены в его рамках [8].

В конце 80-х годов наметилось новое направление изучения стохастической динамики лучей, подсказанное оптико-механической аналогией [4, 9, 10, 11, 12, 13, 14]. Дело в том, что поведение лучевой траектории в переменном по трассе волноводе подчиняется практически тем же уравнениям, которые описывают и колебания нелинейного осциллятора под действием нестационарной внешней силы. В механике хорошо известно, что типичной является ситуация, когда такой осциллятор ведет себя хаотически [15]. Численные расчеты подтвердили, что в подводных акустических волноводах лучевые траектории, как и следовало ожидать, ведут себя аналогичным образом [4, 16]. Хаотические лучи отличаются сильной неустойчивостью: для траекторий с очень близкими начальными условиями разность вертикальных ко-

ординат Δz с увеличением расстояния r растет (в среднем) по экспоненциальному закону [9]

$$\Delta z \sim \exp(\lambda r). \quad (2)$$

Целью нашей работы является приближенное аналитическое описание статистики лучевого хаоса в реалистичной модели акустического волновода в глубоком море с неоднородностями скорости звука $\delta c(r, z)$, вызванными случайными внутренними волнами. В данной модели показатели Ляпунова λ обычно имеют величину порядка 0.01 км$^{-1}$ [4]. На дистанциях, превышающих 1000 км, лучевой хаос уже хорошо развит и учет данного явления при анализе статистики звуковых полей принципиально необходим.

В данной работе мы исследуем хаотическую динамику лучей в детерминированной среде с пространственными флуктуациями скорости звука, заданными отдельной реализацей возмущения $\delta c(r, z)$. Мы воспользуемся тем, что при $r \gg \lambda^{-1}$ лучевые траектории с близкими начальными условиями становятся практически независимыми, и усреднение по начальным условиям будем трактовать как статистическое. Результаты численного моделирования свидетельствуют, что найденные таким образом статистические характеристики хаотических лучей слабо зависят от конкретной реализации $c(r, z)$, использованной при расчетах. Поэтому можно ожидать, что анализ статистики лучей в отдельной реализации поля скорости звука дает результаты близкие к тем, которые были бы получены при усреднении по статистическому ансамблю волноводов. Однако важный и очень интересный вопрос о том, насколько хорошо одна реализация неоднородностей представляет весь статистический ансамбль, выходит за рамки данной работы и здесь не исследуется.

Метод анализа хаотической динамики лучей, изложенный в данной статье, базируется на гамильтоновом формализме, выраженном в терминах канонических переменных действие–угол (I, θ) [9, 17]. Эти переменные широко применяются для анализа финитных движений частиц в механике и исследования осцилляций лучевых траекторий в волноводах. Переменная действия I определяет амплитуду и длину цикла траектории, а угловая переменная θ (ее не следует путать с геометрическим углом скольжения луча) задает положение текущей точки луча внутри заданного цикла. Можно сказать, что θ играет роль фазы осциллирующей траектории.

Для большинства лучей переменная θ быстро стохастизируется – уже на сравнительно коротких трассах ее можно считать равномерно распределенной в интервале от 0 до 2π. Это позволяет получить уравнение Фоккера–Планка для переменной действия. Численный расчет показывает, что в нашей модели волновода коэффициент диффузии I можно аппроксимировать константой. В этом приближении случайная функция $I(r)$ моделирует ся винеровским процессом и поэтому плотность вероятности действия выражается хорошо известной формулой.

Зная совместную плотности вероятности I и θ, можно рассчитать практи чески любые статистические характеристики лучей. В данной работе возможности обсуждаемого подхода проиллюстрированы на примере поля точечного источника. Рассмотрены две конкретные задачи. Во-первых, найдены плотности вероятности распределения параметров хаотических лучей, выходящих из точечного источника. Кроме того, получена формула для интенсивности поля в вертикальном сечении волновода, сглаженной с помощью плавной весовой функции. Предсказания, полученные в рамках нашего приближения, – мы называем его приближением винеровского процесса – сопоставляются с результатами (численными) прямого расчета лучевых траекторий и волнового поля.

В данной работе мы пользуемся приближением параболического уравнения (малоугловым приближением), хотя обобщение результатов на случай, когда поле задается уравнением Гельмгольца, не составляет труда. Дело в том, что параболическое уравнение, в отличие от уравнения Гельмгольца, сравнительно легко решается численно [5]. При тестировании формулы для сглаженной интенсивности поля мы использовали одну из известных программ для решения параболического уравнения, которая называется MMPE [18].

Более подробное описание нашего подхода изложено в электронном препринте (e-print) [19]. Его можно найти в Internet на сайте xxx.lanl.gov.

2. ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ЛУЧЕВЫХ ТРАЕКТОРИЙ

2.1. Переменные импульс–координата

В данной работе для простоты будем считать, что невозмущенное поле скорости звука в (1) не зависит от r, т.е. по всей трассе оно задается плавной функцией $c_0(z)$. Пусть ось z направлена вниз и поверхность воды совпадает с плоскостью $z = 0$. Показатель преломления $n(r, z)$ равен $c_r/c(r, z)$, где c_r – вспомогательная константа, которую в подводной акустике всегда можно выбрать таким образом, что $|c - c_r| \ll c_r$. При этом $n(r, z) = n_0(z) + \delta n(r, z)$, где $n_0(z) = c_r/c_0(z)$, а $\delta n \simeq -\delta c/c_r$ – малое возмущение показателя преломления, ответственное за возникновение лучевого хаоса.

Для анализа лучевых траекторий воспользуемся гамильтоновым формализмом [9, 20]. В его рамках лучевые уравнения имеют вид

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dr} = -\frac{\partial H}{\partial z}, \tag{3}$$

где

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{(1-n^2)}{2}. \tag{4}$$

Функцию H можно трактовать как гамильтониан некоторой (воображаемой) механической системы. Фигурирующий в (3) и (4) параметр траектории p является аналогом механического импульса, а расстояние r играет роль времени. Связь импульса с углом скольжения луча χ дается соотношением $p = \operatorname{tg}\chi$. Выражение для гамильтониана приведено в малоугловом приближении ($p \ll 1$), которым, как указано во Введении, мы пользуемся в данной работе.

2.2. Переменные действие–угол

Лучевые траектории в подводном акустическом волноводе представляют собой осциллирующие кривые. Для их описания (как и для описания колебаний механической частицы в потенциальной яме) наряду с переменными импульс–координата (p, z) удобно использовать канонические переменные действие–угол (I, θ) [9, 17]. Для определения последних рассмотрим невозмущенный волновод с гамильтонианом

$$H_0 = \frac{p^2}{2} + \frac{(1-n_0^2)}{2}. \tag{5}$$

Согласно закону Снеллиуса (аналог закона сохранения энергии в механике) величина H_0 сохраняется вдоль луча и поэтому (5) определяет импульс p как функцию координаты z

$$p = \pm\sqrt{2H_0 - 1 + n_0^2}. \tag{6}$$

Переменная действия задана интегралом вдоль периода невозмущенной траектории

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p\,dz = \frac{1}{\pi}\int\limits_{z_{\min}}^{z_{\max}} dz\sqrt{2H_0 - 1 + n_0^2(z)}. \tag{7}$$

Здесь $z_{\min}$ и $z_{\max}$ – глубины нижней и верхней точек заворота луча. Интеграл (7) определяет "энергию" H_0 как функцию переменной действия I. Важной характеристикой волновода является производная этой функции

$$\frac{dH_0}{dI} = \frac{2\pi}{D} = \omega, \tag{8}$$

задающая пространственную частоту осцилляций траектории. В этой формуле D – длина цикла (период) луча.

Известную производящую функцию канонического преобразования, связывающего пары переменных (p, z) и (I, θ) [9, 17], мы представим в виде

$$G(I, z) = \begin{cases} \int\limits_{z_{\min}}^{z} dz\sqrt{2H_0(I) - 1 + n_0^2(z)}, & p > 0 \\ 2\pi I - \int\limits_{z_{\min}}^{z} dz\sqrt{2H_0(I) - 1 + n_0^2(z)}, & p < 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $z_{\min}$ и $z_{\max}$ рассматриваются как функции I. Каноническое преобразование, заданное функциями

$$z = z(I, \theta), \quad p = p(I, \theta) \tag{10}$$

(обе функции периодические по θ с периодом 2π) и

$$I = I(p, z), \quad \theta = \theta(I, z), \tag{11}$$

определено уравнениями

$$p = \frac{\partial G}{\partial z}, \quad \theta = \frac{\partial G}{\partial I}. \tag{12}$$

В силу теоремы Лиувилля [17] якобиан

$$\frac{\partial(z, p)}{\partial(I, \theta)} = 1. \tag{13}$$

Несмотря на то, что данное преобразование определено для невозмущенного плоскослоистого волновода, формально оно может быть применено и при наличии возмущения. Подставляя (10) в (4), возмущенный гамильтониан представим в виде

$$H(I, \theta, r) = H_0(I) + V(I, \theta, r), \tag{14}$$

где

$$V \simeq -\delta n \simeq \delta c/c_r. \tag{15}$$

Уравнения Гамильтона в переменных действие–угол принимают вид

$$\frac{dI}{dr} = -\frac{\partial V}{\partial \theta}, \tag{16}$$

и

$$\frac{d\theta}{dr} = \omega + \frac{\partial V}{\partial I}. \tag{17}$$

В заключение этого раздела отметим, что каноническое преобразование, заданное производящей функцией (9), выражается через элементарные или специальные функции только для нескольких простейших профилей $n_0(z)$. Однако

данное преобразование может быть довольно просто реализовано численно с помощью стандартной программы для расчета лучевых траекторий в плоскослоистом волноводе. Этот вопрос обсуждается в работе [19].

3. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ХАОТИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ

3.1. Уравнение Фоккера–Планка

Уравнения Гамильтона (16) и (17) будем рассматривать как стохастические уравнения Ланжевена. В случае слабых неоднородностей характерный горизонтальный масштаб функции $\delta c(r, z)$ – обозначим его l_m – гораздо меньше масштаба изменения переменной действия l_I, так что

$$l_m \ll l_I. \tag{18}$$

При этом случайную функцию в правой части уравнения (16) приближенно можно считать дельта-коррелированной. Тогда $I(r)$ является марковским процессом, плотность вероятности которого $P(I, r)$ подчиняется уравнению Фоккера–Планка [21, 22]

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial I}(AP) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial I^2}(BP). \tag{19}$$

Коэффициенты этого уравнения A и B определены соотношениями

$$A(I, r) = \lim_{\Delta r \to 0}\frac{1}{\Delta r}\int \Delta I P(I + \Delta I, r + \Delta r | I, r) d\Delta I, \tag{20}$$

и

$$B(I, r) = \lim_{\Delta r \to 0}\frac{1}{\Delta r}\int \Delta I^2 P(I + \Delta I, r + \Delta r | I, r) d\Delta I, \tag{21}$$

где $P(I, r|I_0, r_0)$ – плотность вероятности действия I на дистанции r при условии, что в точке $r_0 \le r$ величина действия равна I_0.

В силу принципа детального баланса, выражающего симметрию уравнений Гамильтона относительно изменения знака времени (в нашем случае знака r), имеет место соотношение [22]

$$A = \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial I}. \tag{22}$$

Уравнение Фоккера–Планка (19) при этом принимает вид

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial I}B\frac{\partial}{\partial I}P. \tag{23}$$

Вывод данного уравнения без использования принципа детального баланса приведен в работе [19]. Для расчета коэффициента B выберем две точки дистанции r и $r_0 < r$ таким образом, что

$$l_m \ll r - r_0 \ll l_I. \tag{24}$$

Переменные действие и угол в точке r_0 обозначим через I_0 и θ_0 соответственно, а их величины в точке r – через I и θ. Согласно условию (24) мы можем воспользоваться приближенным равенством

$$\Delta I = I - I_0 = -\int_{r_0}^{r} dr' V_\theta(I_0, \theta^{(0)}(r'), r'), \tag{25}$$

где

$$\theta^{(0)}(r) = \theta_0 + \omega(I_0)(r - r_0) \tag{26}$$

– невозмущенное решение уравнения (17). Введем корреляционную функцию

$$K(I, \rho) = \\ = \langle V_\theta(I, \theta^{(0)}(r + \rho), r + \rho) V_\theta(I, \theta^{(0)}(r), r)\rangle_{\theta_0, V}, \tag{27}$$

где символ $\langle \ldots \rangle_{\theta_0, V}$ означает усреднение по θ_0 и неоднородностям V, лежащими между r_0 и r. Предполагаем, что среда статистически однородна вдоль оси r и поэтому функция K от r не зависит. Тогда

$$\langle \Delta I^2\rangle_{\theta_0, V} = (r - r_0)\int_0^{r - r_0} d\rho K(I, \rho). \tag{28}$$

Условие (24) позволяет формально устремить верхний предел к бесконечности. С другой стороны, неравенство (24) означает, что $r - r_0$ мало по сравнению с масштабом изменения I. Поэтому (28) можно подставить в (21) с заменой $(r - r_0)$ на Δr. Пользуясь свойством $K(I, \rho) = K(I, -\rho)$, получаем

$$B(I) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} d\rho K(I, \rho). \tag{29}$$

Если угловая переменная θ стохастизируется (становится равномерно распределенной внутри интервала от 0 до 2π) на дистанциях, малых по сравнению с расстоянием до точки наблюдения, функция $B(I)$ может быть найдена численно по всего лишь одной реализации неоднородностей среды. Из (15) следует

$$V_\theta = -\frac{\partial \delta n}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta}, \tag{30}$$

где производная по θ вычисляется от функции $z(I, \theta)$ – одной из функций, задающих каноническое преобразование (10). В плоскослоистом волноводе для малых p

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{1}{\omega(I)}\frac{dz}{dr} = \frac{1}{\omega(I)}\frac{p}{\sqrt{n^2 - p^2}} \simeq \frac{p}{\omega(I)}. \tag{31}$$

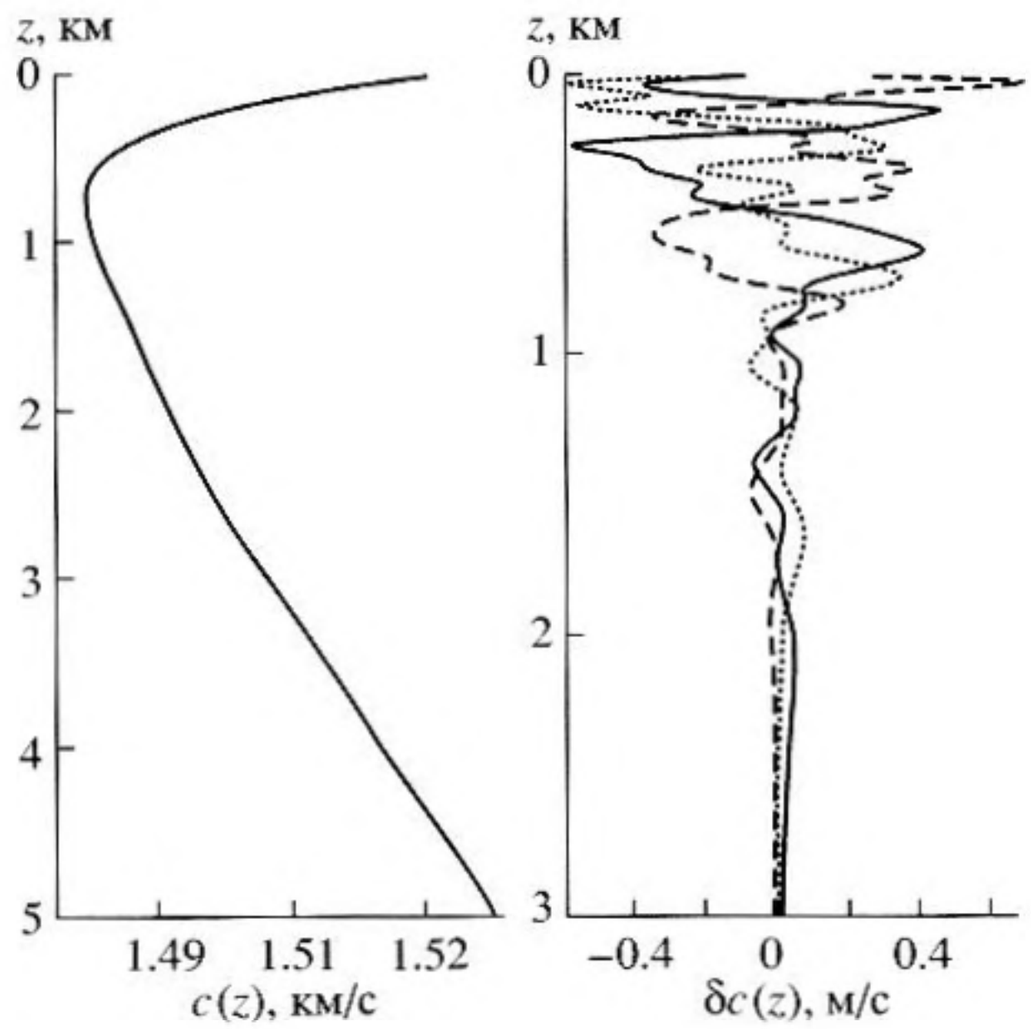

Рис. 1. Невозмущенный профиль скорости звука $c_0(z)$ (слева) и вертикальные сечения возмущения $\delta c(r, z)$ на трех разных дистанциях (справа).

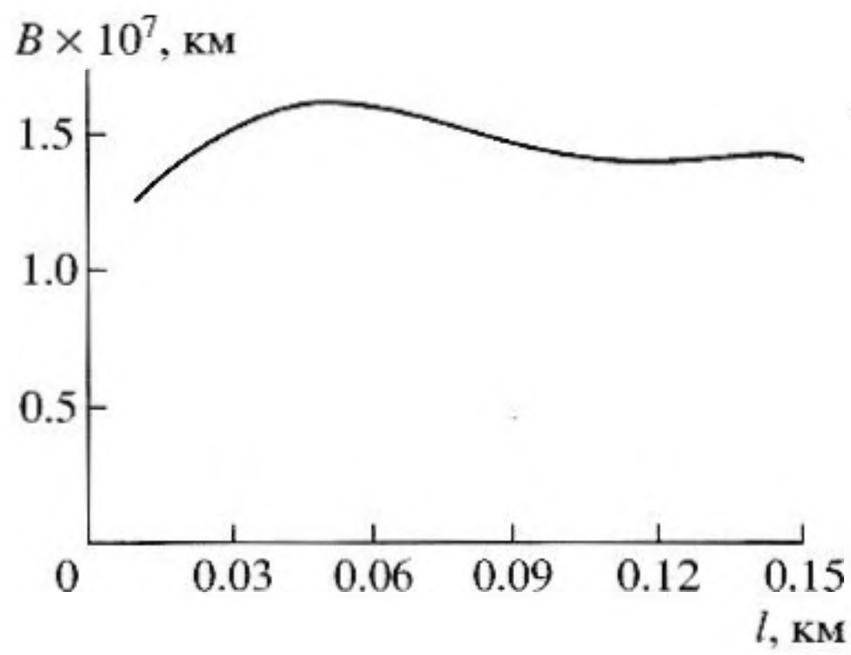

Рис. 2. Зависимость коэффициента диффузии B от переменной действия I.

При работе с одной реализацией неоднородностей $\delta n(r, z) = -\delta c(r, z)/c_r$ для численного расчета корреляционной функции (27) рассмотрим невозмущенную лучевую траекторию с переменной действия I. Пусть координата и импульс вдоль этой траектории задаются функциями $z(r)$ и $p(r)$, соответственно. На дистанции r производная V_θ в точке траектории рассматриваемого невозмущенного луча согласно (30) и (31) равна

$$V_\theta = -\delta n_z(r)\frac{p(r)}{\omega}, \tag{32}$$

где

$$\delta n_z(r) = \left.\frac{\partial \delta n(r, z)}{\partial z}\right|_{z = z(r)}. \tag{33}$$

Оценка корреляционной функции задается интегралом вдоль траектории невозмущенного луча

$$K(I, \rho) = \frac{1}{R\omega^2(I)}\int_0^R dr\,\delta n_z(r+\rho)p(r+\rho)\delta n_z(r)p(r) \tag{34}$$

на трассе длиной R, которая должна быть много больше и длины цикла луча, и максимального горизонтального масштаба неоднородностей. Более точная оценка корреляционной функции будет получена при вычислении интегралов (34) вдоль группы невозмущенных лучей с одинаковыми значениями переменной I, но разными начальными значениями переменной θ и последующем усреднении полученных результатов. В следующем разделе приведен конкретный пример вычисления коэффициента диффузии $B(I)$ указанным способом.

3.2. Переменная действия в приближении винеровского процесса

Рассмотрим модель глубоководного акустического волновода с невозмущенным профилем скорости звука $c_0(z)$, показанным в левой части рис. 1. Слабые флуктуации скорости звука $\delta c(r, z)$ вызваны влиянием случайного поля внутренних волн, статистика которых задана эмпирическим спектром Гарретта–Манка [6]. В каждой точке волновода среднее (по ансамблю неоднородностей) значение возмущения равно нулю. Для численного моделирования конкретных реализаций поля $\delta c(r, z)$ мы пользуемся методом, предложенным в работе [23]. Опуская детали, отметим лишь, что среднеквадратичная амплитуда $\delta c(r, z)$ вблизи поверхности равна 0.5 м/с и спадает с глубиной по закону $\exp(-z/L)$, где $L = 0.66$ км. Спектр зависимости возмущения от горизонтальной координаты r сосредоточен в интервале пространственных частот от $2\pi/100$ км$^{-1}$ до $2\pi/4$ км$^{-1}$. В правой части рис. 1 изображены вертикальные сечения поля $\delta c(r, z)$ на трех разных дистанциях. В такой модели волновода лучи ведут себя хаотически [19, 24].

Зависимость коэффициента диффузии B от действия I, рассчитанная по формулам из разд. 3.1, показана на рис. 2. Как видим, эта зависимость довольно слаба и величину B можно аппроксимировать константой

$$B = 1.5 \times 10^{-7}\ \text{км}. \tag{35}$$

Данное приближение далее мы будем называть **приближением винеровского процесса.** Дело в

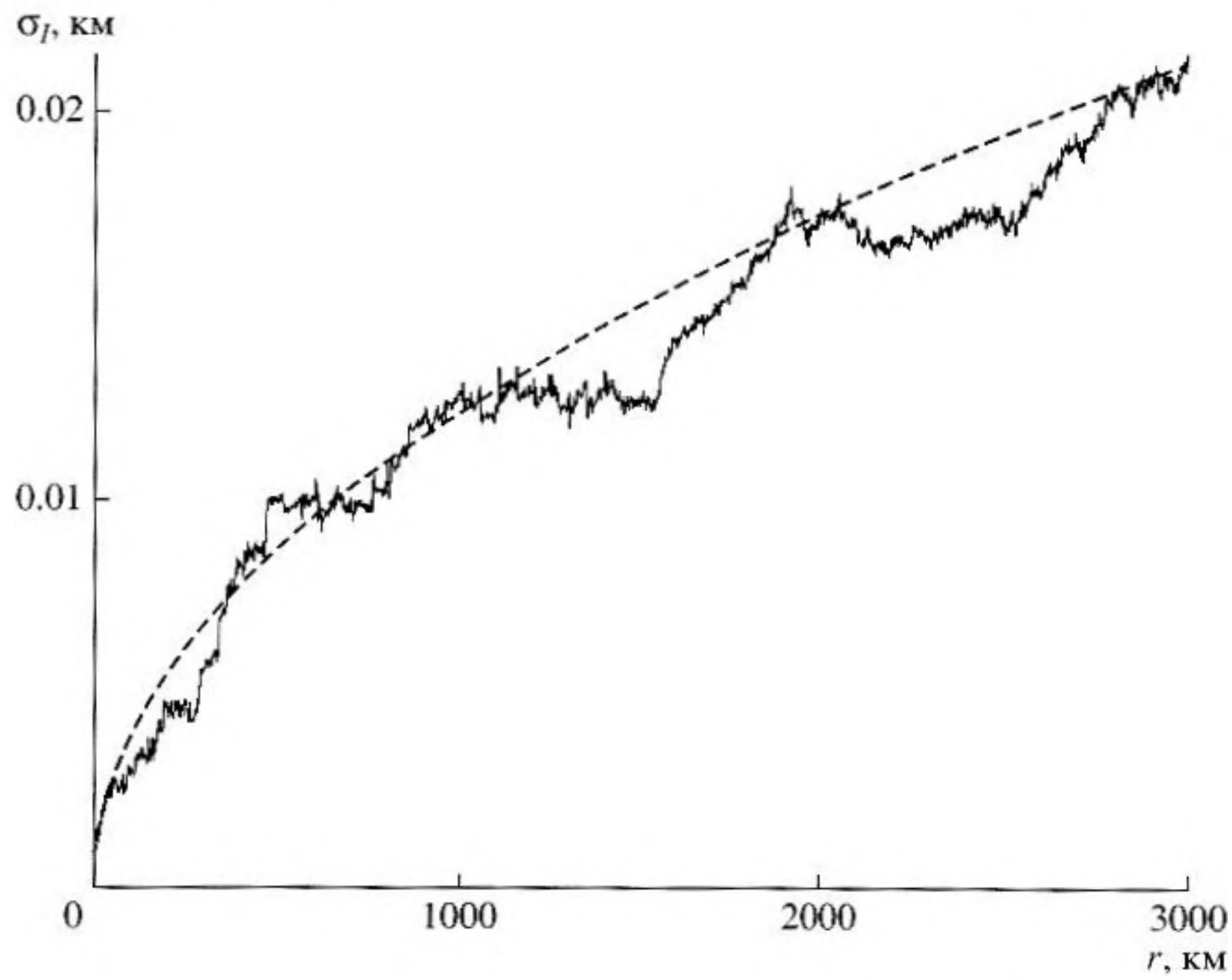

Рис. 3. Стандартное отклонение переменной I как функция дистанции r. Сплошная линия: результат усреднения по 100 лучевым траекториям с начальным действием $I_s = 0.06$ км и различными начальными значениями переменной θ. Пунктир: приближение винеровского процесса.

том, что при постоянном B переменная I может быть представлена в виде

$$I = I_s + x, \tag{36}$$

где $I_s = I(0)$ – начальное значение действия, а $x(r)$ – винеровский случайный процесс, начинающийся в точке $x(0) = 0$ [21, 22]. Процесс $x(r)$ удовлетворяет стохастическому уравнению

$$\frac{dx}{dr} = \xi(r), \tag{37}$$

где ξ – белый шум со средним значением и функцией корреляции, равными

$$\langle\xi\rangle = 0, \quad \langle\xi(r)\xi(r')\rangle = B\delta(r - r'). \tag{38}$$

Обратим внимание на следующий важный момент. Случайная функция $I(r)$, заданная соотношениями (36)–(38), может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Однако переменная действия по определению неотрицательна. Это обстоятельство легко учитывается введением отражающей границы при $I = 0$. Условная плотность вероятности $P_{I|I_0}(I, r|I_s)$ на дистанции r, т.е. плотность вероятности переменной I при условии, что ее стартовое значение (при $r = 0$) равно I_s, задается решением уравнения Фоккера–Планка (23) с постоянным коэффициентом диффузии и начальным условием $P(I, 0|I_s) = \delta(I - I_s)$. При наличии отражающей границы искомое решение равно [21]

$$P_{I|I_0}(I, r|I_s) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi Br}}\left[\exp\left(-\frac{(I - I_s)^2}{2Br}\right) + \exp\left(-\frac{(I + I_s)^2}{2Br}\right)\right]. \tag{39}$$

Наш метод описания статистики хаотических лучей базируется на этой формуле.

Величина переменной действия I_s растет с ростом угла выхода луча из источника χ_s (имеется в виду угол скольжения луча, который не следует путать с канонической переменной угол θ). Для крутых лучей с

$$I_s \gg \sqrt{Br} \tag{40}$$

в формуле (39) можно пренебречь вторым слагаемым в квадратных скобках. Данное приближение означает, что траектории винеровского процесса на рассматриваемой трассе еще не достигают введенной нами отражающей границы. При этом описание статистики лучей сильно упрощается. В частности, величина I с расстоянием расплывается по диффузионному закону

$$\sigma_I = \sqrt{\langle(I - I_s)^2\rangle} = \sqrt{Br}. \tag{41}$$

Результаты численного моделирования показывают, что критерий (40) можно ослабить, заменив знак $\gg$ на $>$. Для точечного источника, располо-

женного на оси волновода, данное условие на дистанции $r = 3000$ км выполняется для лучей с углами выходов $\chi_s > 5°$. Рассмотрим численный пример. На рис. 3 показано стандартное отклонение переменной I как функции от дистанции для луча с начальным значением переменной действия $I_s = 0.06$ км. В невозмущенном волноводе такой луч пересекает ось волновода под углом скольжения $\chi_s = 7.8°$. Сплошная линия показывает результат усреднения по 100 лучам с указанным начальным значением переменной действия и начальными значениями переменной угол, равномерно распределенными в интервале от 0 до 2π. Пунктирная линия изображает кривую, заданную уравнением (41). Как видим, простейшая статистическая модель для описания флуктуаций I, построенная в данном разделе, хорошо согласуется с результатами прямого численного моделирования. Похожие результаты получаются для лучей с другими начальными условиями.

Уравнение (37) задает упрощенную форму уравнения Гамильтона (16). Упрощенная форма второго уравнения Гамильтона (17) подробно обсуждается в работе [19].

4. ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА

4.1. Плотности вероятности параметров хаотических лучей

Плотность вероятности $P_{I|I_0}(I, r|I_s)$ описывает распределение переменной действия для ансамбля лучей со стартовыми значениями переменной действия θ_s, равномерно распределенными в интервале от 0 до 2π. Обратимся к точечному источнику, помещенному в точке $(0, z_s)$. Будем считать, что начальные импульсы лучей p_0 лежат в интервале

$$-p_{\max} < p_0 < p_{\max}. \tag{42}$$

Хаотические лучи с такими начальными условиями будем рассматривать как статистический ансамбль, описание которого является нашей целью. При этом вероятность иметь начальный импульс в малом интервале $(p_0, p_0 + dp_0)$ для произвольного луча равна $dp_0/(2p_{\max})$. Для лучей с начальными импульсами из этого интервала плотность вероятности действия на дистанции r равна $P_{I|I_0}(I, r|I(p_0, z_s))$ (здесь мы используем функцию $I(p, z)$, фигурирующую в правой части первого из уравнений (11)). Плотность вероятности действия для лучей с импульсами из интервала (42) задается интегралом

$$P_I(I, r) = \frac{1}{2p_{\max}} \int\limits_{-p_{\max}}^{p_{\max}} dp_0 P_{I|I_0}(I, r|I(p_0, z_s)). \tag{43}$$

В используемом нами приближении винеровского процесса переменная θ считается равномерно распределенной в интервале $(0, 2\pi)$ и статистически независимой от I. Тогда совместная плотность вероятности I и θ равна

$$P_{I\theta}(I, \theta, r) = \frac{1}{2\pi} P_I(I, r). \tag{44}$$

Пользуясь стандартными формулами теории вероятностей и соотношением (13), из (44) получаем формулу для совместной плотности вероятности p и z

$$P_{pz}(p, z, r) = \frac{1}{2\pi} P_I(I(p, z), r). \tag{45}$$

Отсюда находим плотности вероятности импульса

$$P_p(p, r) = \\ = \frac{1}{4\pi p_{\max}} \int\limits_{-p_{\max}}^{p_{\max}} dp_0 dz P_{I|I_0}(I(p, z), r|I(p_0, z_s)), \tag{46}$$

и координаты

$$P_z(z, r) = \\ = \frac{1}{4\pi p_{\max}} \int\limits_{-p_{\max}}^{p_{\max}} dp_0 dp P_{I|I_0}(I(p, z), r|I(p_0, z_s)). \tag{47}$$

Плавные кривые на рис. 4 показывают плотности вероятности I, θ, p и z на трассе 3000 км, рассчитанные в приближении винеровского процесса, т.е. по формулам (43), (46) и (47) (для θ в данном приближении ожидается равномерное распределение). Эти кривые сравниваются с оценками плотностей вероятности, полученными на основе численного расчета 48000 лучей. Вычисления выполнены для точечного источника, помещенного на глубине 0.78 км. Границы интервала (42) определялись из условия, что начальные углы скольжения лучей лежат в диапазоне ±12°. Ступенчатые линии на рисунке показывают соответствующим образом нормированные гистограммы распределений I, θ, p и z на указанной дистанции. Как видим, предсказания, выполненные в приближении винеровского процесса, хорошо согласуются с данными численного моделирования.

4.2. Сглаженное распределение интенсивности поля

В данной работе мы считаем, что комплексная амплитуда поля задается параболическим уравнением [5]

$$2ik\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - k^2(1 - n^2(r, z))u = 0, \tag{48}$$

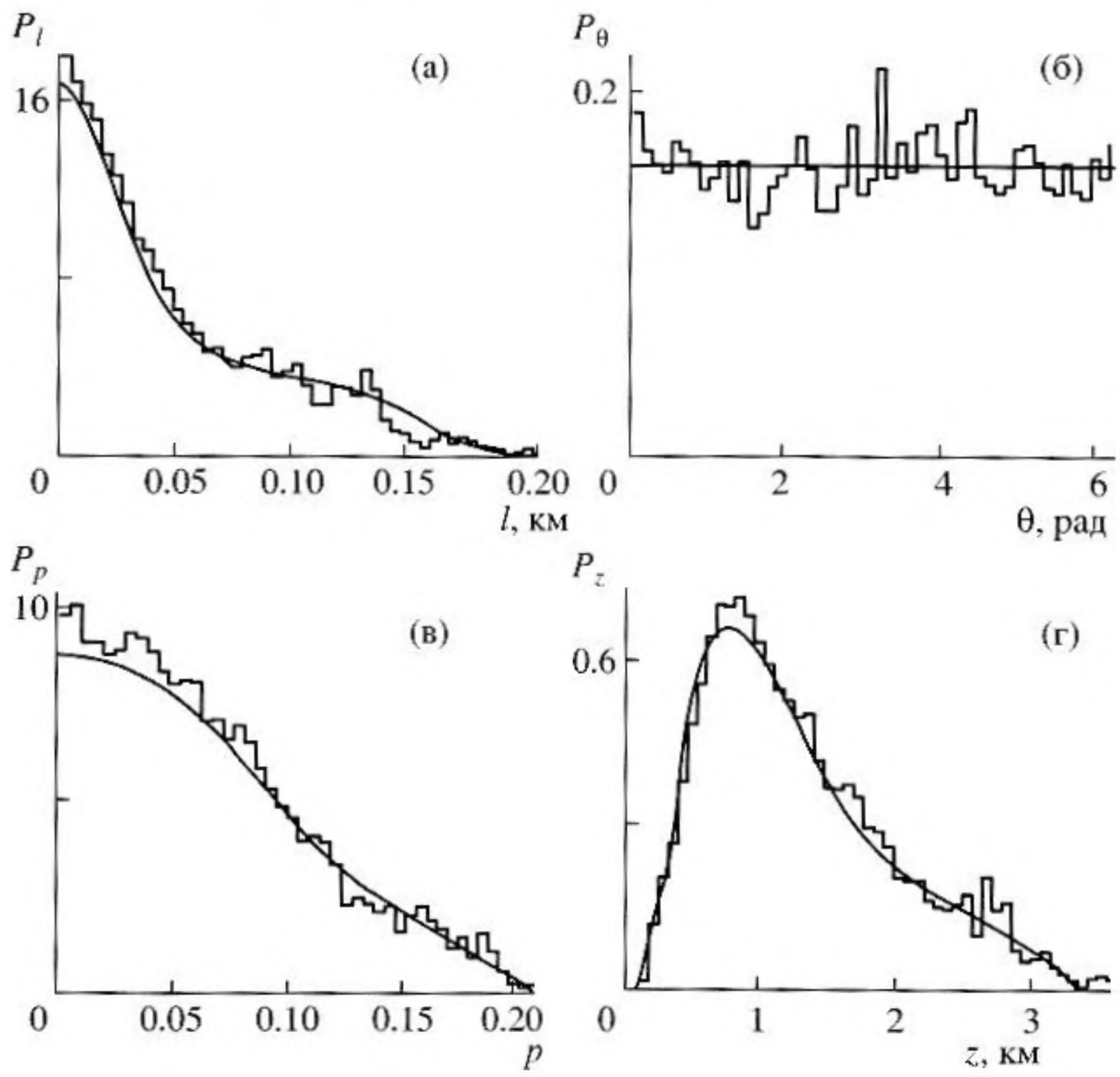

Рис. 4. Плотности вероятности (распределения) переменных l (a), θ (b), p (c) и z (d) на дистанции 3000 км для лучей, выходящих из точечного источника, расположенного на глубине 0.78 км. Сплошные линии: приближение винеровского процесса. Ступенчатые линии: нормированные гистограммы распределений, полученные путем численного расчета 48000 траекторий.

где $k = 2\pi f/c_r$, f – несущая частота. Поле точечного источника, рассмотренного в предыдущем разделе, удовлетворяет уравнению (48) с начальным условием

$$u(0, z) = \delta(z - z_s). \tag{49}$$

Уравнение (48) совпадает с уравнением Шредингера квантовой механики. При этом роль постоянной Планка играет k^{-1}. В приближении геометрической оптики $u(r, z)$ задается суперпозицией вкладов лучей, попадающих в точку наблюдения.

При анализе звуковых полей в акустических волноводах часто ограничиваются грубым расчетом интенсивности поля путем некогерентного суммирования лучей [5]. Дело здесь не только в упрощении вычислений. Расчет мелких деталей волновой картины (знания которых на практике часто и не требуется) в условиях типичной для волноводных задач многолучевости затруднен как неизбежными неточностями математической модели среды, так и погрешностями, обусловленными приближенным характером геометрической оптики. Некогерентное суммирование лучей дает представление об усредненном по пространственным координатам распределении интенсивности поля в волноводе. При этом полученный результат слабее зависит от малых вариаций параметров задачи, чем результат вычислений с учетом фаз лучей. В нашей задаче метод некогерентного суммирования лучей приводит к выражению

$$|u(r, z)|^2 = \sum_m \frac{k}{2\pi|\partial z/\partial p_0|}\bigg|_{p_0 = p_{0,m}}, \tag{50}$$

где $p_{0,m}$ – начальный импульс m-го луча, приходящего в точку (r, z). В (50) мы пользуемся известной формулой для амплитуды луча в приближении параболического уравнения [25].

В условиях лучевого хаоса количество лучей, попадающих в точку наблюдения, становится огромным. Поэтому расчет по формуле (50) требует очень большого объема вычислений. К тому же результат будет заведомо сильно отличаться от истинной интенсивности поля в точке (r, z). Ситуация кардинально упрощается, если некогерентное сложение лучей дополнить пространственным усреднением. Здесь мы рассмотрим

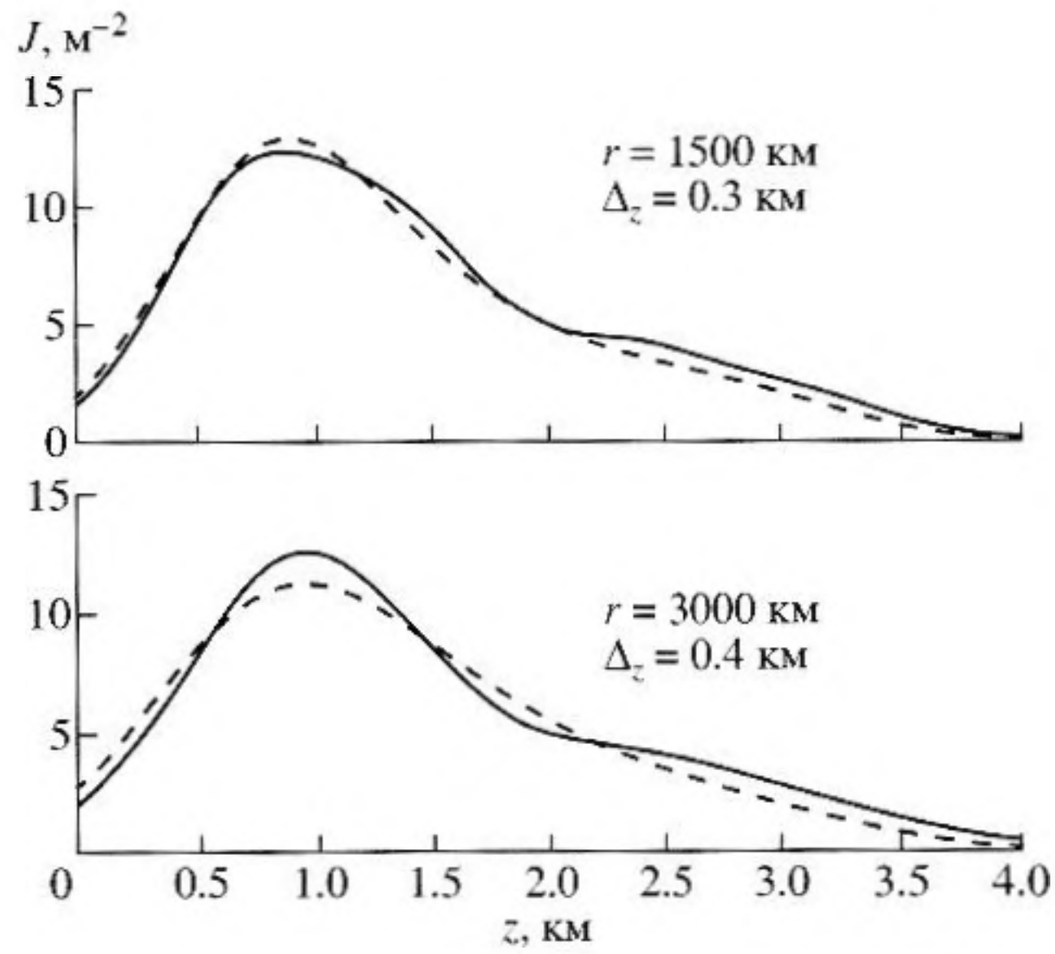

Рис. 5. Сглаженная интенсивность поля точечного источника в вертикальном сечении волновода на дистанциях 1500 км (вверху) и 3000 км (внизу). Глубина источника 0.78 км, несущая частота 75 Гц. Масштабы сглаживания Δ_z указаны на графиках. Сплошные линии: численный расчет методом параболического уравнения. Пунктир: приближение винеровского процесса.

сглаженную интенсивность, определенную соотношением

$$J(r, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta_z}\int dz'\left|u^2(r, z')\right|\exp\left(-\frac{(z-z')^2}{2\Delta_z^2}\right). \quad (51)$$

В работах [26] и [27] было сделано предположение, что выбор достаточно больших масштабов сглаживания Δ_z стирает различие между точным значением J, полученным при решении параболического уравнения, и приближенным значением этой величины, найденным путем некогерентного суммирования лучей, т.е. путем комбинации формул (50) и (51). Это предположение было подтверждено результатами численного моделирования. К сожалению, вопрос о выборе минимально необходимых масштабов сглаживания пока исследован недостаточно.

В приближении винеровского процесса удается получить аналитическое описание сглаженной интенсивности поля. Подстановка (50) в (51) позволяет записать $J(r, z)$ в виде

$$J(r, z) = \frac{k}{(2\pi)^{3/2}\Delta_z}\int\limits_{-p_{\max}}^{p_{\max}} dp_0 \exp\left(-\frac{(z-z(r, p_0, z_s))^2}{2\Delta_z^2}\right), \quad (52)$$

где функция $z(r, p_0, z_s)$ обозначает траекторию луча, вышедшего из точки z_s с начальным импульсом p_0. В условиях лучевого хаоса интегрирование по начальным условиям эквивалентно статистическому усреднению. Поэтому, пользуясь (47), приближенно заменим (52) на

$$J(r, z) = \frac{kp_{\max}}{(2\pi)^{3/2}\Delta_z}\int\limits_{-p_{\max}}^{p_{\max}} dz' \exp\left(-\frac{(z-z')^2}{2\Delta_z^2}\right)P_z(z', r). \quad (53)$$

Таким образом, мы получили аналитическое выражение для сглаженной амплитуды поля в условиях лучевого хаоса. Рисунок 5 показывает, что формула (53) неплохо предсказывает результаты численного расчета $J(r, z)$ путем прямого решения параболического уравнения. Волновое поле $u(r, z)$ вычислялось с помощью программы ММРЕ [18]. Масштабы сглаживания Δ_z, использованные при построении графиков, подбирались эмпирически.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе обсуждается аналитический подход для приближенного описания хаотической динамики лучей в глубоководном акустическом волноводе с неоднородностями, индуцированными случайным полем внутренних волн. Метод базируется на использовании гамильтонова формализма в терминах канонических переменных действие–угол (I, θ). Анализ статистики лучей существенно упрощается тем обстоятельством, что переменную θ даже на сравнительно коротких трассах можно считать равномерно распределенной в интервале $(0, 2\pi)$. В этом приближении зависимость действия I от дистанции r неплохо аппроксимируется винеровским случайным процессом, представляющим собой простейшую модель диффузии [21].

Каноническое преобразование (10) от (I, θ) к (p, z) можно трактовать как нелинейную замену переменных и по стандартным формулам теории вероятностей пересчитать известные статистические характеристики (I, θ) в характеристики (p, z). По теореме Лиувилля якобиан преобразования от (I, θ) к (p, z) равен единице, и это сильно упрощает пересчет. В результате получаются выражения для анализа статистики координат и углов скольжения хаотических лучей.

Обратим внимание на тот факт, что в приближении винеровского процесса влияние неоднородностей среды учитывается всего одним параметром – коэффициентом диффузии действия B. Каноническое преобразование, используемое при пересчете статистических характеристик, определяется лишь невозмущенным профилем скорости звука.

В качестве примера применения полученных результатов найдены плотности вероятности переменных I, p и z для лучей, выходящих из точечно-

го источника. Кроме того, получено аналитическое выражение для сглаженной интенсивности звукового поля. Результаты численного моделирования неплохо согласуются с оценками, выполненными с помощью наших приближенных формул.

Все вычисления в данной работе, включая расчет коэффициента диффузии действия, выполнены для отдельной реализации неоднородностей. Аналогом статистического усреднения здесь является усреднение по начальным условиям. Численные расчеты свидетельствуют, что статистика лучей слабо меняется при переходе от одной реализации неоднородностей к другой. Однако вопрос о том, насколько общими являются результаты исследования динамики лучей в отдельной реализации неоднородностей, пока остается открытым и требует дальнейшего изучения.

Обсуждаемый подход может быть использован для исследования статистики других параметров хаотических лучей. В частности, это относится к временам пробегов звуковых импульсов вдоль лучевых траекторий, соединяющих источник и приемник, которые для краткости называют временами приходов лучей. В работах [19] и [24] показано, что вариации времен приходов лучей легко выражаются через вариации переменной действия. Поэтому наши формулы для расчета статистических характеристик I позволяют описывать флуктуации времен приходов. Соответствующие результаты получены в работе [19]. Там, в частности, построена количественная теория эффекта разбиения времен приходов хаотических лучей на компактные кластеры и дано объяснение неожиданно высокой устойчивости начальной части звукового импульса в глубоком море, наблюдаемой на дистанциях вплоть до нескольких тысяч километров.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 03-02-17246 и гранта НШ-838.2003.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Worcester P.F., Cornuelle B.D., Dzieciuch M.A., Munk W.H., Howe M., Mercer A., Spindel R.C., Colosi J.A., Metzger, Birdsall T., and Baggeroer A.B.* A test of basin-scale acoustic thermometry using a large-aperture vertical array at 3250-km range in the eastern north pacific ocean // J. Acoust. Soc. Amer. 1999. V. 105. P. 3185–3201.
2. *Colosi J.A., Scheer E.K., Flatte S.M., Cornuelle B.D., Dzieciuch M.A., Munk W.H., Worcester P.F., Howe B.M., Mercer J.A., Spindel R.C., Metzger K., Birdsall T., and Baggeroer A.B.* Comparisons of measured and predicted acoustic fluctuations for a 3250-km propagation experiment in the eastern north pacific ocean // J. Acoust. Soc. Amer. 1999. V. 105. P. 3202–3218.
3. *Dushaw B.D., Howe B.M., Mercer J.A., Spindel R.C., and the ATOC Group.* Multimegameter-range acoustic data obtained by bottom-mounted hydrophone arrays for measurements of ocean temperature // IEEE Journal of Oceanic Engineering. 1999. V. 24. P. 202–214.
4. *Simmen J., Flatte S.M., and Wan G.-Y.* Wavefront folding, chaos, and diffraction for sound propagation through ocean internal waves. // J. Acoust. Soc. Amer. 1997. V. 102. P. 239–255.
5. *Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П.* Теоретические основы акустики океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. С.
6. Распространение звука во флуктуирующем океане. Под ред. С. Флатте. М.: Мир, 1982. С.
7. Распространение волн и подводная акустика. Под ред. Дж.Б. Келлера и Дж.С. Пападакиса. М.: Мир, 1980. С.
8. *Татарский В.И., Рытов С.М., Кравцов Ю.А.* Введение в статистическую радиофизику. Часть II. Случайные поля. М.: Наука, 1978. С.
9. *Заславский Г.М., Абдуллаев С.С.* Классическая нелинейная динамика и хаос лучей в задачах о распространении волн в неоднородных средах // Усп. Физ. Наук. 1991. Т. 161. Вып. 8. С. 1–43.
10. *Palmer D.R., Brown M.G., Tappert F.D., and Bezdek H.F.* Classical chaos in nonseparable wave propagation problems // Geophys. Res. Lett. 1988. V. 15. P. 569–572.
11. *Smith K.B., Brown M.G., and Tappert F.D.* Ray chaos in underwater acoustics // J. Acoust. Soc. Amer. 1992. V. 91. P. 1939–1949.
12. *Smith K.B., Brown M.G., and Tappert F.D.* Acoustic ray chaos induced by mesoscale ocean structure. J. Acoust. Soc. Amer. 1992. V. 91. P. 1950–1959.
13. *Smirnov I.P., Virovlyansky A.L., and Zaslavsky G.M.* Theory and applications of ray chaos to underwater acoustics // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. 036221.
14. *Brown M.G., Colosi J.A., Tomsovic S., Virovlyansky A.L., Wolfson M.A., and Zaslavsky G.M.* Ray dynamics in long-range deep ocean sound propagation // J. Acoust. Soc. Amer. 2003. V. 113. P. 2533–2547.
15. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физик у. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988.
16. *Brown M.G. and Viechnicki J.* Stochastic ray theory for long-range sound propagation in deep ocean environment // J. Acoust. Soc. Amer. 1998. V. 104. P. 2090–2104.
17. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1973. 206 с.
18. *Smith K.B.* Convergence, stability, and variability of shallow water acoustic predictions using the split-step fourier parabolic equation model // J. Comp. Acoust. 2001. V. 9. P. 243–285.
19. *Virovlyansky A.L.* Ray travel times in range-dependent acoustic waveguides, nlin.CD/0012015.
20. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1973. С.
21. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. М: Советское радио, 1977. С.
22. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, Москва, 1986. С.
23. *Colosi J.A. and Brown M.G.* Efficient numerical simulation of stochastic internal-wave-induced sound-speed

perturbation field // J. Acoust. Soc. Amer. 1998. V. 103. P. 2232–2235.

24. *Virovlyansky A.L.* Ray travel times at long ranges in acoustic waveguides // J. Acoust. Soc. Amer. 2003. V. 113. P. 2523–2532.
25. *Gutzwiller M.C.* Phase-integral approximation in momentum space and the bound states of an atom // J. Math. Phys. 1967. V. 8. P. 1979–2000.
26. *Virovlyansky A.L. and Zaslavsky G.M.* Evaluation of the smoothed interference pattern under conditions of ray chaos // Chaos. 2000. V. 10. P. 211–223.
27. *Вировлянский А.Л., Окомелькова И.А.* Лучевой подход для расчета сглаженного по угловым и пространственным масштабам локального спектра поля в волноводе // Изв. вузов. Радиофизика. 1997. Т. 40. № 12. С. 1542–1554.

Statistical Description of Ray Chaos in an Underwater Acoustic Waveguide

A. L. Virovlyansky

Institute of Applied Physics, Russian Academy of Scienses, ul. Ul'yanova 46 Nizhni Novgorod, 603950 Russia
e-mail: viro@hydro.appl.sci-nnov.ru

Abstract—An approximate analytical approach is developed to describe the chaotic behavior of ray trajectories in a deep-water acoustic waveguide up to 3–5 thousands of kilometers in length. The ray dynamics is investigated using the Hamiltonian formalism expressed in terms of the canonical action–angle variables. A realistic waveguide model is used with refractive index fluctuations due to the random field of internal waves. The Fokker–Planck equation is obtained for the action variable, and it is shown that the range dependence of this variable can be approximated by the Wiener random process, which represents the simplest model of diffusion. Formulas are derived for calculating the probability density of the coordinate and other ray characteristics. An approximate expression is found for the smoothed field intensity of a point source. For illustrating and testing the formulas obtained, their predictions are compared with the results of numerical solutions of ray equations and the results of field calculations by the parabolic equation method.